

Das Folgende ist ein Zitat aus

**Algorithmen  
von Hammurapi bis Gödel**

Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum  
Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016

# 1 Einleitung: Zum universellen Charakter der Algorithmik

Natürlich ist die Mathematik ... so dynamisch wie noch nie. Gerade auch wegen der explosionsartig fortschreitenden Algorithmisierung der Mathematik müssen wir vielmehr von einem neuen Anfang der Mathematik sprechen.

Damit sollte es klar sein, dass Computer-Mathematik eine, wenn nicht *die* Schlüsseltechnologie der heutigen Informationsgesellschaft ist.

Wer heute Technik und insbesondere Mathematik studiert, befindet sich im "Auge des Hurrikans" der modernen Entwicklung und nicht irgendwo in einem Hinterzimmer. Es ist heute so motivierend wie noch nie, sich als junger Mensch auf das Abenteuer Mathematik-basierter Technik einzulassen. *Bruno Buchberger, 2000*

Algorithmen sind es, die den Computer zum Laufen bringen. Ohne sie gäbe es keine Programme, keine Software, keine Anwendersysteme. Eine „digitale Revolution“ hätte ohne Algorithmen nie stattgefunden. Multimedia, Social Media, Internet, Suchmaschinen, E-Mail, Online Banking und all das würde nicht existieren; Nanosekunden-Aktienhandel, Computerviren und Computerkriminalität allerdings auch nicht. Ohne Algorithmen wäre der Computer nur "Hardware", ein ziemlich nutzloser Haufen "harten" elektronischen Schrotts.

Algorithmen<sup>1</sup> gibt es schon sehr lange und in höchst unterschiedlicher Form. Erste schriftlich dokumentierte Beispiele, wie das babylonische Verfahren zum Wurzelziehen, sind fast 4000 Jahre alt. Dieses Verfahren wird bis zum heutigen Tag in den modernsten Computern verwendet. Algorithmen begleiten unsere Wissenschafts- und Kulturgeschichte von den Anfängen bis in die Gegenwart. Das Konzept des Algorithmus zählt zu den fundamentalen Begriffen von Mathematik und Informatik, ohne dessen Verständnis eine erfolgreiche Beschäftigung mit diesen Fächern nicht möglich ist. Darüber hinaus gibt es eine Fülle von Beziehungen zwischen der Algorithmik und der

---

<sup>1</sup> Der Begriff des Algorithmus wird zwar erst in Kapitel 2 systematisch thematisiert; wem der Begriff aber gar nichts sagt, möge sich vorläufig zunächst so etwas wie „ein exakt beschriebenes Verfahren“ darunter vorstellen.

Philosophie, den Natur- und den Geisteswissenschaften (vgl. insbesondere Abschnitt 1.3). Selbst zur Kunst gibt es Querverbindungen.

Man kann heute kaum „Algorithmus“ sagen, ohne an „Computer“ zu denken. Die Entstehung von Algorithmen hat jedoch zunächst einmal gar nichts mit dem Phänomen des Computers zu tun. Wie in den historischen Ausführungen (in Kapitel 3) noch zu zeigen sein wird, sind die Algorithmen sehr viel älter als die Computer. Der Entstehung des Computers, wie wir ihn heute kennen, liegt geradezu das Motiv zugrunde, ein Gerät zur Ausführung der z.T. schon Jahrtausende früher entwickelten Algorithmen zur Verfügung zu haben. Bis zum heutigen Tag gibt es viele auf dem Gebiet der Algorithmik arbeitende Mathematiker und (theoretische) Informatiker, für die der Computer bestenfalls am Rande eine Rolle spielt. Der renommierte Mathematikhistoriker H. M. Edwards vertritt die wohlbegründete Auffassung, dass alle Mathematik bis zum Auftreten der Zeitgenossen von Leopold Kronecker (1823–1891) algorithmischer Natur war (vgl. Edwards 1987).

## 1.1 Zur Bildungsrelevanz der Algorithmik

Einen der frühesten schriftlichen Belege für Algorithmen stellt die von Euklid im dritten Jahrhundert v. Chr. unter dem Titel „Die Elemente“ verfasste Gesamtdarstellung des mathematischen Wissens seiner Zeit dar, die neben vielen anderen natürlich auch den „Euklidischen“ Algorithmus enthält. Euklids Werk war eines der erfolgreichsten Lehrbücher in der Bildungsgeschichte der Menschheit; es wurde bis in das 19. Jahrhundert hinein als Lehrbuch für Mathematik verwendet – ein Lehrbuch mit einer „Lebenszeit“ von über 2000 Jahren.

Die Algorithmik (also die Lehre von und die Beschäftigung mit den Algorithmen) hat seit Euklids Zeit auch eine pädagogische Dimension. Wichtige Indikatoren für die Bildungsrelevanz eines Themas sind ein hohes Maß an Fundamentalität, Elementarität und Beziehungshaltigkeit in Verbindung mit seiner Bedeutung für das tägliche Leben. Dass diese Kriterien im Hinblick auf die Algorithmik erfüllt sind, soll dieses Buch zeigen.

Die Algorithmik ist Teil eines außerordentlich vielgestaltigen „Bildungsmosaiks“; die Frage, was zu einer guten, richtigen, angemessenen Bildung gehört, wird von den unterschiedlichsten Standpunkten her permanent diskutiert

– aber kaum jemand wird heute in Frage stellen, dass Kenntnisse in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik *auch* dazu gehören.

Die bislang zum Themenkomplex *Mathematik, Algorithmen, Computer, Informatik* vorgelegten Bildungsangebote sind ein heterogenes Konglomerat von Beiträgen, die sich zwischen den Polen *zeitloser mathematischer Grundkenntnisse* und *extrem vergänglicher Computerkenntnisse* bewegen. Besonders was die computerbezogenen Kenntnisse betrifft, wird die Bildungslandschaft von einer Woge bisher nicht gekannter Kommerzialisierung überrollt. Allein schon deshalb, aber auch, weil die für Unterricht und Studium zur Verfügung stehende Zeit eine sehr knappe Ressource ist, ist es notwendig, die Kriterien und Inhalte der Allgemeinbildung immer wieder kritisch zu durchdenken.

Der Computer (einschließlich seiner Software) ist ein äußerst komplexes Gebilde. Obwohl seine konkreten Konstruktionsmerkmale in der Regel sehr zeit- und technologieabhängig sind, versetzt er uns dennoch in die Lage, zeitlose fundamentale Ideen der Mathematik und Informatik zu realisieren. Bildungsrelevant im Zusammenhang mit dem Computer sind diese bleibenden grundlegenden Ideen – nicht jedoch die extrem schnell veraltenden Kenntnisse über dieses oder jenes Detail seiner Hardware, über gerade gängige Varianten dieses oder jenes Betriebssystems oder über die Besonderheiten und Eigenarten graphischer bzw. sonstiger „Benutzerschnittstellen“.

Für viele Menschen sind Algorithmen ein Spezialphänomen unserer vom Computer geprägten Zeit, das nur interessant zu sein scheint für hochgradig spezialisierte Berufsgruppen, insbesondere Computerprogrammierer. Dieses Bild ist jedoch nicht nur unzutreffend; das Gegenteil ist eher richtig. Mit den ihnen innewohnenden Eigenschaften der Elementarität, Konstruktivität und Beziehungshaltigkeit (Vernetztheit und Vernetzbarkeit), mit ihrer Förderung experimenteller und operativer Arbeitstechniken stehen Algorithmen im methodologischen Zentrum schulischer Bildung.

Im Bildungszusammenhang ist weiterhin der Umstand bemerkenswert, dass auch der *Algorithmus-Begriff* aus einer ureigenen pädagogischen Intention heraus entstanden ist. Der Begriff des Algorithmus geht zurück auf die Angabe des Geburtsorts („al Khowarizm“) desjenigen persisch-arabischen Gelehrten, der im neunten Jahrhundert ein wissenschaftsgeschichtlich äußerst einflussreiches Buch zur Verbreitung der „indischen“ Ziffern, also der Zahlendarstellung im Zehnersystem, geschrieben hat (vgl. Kapitel 2). Die Art und

Weise, wie wir heute die Zahlen schreiben und mit ihnen umgehen, geht entscheidend auf dieses Buch zurück, das neben Euklids „Elementen“ einen der bedeutendsten Ecksteine in der Bildungsgeschichte der Menschheit darstellt.

### **Zur Rolle des Computers im Bildungsprozess**

Die Bedeutung der Algorithmik für den Schulunterricht kann heute nicht mehr unabhängig vom Computer diskutiert werden. Dabei hat das Phänomen „Computer“ sowohl einen Hardware- als auch einen Software-Aspekt. Im Unterricht kommt der Computer dementsprechend in unterschiedlichen „Rollen“ bzw. Funktionen vor. Die wichtigsten davon sind:

1. der Computer, einschließlich seiner Architektur, als *Unterrichtsgegenstand*
2. der Computer als universelles *Werkzeug zum (algorithmischen) Problemlösen*
3. der Computer als Präsentations- und Kommunikations-*Medium*

Zu 1: Die Rolle des Computers als *Unterrichtsgegenstand*: Aus unterrichtlicher Sicht sind in Bezug auf die materielle Architektur des Computers Physik und Technik die einschlägigen Bezugsfächer. Eng mit seinem physikalischen Aufbau ist die binäre (digitale) Architektur des Computers verbunden. Und hierbei, wie auch bei Fragen der Schalt- und Steuerungslogik, kommt die Mathematik als einschlägiges Unterrichtsfach ins Spiel.

Zu 2: Die Rolle des Computers als *Werkzeug zum Problemlösen*: Die Formen des beispielgebundenen, experimentellen, ja sogar spielerischen Arbeitens, die auch in der Mathematik von großer Bedeutung sind, hängen ganz massiv mit der Nutzung des Computers in Lern- und Bildungsprozessen zusammen. Der Computer ist heute das wichtigste Werkzeug, um in der Mathematik Experimente durchzuführen. Er ist aber noch mehr. Vor allem im Zusammenhang mit dem *modularen* Arbeiten, also dem Arbeiten im Sinne des Baukastenprinzips (vgl. Abschnitt 4.2), ist er ein Katalysator, der eine neue, intensivere begriffliche Durchdringung vieler klassischer und moderner Probleme ermöglicht und gelegentlich sogar erzwingt. Man vergleiche dazu auch die Ausführungen zur algorithmisch basierten Begriffsbildung in Abschnitt 1.3.

Kontrovers wird im Zusammenhang mit der werkzeugartigen Nutzung des Computers oft die folgende Frage diskutiert.

## Sollte man Algorithmen auch programmieren können?

Die Algorithmik hat, etwas vereinfachend ausgedrückt, zwei Seiten: eine sehr spannende und eine eher langweilige. Der *Entwurf*, die *Konstruktion* von neuen Algorithmen sowie das Verstehen und Analysieren vorgegebener, insbesondere klassischer Algorithmen ist einerseits eine sehr kreative Angelegenheit. Soll die Beschäftigung mit den Algorithmen aber nicht nur theoretischer Natur bleiben, so gehört andererseits aber auch die *Abarbeitung* von fertigen Algorithmen dazu – und das ist eine eher monotone, wenig inspirierende Sache. Deshalb gehörte (und gehört) zur Algorithmik schon immer der Versuch, Maschinen zur Abarbeitung von Algorithmen zu konstruieren. Die Universalmaschine zur Abarbeitung von Algorithmen ist heute der Computer; er stellt ein unentbehrliches Werkzeug für das algorithmische Problemlösen dar.

Die Umsetzung von Algorithmen auf einem Computer geschieht in der Form der *Programmierung* des Computers. Es gibt viele Formen und Varianten des Programmierens. Programmieren „mit Stil“ ist eine anspruchsvolle geistige Aktivität, die der Pädagoge H. von Hentig mit eindrucksvollem Blick für das Wesentliche folgendermaßen beschreibt<sup>1</sup>:

*Dies ist der Gewinn – aber er wird mir nur zuteil, wenn ich den Computer dazu verwende: als Abbild meiner Denkprozesse, die ich in ihm objektiviere und erprobe. Programmieren heißt eben dies.*

Die Entwicklung moderner Programmiersprachenkonzepte steht im engsten Zusammenhang mit den fundamentalen Paradigmen des Algorithmus-Begriffs und den philosophischen Grundfragen, die sich aus der Untersuchung der Grenzen der Algorithmisierbarkeit ergeben haben. Der österreichische Philosoph Ludwig Wittgenstein (1889–1951) hat sich in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts intensiv mit der Rolle der Sprache (und dabei insbesondere auch der formalen Sprachen) für unser Denken befasst. Von ihm stammt der Ausspruch „Die Grenzen meiner Sprache sind die Grenzen meiner Welt“, der mit Sicherheit auch in der „Welt des Computers“ seine Berechtigung hat.

Kein einzelnes Phänomen beeinflusst unsere Gesellschaft heute so sehr wie die Computerprogramme. Ohne sie gäbe es keine „digitale Agenda“. Grundkenntnisse über Algorithmen, Programme und Programmierung sind

---

<sup>1</sup> DIE ZEIT, 18. Mai 1984

deshalb für die Allgemeinbildung unerlässlich. Computerkenntnisse ohne Programmierung sind wie eine Suppe ohne Salz.

Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage lautet eindeutig „Ja, man sollte als rundum gebildet geltender Mensch in der Lage sein, einfache Algorithmen zu formulieren und in ein Programm umzusetzen“. Damit ist noch nichts über die Programmiersprache gesagt, in deren Rahmen dies passieren könnte. Programme in modernen Programmiersprachen, insbesondere in Computeralgebrasystemen, unterscheiden sich oft kaum noch von einer wohlstrukturierten umgangssprachlichen Formulierung der Algorithmen. Und auch die Erstellung einer Tabellenkalkulation kann als eine Form der Programmierung angesehen werden.

Wir kommen schließlich zur dritten Rolle des Computers im Unterricht: der *Computer als Medium*. Aus dieser Perspektive wird oft die Frage gestellt:

### **Reicht nicht auch „Medienkunde“ für das Computerwissen aus?**

Diese Frage hört man besonders oft, wenn in der Bildungspolitik von informationstechnischer Bildung die Rede. Die Beantwortung der Frage wird schon dadurch erschwert, dass es überhaupt keinen Konsens in der Frage gibt, was unter „Medienkunde“ zu verstehen ist. Es ist auch nicht klar, ob die Vertreter dieser Auffassung für ein eigenständiges neues Fach Medienkunde plädieren und wer dies unterrichten sollte.

Natürlich wird der Computer oft auch als Präsentations-, Kommunikations- und Display-Medium sowie für Computerspiele genutzt; aber diese Verwendungsform macht eben nicht seine Einzigartigkeit als Werkzeug zur Unterstützung der menschlichen Denk- und Problemlösefähigkeiten aus. Kommunikation, Veranschaulichung und Visualisierung sind zweifellos wichtig für jede Form des Lernens; sie spielen auch in der Mathematik eine große Rolle. *Anschauliche Geometrie* bzw. *Die Kunst des Sehens in der Mathematik* sind Titel wohlbekannter Bücher renommierter Mathematiker. Schon die Titel machen die Bedeutung der Veranschaulichung in der Mathematik deutlich. Sehen ist aber mehr als bloße „Visualisierung“ – sehen heißt auch: Zusammenhänge erkennen, Fundamentales identifizieren, Wichtiges von Unwichtigem trennen, komplexe Sachverhalte strukturieren können, zu einer „Gesamtschau“ fähig sein. So hat z.B. *Leonhard Euler* (1707–1783), einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten, in der Mathematik so viel „gesehen“;

wie kaum ein anderer – obwohl er fast blind war. Diese Art des Sehens kann im Rahmen eines Medienkundeunterrichts nicht vermittelt werden.

Wenn der Computer jedoch auf seine Eigenschaft als Kommunikations-, Visualisierungs- oder Präsentationsmaschine reduziert wird, dann kommt seine eigentliche Stärke als „Denkwerkzeug“ nicht oder nur ungenügend zur Geltung. Der Computer ist wissenschaftshistorisch gesehen, ein Produkt der MINT-Disziplinen (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik). Und bei diesen Fächern ist auch die Kompetenz für einen computerbezogenen Unterricht angesiedelt.

Fazit: Nein, eine reine Medienkunde ist nicht geeignet, um die Bedeutung des Computers für die Allgemeinbildung deutlich zu machen.

## **Bildungsinformatik**

In den letzten Jahren wurde immer wieder die Forderung nach einem Unterrichtsfach „Informatik“ oder „Informatische (Grund-) Bildung“ oder so ähnlich, gestellt. Dies erscheint einerseits im Hinblick auf die Vielzahl der Informatik-basierten Anwendungen in unserer heutigen Gesellschaft plausibel. Andererseits ist es aber auch so, dass es viele Überschneidungen zu bestehenden Fächern gibt (insbesondere zu Mathematik, Physik und Technik). Eine überzeugende Legitimation für ein Fach Informatik kann es jedoch nur geben, wenn es auf eigene Inhalte verweisen kann, die nicht schon in anderen Fächern unterrichtet werden oder denen nicht durch eine leichte Anpassung in anderen Fächern Rechnung getragen werden könnte. Die Fachgesellschaft für Informatik (GI) hat dies in ihren *Standards für die Informatik in der Schule* darzulegen versucht (vgl. Gesellschaft für Informatik, 2008).

Es gibt in unserem Bildungssystem eine Reihe von Themen, die im Kanon der derzeitigen Lehrpläne eher unterrepräsentiert sind, wie z.B. der gesamte für die Informationsverarbeitung enorm wichtige Themenkomplex: *Bäume, Netze und Graphen*. Hier ist eine produktive Zusammenarbeit zwischen den Fächern Mathematik und Informatik denkbar.

Auch die Würdigung des Themas *heuristische Strategien* lässt im derzeitigen Unterrichtskanon sehr zu wünschen übrig. Die Behandlung der Strategien des Problemlösens hat im Schulsystem keinen zentralen „Ort“. Es gibt kein Schulfach *Heuristik*, und der Einführung eines solchen Faches soll hier auch nicht das Wort geredet werden, denn heuristische Strategien sind in der Regel fächerübergreifender Natur. Heuristik muss inhaltsbezogen im jeweili-



gen Fachunterricht thematisiert werden. Dies geschieht derzeit aber bestenfalls nur sporadisch; zum einen, weil die Lehrpläne (ob tatsächlich oder vermeintlich, sei dahingestellt) keinen Raum dafür bieten, zum anderen, weil sich auch die Studierenden nur in den seltensten Fällen während ihres Studiums explizit mit heuristischen Fragen befassen bzw. befassen müssen. Heuristik lässt sich nur schwer in Lehr- und Studienpläne gießen. Und es ist nicht einfach, Kenntnisse in Heuristik abzu prüfen. Dennoch ist ein Wissen über heuristische Strategien von großer Bedeutung für die Zukunft der Lernenden – vielleicht wichtiger als manches fachspezifische Detail, das sehr bald wieder vergessen sein wird.

Das Teilgebiet der „künstlichen Intelligenz“ in der Informatik befasst sich mit Versuchen, das Phänomen des „intelligenten Verhaltens“ zu simulieren. Hierbei kommt die Thematisierung heuristischer Verfahren auf ganz natürliche Weise ins Spiel. Die Informatik ist also möglicherweise nicht der einzige, aber auf jeden Fall ein guter Ort, um der Heuristik eine geeignete Heimstatt zu geben.

## 1.2 Algorithmen im Schulstoff

Der Begriff des Algorithmus zählt (ähnlich wie der Begriff der Funktion oder der Begriff der Menge) zu den fundamentalen Begriffen der Mathematik. Dies gilt in besonderer Weise für jedes lehramtsbezogene Mathematikstudium. Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften überhaupt, und Algorithmen spielten in ihrer Entwicklungsgeschichte eine entscheidende Rolle. Ohne die Berücksichtigung dieser historischen Dimension kann der philosophische und geistige Rahmen dieses Faches nicht hinreichend gewürdigt werden.

Im Mathematikunterricht sind Algorithmen in mehrfacher Weise von Bedeutung. Auf der *Objektebene* sind sie Lernstoff, auf der *Metaebene*<sup>1</sup> geben sie Anlass zu tiefen philosophischen Betrachtungen und methodologischen Untersuchungen.

Zunächst zur *Objektebene*: Eine Fülle von Algorithmen ist im Mathematikunterricht zu erlernen, zu praktizieren, zu verstehen, zu beherrschen, zu

---

<sup>1</sup> Metaebene ist die lose verwendete Bezeichnung für eine übergeordnete Sichtweise, in der Diskurse, Strukturen oder Sprachen als Objekte behandelt werden (Wikipedia 2015-06-13).

analysieren. Dies beginnt mit den Verfahren (Algorithmen) des schriftlichen Rechnens und zieht sich durch den gesamten Mathematikunterricht. Eine genauere Analyse zeigt, dass es im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe überhaupt kein Thema gibt, das nicht einen zentralen algorithmischen Kern hat. Im Folgenden sind stichwortartig algorithmische Beispiele (mit dem Schwerpunkt im Mittelstufenunterricht) gegeben; wenn dabei manche Themen mehrfach genannt sind, dann entspricht dies einer „spiralförmigen“ Gestaltung des Curriculums.

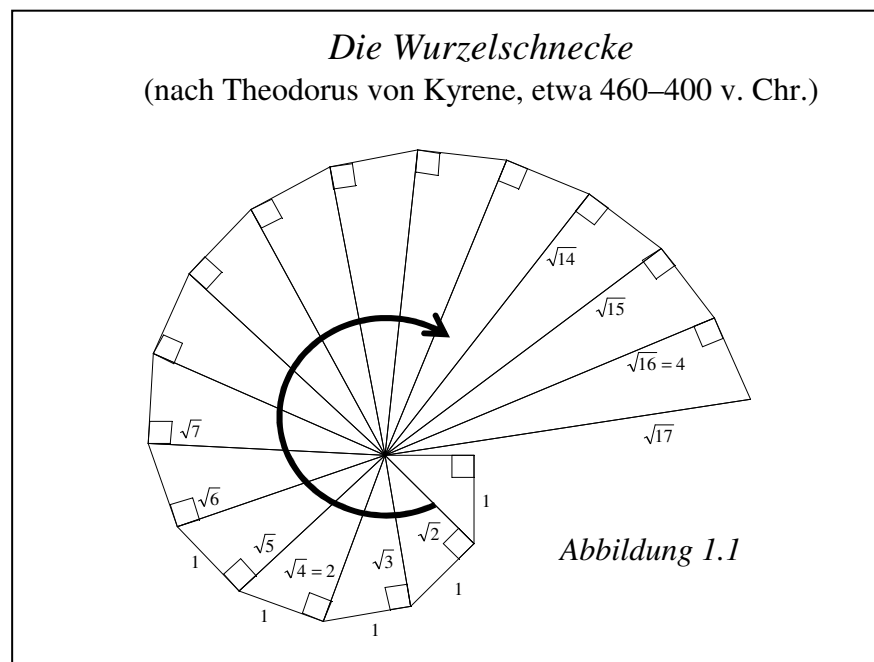
*Primarstufe:* Erste Erfahrungen mit Algorithmen

- Mustererkennung in der elementaren Arithmetik: der Prozess des Zählens, einfache Iterierungs- und Reihungsverfahren (insbesondere im Zusammenhang mit den arithmetischen Grundoperationen, z.B. Multiplikation als iterierte Addition, Division als iterierte Subtraktion, "Neuner-Reihe", ...), unkonventionelle arithmetische Verfahren (das Rechnen mit ägyptischen, babylonischen oder römischen Zahlen; die "russische Bauernmultiplikation"), wiederholtes Verdoppeln und Halbieren, nichtdekadische Zahlen- und Stellenwertsysteme; in der Lehrerbildung: ordinaler Aspekt des Zahlbegriffs und seine wissenschaftliche Fundierung durch die Peano-Axiome
- figurierte Zahlen und rekursive Zahlen- und Punktmuster, iterative und rekursive geometrische Konstruktionsverfahren (z.B. Polyminos)
- einfache Spiele mit iterativen oder rekursiven Strategien (z.B. NIM)
- erste stochastische Grunderfahrungen (Zählen, Sortieren, Klassifizieren, Ordnen)

*Mittelstufe / Sekundarstufe I:* Ausbau und Vertiefung der Primarstufen-Themen

- *Teilbarkeitslehre:* Division mit Rest, Teilbarkeit, Primzahlen (Sieb des Eratosthenes), Euklidischer Algorithmus: größter gemeinsamer Teiler (GGT), kleinstes gemeinsames Vielfaches (KGV), Stellenwertsysteme und andere Zahlssysteme mit den entsprechenden Umwandlungsalgorithmen (babylonisches, ägyptisches, römisches Zahlssystem), historische Bezüge: Pythagoreische Zahlen und ihre Erzeugung, Fibonacci-Zahlen
- *Bruchrechnen:* Grundrechenarten mit Brüchen (Hauptnenner bilden, Kürzen), Umwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche (Vorperiode, Periodenlänge), erste Einblicke in unkonventionelle Formen des Bruchrechnens ("ägyptisches" Bruchrechnen, Kettenbrüche)

- *Folgen und Funktionen*: Folgen und Reihen als Iterationsstrukturen, Funktionen als Rechenausdrücke, Funktionen als Zuordnungsvorschriften, Darstellung von Zuordnungen durch Wertetafeln, Funktionsschaubilder, Histogramme; Schrittverfahren zur Auswertung und Darstellung von Funktionen und Kurven
- *Terme, Termauswertung, Gleichungslehre*: Transformation von Termen und Gleichungen, Verfahren zur Lösung linearer und quadratischer Gleichungen und einfacher linearer Gleichungssysteme (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren)
- *Näherungsverfahren*: Approximation irrationaler Zahlen ( $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$ , ...), approximative Bestimmung von Funktionswerten (Quadratwurzelfunktion, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen), iteratives Lösen von Gleichungen
- *Geometrie* (besonders konstruktive synthetische Geometrie, Abbildungslehre und darstellende Geometrie): geometrische Abbildungen (Verkettung von Spiegelungen), iterated function systems (IFS) in der fraktalen Geometrie, Abbildung von realen Objekten auf dem Computerbildschirm und Plotter, Projektionsarten; Konstruktion von Strecken bzw. Streckenlängen (historisches Beispiel: die "Wurzelschnecke" von Theodorus, siehe Abbildung 1.1); Konstruktionstexte als geometrische Algorithmen



- *Mathematik in Anwendungssituationen*: Prozent- und Zinsrechnung: unterjährige Verzinsungsprozesse, Zinseszinsen, Zinsvergleiche, Ratenkauf (und effektiver Zinssatz), Tilgungsprozesse; erste Ansätze zur mathematischen Modellbildung und Simulation (lineares und exponentielles Wachstum, Halbwertszeit); im gesamten Bereich der Naturwissenschaften: *Diskretisierung* d.h. schrittweise Generierung der einschlägigen Größen (Populationsgrößen, Bahnkurven, u.v.m.); in der Staatsbürgerkunde: Sitzverteilung nach Wahlen (Verfahren von d'Hondt, Hare-Niemeyer, u.a.)

*Oberstufe / Sekundarstufe II*: Möglichkeiten zur Vertiefung und Analyse der bereits behandelten Themen gibt es in praktisch allen Bereichen:

- Analysis: von den Folgen und Reihen über das Newton-Verfahren bis zur Fixpunkt-Thematik
- Numerische und Praktische Mathematik: Iterations- und Fixpunktverfahren
- Lineare Algebra: Gaußscher Algorithmus, Simplex-Algorithmus
- Stochastik: Markoffsche Ketten, Warteschlangen, Simulationen
- Mathematische Modellbildung: diskrete Modelle und Verfahren in Wirtschaft, Technik, Naturwissenschaften, Sozialwissenschaften, Sprachwissenschaften

Im Grunde genommen umfasst diese Aufzählung den gesamten Inhaltskanon des Mathematikunterrichts der Schule. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, denn die im Schulunterricht behandelte Mathematik ist (zu Recht) weitestgehend konstruktiver, also algorithmischer Natur. Nichtkonstruktive Inhalte kamen in der Mathematik erst mit dem von E. Zermelo formulierten *Auswahlaxiom* ins Spiel (vgl. Abschnitt 3.3). Das Auswahlaxiom wird aber erst im Zusammenhang mit hochgradig abstrakten Themen der modernen Mathematik relevant, so dass es im Mathematikunterricht der Schule nur extrem selten vorkommt – und wenn, dann bestenfalls in der gymnasialen Oberstufe.

## 1.3 Zur Methodologie des algorithmischen Arbeitens

Auf der *Metaebene* ist die Algorithmik eng mit philosophischen Fragen und Fragen der allgemeinen Methodologie verknüpft. Die philosophischen Fragen werden ausführlicher in Kapitel 7 behandelt. Hier seien zunächst die methodologischen Aspekte angesprochen.

Die algorithmische Vorgehensweise stellt, insbesondere bei Verwendung des Computers als modernem Werkzeug zur Abarbeitung von Algorithmen, ein wertvolles Hilfsmittel dar, um klassische methodologische Ziele zu verfolgen; vgl. Ziegenbalg 1984, 1988 und 2000.

Hierzu gehören vorrangig (vgl. auch Polya 1945):

- Das *experimentelle* und *beispielgebundene* Arbeiten: Vor jeder abstrakten mathematischen Theorie steht in der Regel das spielerische Experimentieren mit Beispielen aus dem Bereich der Zahlen oder anderer mathematischer Objekte. Das Aufstellen und Verifizieren von Hypothesen setzt im Allgemeinen ein solides Studium der dem Problem zugrunde liegenden *Daten* voraus. Solche Experimente sollte man zunächst „von Hand“ ausführen. Bei etwas komplexerer Sachlage wird aber sehr bald der (mit geeigneter Software ausgestattete) Computer ein unverzichtbares Werkzeug zum Experimentieren.
- Anwendung *operativer* Vorgehensweisen<sup>1</sup>: Die Anwendung des operativen Prinzips bedeutet eine Vorgehensweise entsprechend der Grundfrage

„... was passiert, wenn ...“

Operatives Vorgehen ist fundamental für jede forschende und entdeckende Tätigkeit in Mathematik und Naturwissenschaften; auch das systematische Variieren von Parametern und Einflussfaktoren gehört zu einer operativen Vorgehensweise. Am Beispiel der Computersimulationen wird die Bedeutung der operativen Vorgehensweise besonders deutlich. Erich Wittmann (1981), Hans Schupp (2002) und Horst Hischer (2015) haben sich in ihrer wissenschaftlichen Arbeit intensiv mit dem operativen Prinzip beschäftigt – die beiden letztgenannten sprechen in diesem Zusammenhang vom „Prinzip der Variation“.

- *Konstruktive* Vorgehensweisen und Begriffsbildungen: Jeder Algorithmus ist eine „Konstruktionsvorschrift“ zur Lösung eines bestimmten Problems. Algorithmisch zu arbeiten heißt, sich den jeweiligen Lern- und Forschungsgegenstand handelnd zu erschließen; algorithmisches Arbeiten kommt in ganz natürlicher Weise der Forderung nach Eigentätigkeit und aktiver Eigengestaltung des Lernprozesses entgegen.
- *Elementarisierung*: Algorithmisch vorzugehen heißt, sich die Lösung eines Problems schrittweise aus Elementarbausteinen aufzubauen. Der Begriff des Elementaren ist tief mit dem des Algorithmus verbunden. Algorithmische Lö-

---

<sup>1</sup> zum Begriff des *operativen Prinzips* siehe: E. Wittmann, 1981

sungen vermeiden oft technisch und begrifflich aufwendige Methoden der formel-orientierten Mathematik zugunsten wesentlich elementarerer iterativer bzw. rekursiver Vorgehensweisen.

Hierzu eine **erste Fallstudie** (*Formel versus Algorithmus* – Beispiel 1):

Traditionell erwartete man in der Mathematik der vergangenen Jahrhunderte als idealtypische Lösung eines Problems die Angabe einer „Lösungsformel“. So galt z.B. das Problem der Berechnung der Fibonacci'schen Zahlen<sup>1</sup> (zur Definition der Fibonacci-Zahlen: siehe Abschnitt 4.2.2) aus dem Jahre 1204 so lange als ungelöst, bis Binet<sup>2</sup> im Jahre 1843 seine heute nach ihm benannte Formellösung präsentierte:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

So interessant diese Formel an sich auch sein mag (sie war im Wesentlichen auch bereits de Moivre<sup>3</sup> bekannt); heute wäre es hochgradig unvernünftig, die Fibonacci Zahlen mit dieser Formel zu berechnen. Ein einfacher, iterativer, auf der ursprünglichen rekursiven Beschreibung der Fibonacci Zahlen beruhender Algorithmus (vgl. dazu auch Abschnitt 5.1) ist z.B. in Verbindung mit einem Computeralgebrasystem sehr viel besser zur Berechnung der Fibonacci Zahlen geeignet. Eine umgangssprachliche informelle Fassung eines solchen Algorithmus zur Berechnung der  $n$ -ten Fibonacci-Zahl lautet etwa folgendermaßen:

1. Starte mit den Fibonacci-Zahlen  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$   
und weise dem Zähler  $i$  den Wert 1 zu.
2. Solange der Zähler  $i$  den Wert  $n$  noch nicht erreicht hat,  
tue folgendes:
  - Berechne die Summe  $F_i$  der beiden zuletzt  
berechneten Zahlen  $F_{i-1}$  und  $F_{i-2}$ .
  - Erhöhe den Zähler  $i$  um 1.
3. Die letzte so berechnete Zahl ist die gesuchte Fibonacci-Zahl.

---

<sup>1</sup> Leonardo von Pisa, „Fibonacci“ (ca. 1170–1240) in seinem epochemachenden Buch *Liber Abaci* (1202)

<sup>2</sup> Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom

<sup>3</sup> Abraham de Moivre (1667–1754), französischer Mathematiker

Man beachte: Die „schwierigste“ mathematische Operation in diesem Verfahren ist, die Summe zweier natürlicher Zahlen zu bilden; man vergleiche dies mit den kognitiven Voraussetzungen für den Umgang mit der Formel von Binet. In ähnlicher Weise ist es heute sinnvoll, auch für andere Probleme algorithmische Beschreibungen als Lösung zu akzeptieren, denn viele komplexe Probleme der realen Welt sind gar nicht durch (geschlossene) Formeln lösbar oder solche Lösungen werden sehr schnell maßlos kompliziert und nicht mehr gut beherrschbar.

Besonders die Methode der Computersimulation (vgl. Abschnitt 4.5) macht heute hochgradig effiziente, elementare und in der Regel auch hinreichend genaue Problemlösungen möglich und praktikabel. Mit Computersimulationen lassen sich oft sehr brauchbare Lösungen erzielen – häufig auf der Basis extrem elementarer Zähl-Strategien.

• *Beziehungshaltigkeit* bedeutet das Herstellen eines Beziehungsnetzes sowohl fachintern als auch fächerübergreifend. Algorithmisches Arbeiten kann sehr unterschiedliche Wissensfelder miteinander verbinden. So verbindet z.B. der Euklidische Algorithmus Algebra und Geometrie. Die Fraktal-Algorithmen verbinden Analysis und Geometrie. Ähnliche Verbindungen gibt es auch über das Fach Mathematik hinaus. Einige Beispiele:

- Algorithmen sind in den *Technik-, Ingenieur- und Naturwissenschaften* durch Diskretisierung sowie durch die Anwendung iterativer Verfahren und Simulationsverfahren von Bedeutung.
- Algorithmen spielen in den *Sprachwissenschaften* eine Rolle, z.B. in der Form von Transformationsgrammatiken oder generativen Grammatiken (vgl. Chomsky 1957).
- Im Bereich der *Kunst* treten Algorithmen z.B. in der seriellen Kunst, der Aleatorik, oder in der Form rekursiver und fraktaler Themen und Arbeitstechniken auf (vgl. Rödiger 2003, Könches / Weibel 2005).
- Algorithmen spielen in den *Sozialwissenschaften* eine Rolle z.B. im Zusammenhang mit dem d'Hondtschen (und anderen) Verfahren zur Ermittlung der Sitzverteilung in Parlamenten (vgl. Stellfeldt 2006).
- In der (schriftlich tradierten) *Kultur-, Rechts- und Wissenschaftsgeschichte* der Menschheit spielen Algorithmen als gesetzliche Vorschriften und Handlungsanweisungen aller Art eine wichtige Rolle. Eines der frühesten dokumentierten Beispiele dafür ist der Codex Hammurapi aus

der Zeit um etwa 1800 v. Chr. In ihm werden, auch wenn sie nach unserem heutigen Rechtsverständnis sehr fremd wirken, gesetzliche Verfahrensformen, Bedingungen und Regeln formuliert, die ganz klar algorithmischer Natur sind. Ein Zitat (Gesetz 2 – sinngemäß):

Wenn jemand einen Mann der Zauberei beschuldigt und der Angeklagte zum Fluss geht und in den Fluss springt, und wenn er dann untergeht, so soll der Ankläger sein Haus in Besitz nehmen. Aber wenn der Fluss beweist, dass der Angeklagte unschuldig ist und wenn dieser unverletzt entkommt, dann werde der Ankläger zum Tode verurteilt, während derjenige, der in den Fluss gesprungen ist, vom Hause des Anklägers Besitz ergreifen soll.



Abbildung 1.2  
Codex Hammurapi  
(Oberteil der Stele)

- Algorithmen spielen natürlich in der *Informatik* eine zentrale Rolle. Nach Ansicht mancher Informatiker (und besonders solcher, die diese Wissenschaft in ihrer Entstehungsphase geprägt haben) ist die Informatik geradezu die Wissenschaft von den Algorithmen. Da die Algorithmik seit jeher ein Kerngebiet der Mathematik ist, liegt sie somit im Zentrum des Bereichs, wo sich Mathematik und Informatik überschneiden und gegenseitig befruchten.
- In der *Philosophie* und insbesondere der *Wissenschaftstheorie* ist die Algorithmik ein zentrales Thema im Zusammenhang mit der Untersuchung der Grenzen der Berechenbarkeit, also der eigentlichen, unumstößlichen *Grenzen des Computers*. Im Hintergrund dieser Untersuchungen steht die in der Geschichte der Menschheit immer wieder gestellte Frage "Was können Maschinen (was können Computer) und was können sie nicht?"



Die algorithmische Methode ist ein Band, das viele Fächer und Wissensbereiche miteinander verbindet. Algorithmische Verfahren (wie z.B. Suchstrategien, Klassifizierungsschemata und vieles mehr), die der Lernende in *einem* Bereich kennengelernt hat, lassen sich oft sehr gut in *andere* Bereiche übertragen. Seiner Bedeutung entsprechend ist es nur angemessen, wenn das Thema *Algorithmik* als Grundlagenveranstaltung an zentraler Stelle in den Studienplänen der Fächer Mathematik und Informatik verankert ist. Dies gilt aus den oben angeführten Gründen in ganz besonderem Maße für das Lehramtsstudium.

### **Algorithmisches Problemlösen / algorithmische Begriffsbildung**

Schließlich sei an dieser Stelle noch auf einen weiteren entscheidenden Vorteil des algorithmischen Problemlösens hingewiesen: seine hervorragende *Skalierbarkeit*. Es ist auf allen Ebenen anwendbar – von der fast voraussetzungsfreien Beschäftigung mit zunächst sehr einfachen Beispielen bis hin zu den raffinierten Techniken, wie sie z.B. in modernen Computeralgebrasystemen umgesetzt sind. In der Übersicht („Heuristischer Zyklus“) sind die wichtigsten Stufen von Problemlöseprozessen in idealtypischer Weise zusammengestellt (man vergleiche hierzu z.B. auch Polya, 1945).

Es ist offensichtlich, dass das algorithmische, computerunterstützte Problemlösen bestens geeignet ist, diesen heuristischen Zyklus zu unterstützen. Dies beginnt schon in der empirischen Phase. Erste Beispiele sollten in der Regel „mit Papier und Bleistift“ erarbeitet werden. Aber auf diese Weise ist nur die Betrachtung sehr einfacher Fälle in „Spielzeug-Welten“ möglich. Erst der Einsatz des Computers macht es möglich, auch komplexe, typische Fälle der realen Welt zu betrachten und zur Hypothesenbildung heranzuziehen. In Abschnitt 4.5 (Probabilistische Verfahren, Modellbildung und Simulation) finden sich Konkretisierungen dieses „heuristischen Zyklus“.

Über die bereits sehr effiziente Nutzung einfachster Programme auf der Basis elementarer algorithmischer Grundbefehle hinaus bieten die modernen Computeralgebrasysteme exzellente Unterstützungsmöglichkeiten auf praktisch allen Ebenen des mathematischen Arbeitens.

### Heuristischer Zyklus

1. *Ausgangssituation*: Gegeben ist ein Problem, eine zunächst unübersichtliche, undurchsichtige Situation.
2. *Empirische Phase, erste Bestandsaufnahme*: Durch Betrachten zunächst einfacher und danach unter Umständen komplexerer typischer Beispiele verschafft man sich einen ersten Überblick über die Situation.
3. *Präzisierung und Hypothesenbildung*: Die Behandlung hinreichend vieler gut variiertes, typischer Beispiele führt zur Ausdifferenzierung und Präzisierung der Fragestellung (oft auch in Verbindung mit der Entwicklung einschlägiger Begriffe und Terminologien) und zu ersten konkreten Vermutungen, die dann durch die Analyse weiterer Beispiele erhärtet oder falsifiziert werden.
4. *Formalisierung*: Die so erzielte höhere Vertrautheit mit der Situation ermöglicht die Entwicklung von Theorien, von mathematischen oder anderen Modellen und von formalen Beschreibungen, z.B. durch Algorithmen, durch Gleichungen bzw. Gleichungssysteme, durch Graphen, Diagramme und Ähnliches mehr.
5. *Lösung*: Auf der Basis der formalen Beschreibungen werden (oft unter Einsatz mathematischer Standardverfahren) erste Lösungen für das ursprüngliche Problem erarbeitet.
6. *Festigung, Plausibilitätsbetrachtungen* („Proben“): Ausdehnung dieser ersten Lösungen auch auf Rand- und Sonderfälle führt zu einer Stabilisierung des Modells.
7. *Modifikation, Verallgemeinerung*: Diese Stabilisierung führt dann sehr oft zu Fragen der Verallgemeinerung oder zu sonstigen Modifizierungen der ursprünglichen Situation; man ist damit wieder auf einer neuen ersten Stufe des Problemlöseprozesses angelangt und der „heuristische Zyklus“ kann beginnen, sich ein weiteres Mal zu drehen.

In einer **zweiten Fallstudie** (*Formel versus Algorithmus* – Beispiel 2) soll nun gezeigt werden, dass und wie das algorithmische Arbeiten neben der Elementarisierung auch dem Ziel der *Begriffsbildung* dienen kann. Dies sei im Fol-

genden am Beispiel des Begriffs des *effektiven Zinssatzes von Ratenkrediten* skizziert.

Bei einem *Ratenkredit* leiht ein Kreditgeber einem Kreditnehmer einen bestimmten Geldbetrag unter der Bedingung, dass ihm der Kreditnehmer eine feste Anzahl von Zahlungen in gleicher Höhe und in gleichbleibenden Zeitabständen zurückzahlt. Daraus ergibt sich in natürlicher Weise die Frage, welches der „richtige“ Zinssatz ist, der diesem Geldfluss (unter Verzinsungsaspekten) entspricht. Der folgende Algorithmus gibt den Geldfluss eines Ratenkredits (mit der Kredithöhe  $K$ , der Rate  $r$  und der Laufzeit  $L$ ) wieder:

```
Geldfluss_Ratenkredit(K, r, L) :=
  Wiederhole L mal:
    Ueberweise die Rate r an den Kreditgeber.
```

Der deutsche Gesetzgeber nennt den gesuchten Zinssatz den *effektiven Zinssatz* und hat seine Berechnung in seiner Preisangabenverordnung (PAngV) explizit geregelt. Bis zum Jahre 1981 galt die sogenannte *Uniformmethode*, bei der Zinseszinsaspekte jedoch unberücksichtigt blieben und die somit keine akzeptablen Werte lieferte.

In der Preisangabenverordnung von 1981 formulierte dann der Gesetzgeber (sinngemäß):

Es seien  $K$  die Höhe des Kredits,  $r$  die monatliche Rate,  $J$  die Anzahl der vollen Laufzeitjahre,  $m$  die Zahl der Restmonate,  $i$  eine formale Variable und  $q := 1 + i$ . Man suche eine Lösung  $i$  der Gleichung

$$\left( K \cdot q^J - r \cdot \left( \frac{11}{2} + \frac{12}{i} \right) \cdot (q^J - 1) \right) \cdot \left( 1 + \frac{m}{12} \cdot i \right) - r \cdot m \cdot \left( 1 + \frac{m-1}{24} \cdot i \right) = 0 \quad (\text{P})$$

Dann ist  $e := 100 \cdot i$  der *effektive Zinssatz* des Ratenkredits.

Die Formel (P) ist nicht nur sehr kompliziert und schwer zu verstehen; sie lässt sich auch nicht (außer in trivialen Fällen) nach der gesuchten Größe auflösen. Und sie ist schließlich, auch von der Sachsituation her gesehen, kein wirklich guter Kandidat für den effektiven Zinssatz (obwohl sie natürlich eine Verbesserung im Vergleich zur Uniformmethode darstellt).

Eine weniger formel-fixierte, algorithmische Denkweise legt dagegen die folgende Definition und Berechnung des effektiven Zinssatzes nahe:

1. *Vorbetrachtung*: Eine andere gebräuchliche Kreditform ist der Annuitätentilgungskredit. Er basiert (bei monatlicher Ratenzahlung) auf den Aus-

gangsparametern  $K$  (Kredithöhe),  $p$  (Monats-Zinssatz) und  $r$  (Rückzahlungsbetrag, auch als *Rate* oder *Annuität* bezeichnet). Beim Annuitätentilgungskredit werden die angefallenen Zinsen stets auf der Basis der aktuellen Höhe der Restschuld, des verstrichenen Zinszeitraums und des vereinbarten Zinssatzes berechnet. Nach jeder Ratenzahlung wird die Höhe der Restschuld sofort aktualisiert.

Der Geldfluss des Annuitätendarlehens wird durch den folgenden Algorithmus beschrieben:

```
Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p) :=
  Solange die Restschuld groesser als 0 ist, tue folgendes:
    [Ueberweise die Annuitaet (Rate) r an den Kreditgeber.
     Berechne die neue Restschuld wie folgt
       Restschuld(neu) = Restschuld(alt) + Zinsen - Rate.
     Ersetze die alte Restschuld durch die neue Restschuld.]
```

Unbekannt ist beim Annuitätentilgungskredit zunächst die Anzahl der Zahlungen, die nötig sind, bis der gesamte Kredit (nebst zwischenzeitlich angefallener Zinsen) getilgt ist. Mit anderen Worten: Die Laufzeit des Kredits ist unbekannt.

*Aufgabe* (für Leser mit entsprechenden Vorkenntnissen): Setzen Sie den Algorithmus `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` in ein lauffähiges Computerprogramm um. Oder erstellen Sie ggf. ein Tabellenkalkulationsblatt, um dieses Ziel zu verfolgen.

2. *Verlagerung der Sichtweise*: Man vergesse nun, dass der ursprünglich gegebene Kredit ein Ratenkredit war und stelle sich vor, es sei ein Annuitätentilgungskredit. Von ihm sind die Parameter  $K$  (Kredithöhe),  $r$  (Annuität) und die Laufzeit (= Anzahl der Ratenzahlungen) bekannt. Unbekannt ist jedoch der Zinssatz  $p$ .
3. *Lösungsstrategie*: Man formuliere einen kleinen Suchalgorithmus (ein Standard-Halbierungsverfahren reicht z.B. völlig aus), der in Verbindung mit dem obigen Programm `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` durch systematisches Variieren der Werte von  $p$  (unter Beibehaltung der Werte aller anderer Parameter) denjenigen Zinssatz  $p$  ermittelt, für den die Laufzeit des (simulierten) Annuitätentilgungskredits mit der des ursprünglich gegebenen Ratenkredits übereinstimmt. *Dies ist, mit anderen Worten, derjenige Zinssatz, bei dem der Geldfluss des Annuitätentilgungskredits genau mit dem Geldfluss des Ratenkredits übereinstimmt.*

Der so gefundene Zinssatz  $p$  ist der natürliche Kandidat für den effektiven Zinssatz des Ratenkredits.

Das hier skizzierte alternative Verfahren ist an Elementarität kaum zu übertreffen. Man kommt in mathematischer Hinsicht völlig mit den Grundrechenarten und etwas Basislogik aus. Dem Leser mit etwas Programmiererfahrung sei empfohlen, das skizzierte Suchverfahren in ein Programm umzusetzen.

Das Beispiel zeigt weiterhin: Die algorithmische Denkweise ist nicht nur geeignet, um vorgegebene Probleme zu lösen; sie kann auch im Prozess der *Begriffsbildung* eine wichtige Rolle spielen. Die Gleichung (P) haben nur sehr wenige Experten verstanden; das algorithmische Verfahren verwendet dagegen keine kognitiven Voraussetzungen, die über Mittelstufenkenntnisse hinausgehen. Das algorithmische Verfahren ist also wesentlich besser verstehbar, berechnungstechnisch effizienter und es liefert auch von der Sache her angemessenere Werte für den effektiven Zinssatz als das auf der Formel (P) beruhende Verfahren. Es ist schlichtweg die bessere Fassung für den Begriff des effektiven Zinssatzes.

Inzwischen hat sich übrigens auch der Gesetzgeber davon überzeugen lassen, dass eine auf den Prinzipien dieser algorithmischen Beschreibung beruhende Vorgehensweise das bessere Verfahren zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes ist.

Abschließend noch eine Bemerkung zu dem bisher nicht weiter erläuterten Begriffspaar Algorithmen / Algorithmik: In dieser Beziehung ist der Begriff der Algorithmik der umfassendere, denn neben der rein inhaltlichen Seite, eben den Algorithmen (auf der Objektebene), umfasst er (auf der Metaebene) alles, was das Arbeiten mit Algorithmen betrifft, also insbesondere auch die *Methode* des algorithmischen Arbeitens. Dazu gehören: das algorithmische Problemlösen, die algorithmische Konzeptualisierung, das algorithmische Denken, und wie wir in Kapitel 3 (Abschnitt 3.3) sehen werden, auch das algorithmische Definieren und Beweisen. Der Begriff der Algorithmik signalisiert, dass es beim algorithmischen Arbeiten um eine bestimmte methodologische und philosophische Grundeinstellung geht, die in einem engen Zusammenhang mit der konstruktivistischen Seite der Mathematik steht.