Das Folgende ist ein Zitat aus dem Buch

Algorithmen
von Hammurapi bis Gödel

Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum
Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016

1.3 Zur Methodologie des algorithmischen Arbeitens

…

Elementarisierung: Fallstudie zum Thema „Ratenkredit / effektiver Zinssatz / Annuitätentilgung“

In einer **zweiten Fallstudie** (*Formel versus Algorithmus* – Beispiel 2) soll nun gezeigt werden, dass und wie das algorithmische Arbeiten neben der Elementarisierung auch dem Ziel der *Begriffsbildung* dienen kann. Dies sei im Folgenden am Beispiel des Begriffs des *effektiven Zinssatzes von Ratenkrediten* skizziert.

Bei einem *Ratenkredit* leiht ein Kreditgeber einem Kreditnehmer einen bestimmten Geldbetrag unter der Bedingung, dass ihm der Kreditnehmer eine feste Anzahl von Zahlungen in gleicher Höhe und in gleichbleibenden Zeitabständen zurückzahlt. Daraus ergibt sich in natürlicher Weise die Frage, welches der „richtige“ Zinssatz ist, der diesem Geldfluss (unter Verzinsungsaspekten) entspricht. Der folgende Algorithmus gibt den Geldfluss eines Ratenkredits (mit der Kredithöhe K, der Rate r und der Laufzeit L) wieder:

```
Geldfluss_Ratenkredit(K, r, L) :=
  Wiederhole L mal:
    Ueberweise die Rate r an den Kreditgeber.
```

Der deutsche Gesetzgeber nennt den gesuchten Zinssatz den *effektiven Zinssatz* und hat seine Berechnung in seiner Preisangabenverordnung (PAngV) explizit geregelt. Bis zum Jahre 1981 galt die sogenannte *Uniformmethode*, bei der Zinseszinsaspekte jedoch unberücksichtigt blieben und die somit keine akzeptablen Werte lieferte.

In der Preisangabenverordnung von 1981 formulierte dann der Gesetzgeber (sinngemäß):

Es seien K die Höhe des Kredits, r die monatliche Rate, J die Anzahl der vollen Laufzeitjahre, m die Zahl der Restmonate, i eine formale Variable und $q := 1 + i$. Man suche eine Lösung i der Gleichung

$$\left(K \cdot q^J - r \cdot (\frac{11}{2} + \frac{12}{i}) \cdot (q^J - 1)\right) \cdot (1 + \frac{m}{12} \cdot i) - r \cdot m \cdot (1 + \frac{m-1}{24} \cdot i) = 0 \quad \text{(P)}$$

Dann ist $e := 100 \cdot i$ der *effektive Zinssatz* des Ratenkredits.

Die Formel (P) ist nicht nur sehr kompliziert und schwer zu verstehen; sie lässt sich auch nicht (außer in trivialen Fällen) nach der gesuchten Größe auflösen. Und sie ist schließlich, auch von der Sachsituation her gesehen, kein wirklich guter Kandidat für den effektiven Zinssatz (obwohl sie natürlich eine Verbesserung im Vergleich zur Uniformmethode darstellt).

Eine weniger formel-fixierte, algorithmische Denkweise legt dagegen die folgende Definition und Berechnung des effektiven Zinssatzes nahe:

1. *Vorbetrachtung*: Eine andere gebräuchliche Kreditform ist der Annuitätentilgungskredit. Er basiert (bei monatlicher Ratenzahlung) auf den Ausgangsparametern K (Kredithöhe), p (Monats-Zinssatz) und r (Rückzahlungsbetrag, auch als *Rate* oder *Annuität* bezeichnet). Beim Annuitätentilgungskredit werden die angefallenen Zinsen stets auf der Basis der aktuellen Höhe der Restschuld, des verstrichenen Zinszeitraums und des vereinbarten Zinssatzes berechnet. Nach jeder Ratenzahlung wird die Höhe der Restschuld sofort aktualisiert.

   Der Geldfluss des Annuitätendarlehens wird durch den folgenden Algorithmus beschrieben:

```
Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p) :=
  Solange die Restschuld groesser als 0 ist, tue folgendes:
    [Ueberweise die Annuitaet (Rate) r an den Kreditgeber.
     Berechne die neue Restschuld wie folgt
       Restschuld(neu) = Restschuld(alt) + Zinsen – Rate.
     Ersetze die alte Restschuld durch die neue Restschuld.]
```

   Unbekannt ist beim Annuitätentilgungskredit zunächst die Anzahl der Zahlungen, die nötig sind, bis der gesamte Kredit (nebst zwischenzeitlich angefallener Zinsen) getilgt ist. Mit anderen Worten: Die Laufzeit des Kredits ist unbekannt.

   Aufgabe (für Leser mit entsprechenden Vorkenntnissen): Setzen Sie den Algorithmus `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` in ein lauffähiges Computerprogramm um. Oder erstellen Sie ggf. ein Tabellenkalkulationsblatt, um dieses Ziel zu verfolgen.

2. *Verlagerung der Sichtweise*: Man vergesse nun, dass der ursprünglich gegebene Kredit ein Ratenkredit war und stelle sich vor, es sei ein Annuitätentilgungskredit. Von ihm sind die Parameter K (Kredithöhe), r (Annuität) und die Laufzeit (= Anzahl der Ratenzahlungen) bekannt. Unbekannt ist jedoch der Zinssatz p.
3. *Lösungsstrategie*: Man formuliere einen kleinen Suchalgorithmus (ein Standard-Halbierungsverfahren reicht z.B. völlig aus), der in Verbindung mit dem obigen Programm `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` durch systematisches Variieren der Werte von p (unter Beibehaltung der Werte aller anderer Parameter) denjenigen Zinssatz p ermittelt, für den die Laufzeit des (simulierten) Annuitätentilgungskredits mit der des ursprünglich gegebenen Ratenkredits übereinstimmt. *Dies ist, mit anderen Worten, derjenige Zinssatz, bei dem der Geldfluss des Annuitätentilgungskredits genau mit dem Geldfluss des Ratenkredits übereinstimmt.*

   Der so gefundene Zinssatz p ist der natürliche Kandidat für den effektiven Zinssatz des Ratenkredits.

Das hier skizzierte alternative Verfahren ist an Elementarität kaum zu übertreffen. Man kommt in mathematischer Hinsicht völlig mit den Grundrechenarten und etwas Basislogik aus. Dem Leser mit etwas Programmiererfahrung sei empfohlen, das skizzierte Suchverfahren in ein Programm umzusetzen.

Das Beispiel zeigt weiterhin: Die algorithmische Denkweise ist nicht nur geeignet, um vorgegebene Probleme zu lösen; sie kann auch im Prozess der Begriffsbildung eine wichtige Rolle spielen. Die Gleichung (P) haben nur sehr wenige Experten verstanden; das algorithmische Verfahren verwendet dagegen keine kognitiven Voraussetzungen, die über Mittelstufenkenntnisse hinausgehen. Das algorithmische Verfahren ist also wesentlich besser verstehbar, berechnungstechnisch effizienter und es liefert auch von der Sache her angemessenere Werte für den effektiven Zinssatz als das auf der Formel (P) beruhende Verfahren. Es ist schlichtweg die bessere Fassung für den Begriff des effektiven Zinssatzes.

Inzwischen hat sich übrigens auch der Gesetzgeber davon überzeugen lassen, dass eine auf den Prinzipien dieser algorithmischen Beschreibung beruhende Vorgehensweise das bessere Verfahren zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes ist.