Komplexe Zahlen

Ein Manuskript für die Arbeitsgemeinschaft *Diskrete Mathematik*
Heinrich Hertz Gymnasium, Berlin

Fragen, Korrekturen, Anregungen und Hinweise aller Art bitte an
Jochen Ziegenbalg *Email*: ziegenbalg.edu@gmail.com

1 Motivation

Die Konstruktion komplexer Zahlen ist Teil des Themas *Zahlbereichserweiterungen.* Dabei geht man in der Regel von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ und den in ihr gegebenen Operationen der Addition und Multiplikation aus. Die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen entsteht u.a. dadurch, dass man versucht, gewisse Gleichungen zu lösen, die in den bisherigen Zahlbereichen nicht lösbar sind.

Der Prozess der Zahlbereichserweiterungen

- von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen
- von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen
- von den rationalen Zahlen zu den algebraischen Zahlen
- von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen
- von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen

ist in dem Manuskript „*Zahlbereichserweiterungen*“, auf das wir uns im folgenden beziehen, in grösserer Ausführlichkeit dargestellt.

2 Die komplexen Zahlen

Die Standardbezeichnung für die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \ / \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Unter etwas anderem Blickwinkel lässt sich die Menge der komplexen Zahlen aber auch als zweidimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen mit den Basisvektoren $1 = \overrightarrow{(1,0)}$ und $i = \overrightarrow{(0,1)}$ deuten. Wenn dieser Vektorraum-Charakter der komplexen Zahlen besonders betont werden soll, wird die komplexe Zahl $a + i \cdot b$ gelegentlich auch als Zahlenpaar (a, b) geschrieben. Die Komponenten a und b der komplexen Zahl $a + i \cdot b$ bzw. (a, b) werden als *Realteil* und *Imaginärteil* bezeichnet (und oft wie folgt durch Frakturschrift gekennzeichnet):

$$\Re(a + ib) = a \qquad \Im(a + ib) = b$$

Man beachte: Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist eine reelle Zahl.

Der Ursprung der Theorie der komplexen Zahlen geht auf Arbeiten der italienischen Mathematiker *Gerolamo Cardano* (Ars magna, Nürnberg 1545) und *Rafael Bombelli* (L'Algebra, Bologna 1572) zurück. Die Einführung der Bezeichnung i für die imaginäre Einheit wird *Leonhard Euler* (1707-1783) zugeschrieben.

Besonders in der Entstehungszeit war das Rechnen mit den neuen „imaginären“ Zahlen sehr fremd und gewöhnungsbedürftig. Was sollte man sich unter diesen neuen Zahlen vorstellen? Wo „lagen“ diese neuen Zahlen im Vergleich zu den reellen Zahlen auf der Zahlengeraden? Gab es diese Zahlen „wirklich“ oder tauchten sie nur in Zwischenrechnungen als Hilfsgrössen auf, die in den Endergebnissen dann keine Rolle mehr spielten (oder spielen durften)? Die Unsicherheit, ja sogar Verwirrung, wurde auch noch dadurch beflügelt, dass man im Laufe der Zeit entdeckte, dass gewisse von den reellen Zahlen her bekannte Rechengesetze für das Rechnen mit diesen „imaginären“ Grössen nicht mehr gelten. So ist z.B. $\sqrt{(-1) \cdot (-1)}$ nicht gleich $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$. Das „Wurzelgesetz“ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

gilt nur für positive (genauer: nicht-negative) reelle Werte von a und b; für negative Werte gilt es nicht. Die Annahme, dass dieses Wurzelgesetz für negative reelle (bzw. alle komplexen) Zahlen gelte, führte in der Anfangsphase der Beschäftigung mit den neuen „imaginären“ Zahlen zu widersprüchlichen Rechnungen wie z.B.

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1))} = \sqrt{1} = 1$$

Es verwundert daher nicht, dass auch die Bezeichnungen für die komplexen Zahlen in der Anfangsphase ihrer Entdeckung diese Unsicherheiten widerspiegelten. Sie wurden u.a. auch als „falsche“, „sophistische“, „imaginäre“, „eingebildete“ Grössen bezeichnet (*imaginär* bzw. *eingebildet* im Sinne von *irreal*, *virtuell*, *unwirklich*, *nur in unserer Vorstellung, nicht aber in der Realität existierend*). Die Bezeichnung *komplexe Zahl* wurde 1831 von C.F. Gauss (1777-1855) in seiner Schrift *Theoria residuorum biquadraticorum* eingeführt.

3 Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Eine Grund-Strategie für die Einführung neuer Operationen bei den diversen Zahlbereichserweiterungen ist, dass unter Beachtung des Hankelschen *Permanenzprinzips* immer wieder versucht wird, auf bereits Bekanntes zurückzugreifen. Einige der Prinzipien, nach denen das geschieht, sind: *komponentenweise* Durchführung der (bekannten) Operationen, Durchführung der neuen Operationen unter Verwendung geeigneter *Repräsentanten* oder auch der Wunsch nach Realisierung gewisser Grundgesetze, wie z.B. Realisierung des *Distributivgesetzes.* Letzteres spielt besonders bei der Definition der Multiplikation komplexer Zahlen eine wichtige Rolle.

Im folgenden seien $c_1 := a_1 + i \cdot b_1$ und $c_2 := a_2 + i \cdot b_2$ beliebige komplexe Zahlen.

3.1 Die Addition komplexer Zahlen

Grundprinzip: komponentenweise Addition
Hierbei liegt die Vorstellung zugrunde, dass die Menge der komplexen Zahlen als zweidimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen durch die Basisvektoren $1 = \overrightarrow{(1,0)}$ und $i = \overrightarrow{(0,1)}$ aufgespannt wird. Man definiert also

$$c_1 + c_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) := (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b2)$$

In der „Vektor“-Schreibweise:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Die so eingeführte Addition komplexer Zahlen ist offensichtlich kommutativ (Zurückspielen auf die Komponenten). Die geometrische Deutung der Addition komplexer Zahlen ist im entsprechenden Abschnitt weiter unten beschrieben.

3.2 Die Subtraktion komplexer Zahlen

Das additiv neutrale Element (Nullelement) der komplexen Zahlen, also die Zahl $0 + i \cdot 0$ wird i.a. kurz als 0 geschrieben. Das additiv Inverse zu $a + i \cdot b$ ist $-a + i \cdot (-b)$. Die Subtraktion komplexer Zahlen wird definiert als Addition des additiv inversen Elements:

$$(a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) := (a_1 + i \cdot b_1) + (-a_2 + i \cdot (-b_2)) = (a_1 - a_2) + i \ \cdot (b_1 - b_2)$$

3.3 Die Multiplikation komplexer Zahlen

Die Definition der Multiplikation komplexer Zahlen ist von dem Wunsch geprägt, dem Distributivgesetz zur Geltung zu verhelfen:

$$(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$$

Die so definierte Multiplikation komplexer Zahlen ist offensichtlich kommutativ. Das multiplikativ neutrale Element („Einselement“) ist die Zahl $1 + i \cdot 0$ (in der Vektordarstellung: $(1, 0)$).

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen wird gelegentlich, wie auch sonst üblich, der Multiplikationspunkt weggelassen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Für die geometrische Deutung der Multiplikation wird sich die Darstellung komplexer Zahlen in der „Polarform“ als sehr nützlich erweisen; sie ist im entsprechenden Abschnitt weiter unten beschrieben.

3.4 Die Konjugation komplexer Zahlen

Die komplexe Zahl $\bar{c} = \overline{a + ib} := a - ib$ wird als zu $c = a + ib$ gehörende *konjugiert komplexe Zahl* bezeichnet. Es gilt stets:

$$c \cdot \bar{c} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

$c \cdot \bar{c}$ ist also insbesondere stets eine nicht-negative reelle Zahl (die nur dann gleich Null ist, wenn c selbst gleich Null ist).

3.5 Die Division komplexer Zahlen

Die komplexe Zahl $c = a + ib$ hat (wenn sie von Null verschieden ist) stets ein multiplikativ inverses Element, nämlich

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{a^2 + b^2}$$

Die Division komplexer Zahlen wird definiert als Multiplikation mit dem (multiplikativ) inversen Element:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} := (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)^{-1} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

3.6 Die algebraische Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen besitzen (wie die rationalen, algebraischen oder reellen Zahlen) aus algebraischer Sicht die Struktur eines (kommutativen) Körpers. Im Gegensatz zur Situation in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist der Körper $\mathbb{C}$ aber algebraisch abgeschlossen (*Fundamentalsatz der Algebra*). Das heisst, dass jedes (nicht-konstante) Polynom

$$p(x) := \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

vom Grade n über $\mathbb{C}$ stets (mindestens) eine komplexe Nullstelle („Wurzel“) ω_1 besitzt. Daraus folgt, dass das Polynom $p(x)$ von dem linearen Polynom $(x - \omega_1)$ geteilt wird und somit (per Induktion) insgesamt n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n$ hat und entsprechend in Linearfaktoren zerfällt:

$$p(x) = (x - \omega_1) \cdot (x - \omega_2) \cdot (x - \omega_3) \cdot \ldots \cdot (x - \omega_{n-1}) \cdot (x - \omega_n)$$

4 Die komplexe Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion

Diese Funktionen lassen sich (analog zur Situation im Reellen) für komplexe Argumente wie folgt definieren:

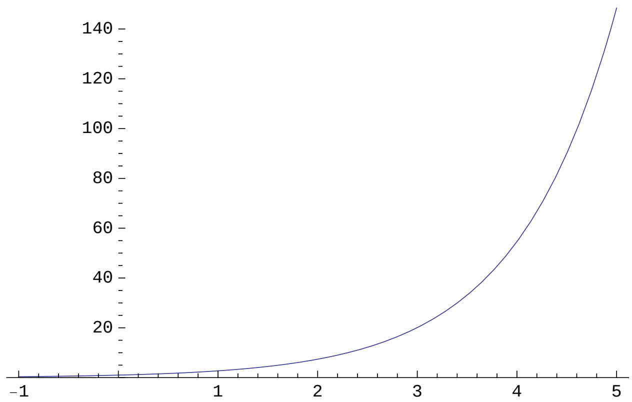
$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

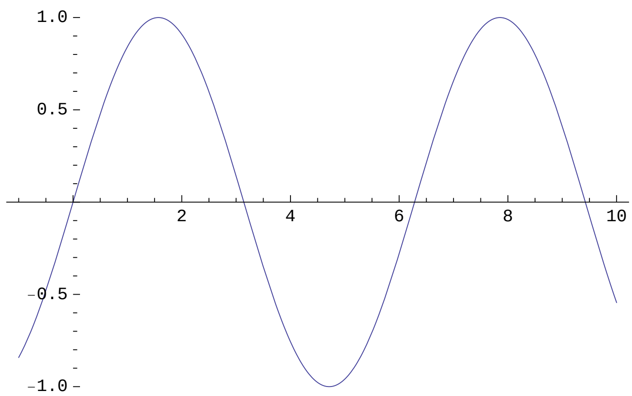
$$sin(z) := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

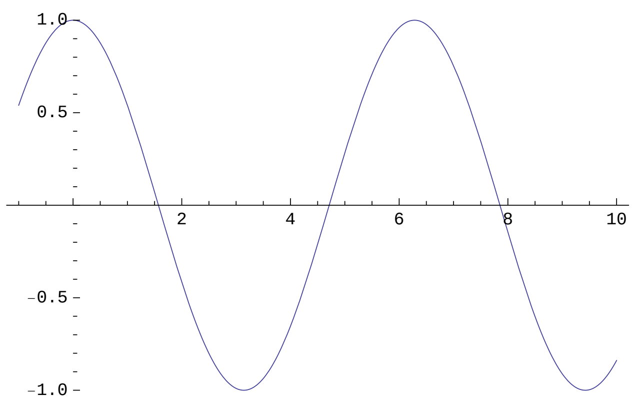
$$cos(z) := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Die in den Definitionen verwendeten unendlichen Reihen sind überall in der komplexen Ebene konvergent. Für reelle Werte von z stimmen die oben definierten Funktionen mit den (bekannten) Definitionen für reelle z überein. Anders ausgedrückt: Die obigen Definitionen stellen *Fortsetzungen* der Definition der entsprechenden Funktionen im Reellen dar.

Die Schaubilder der Exponential-, Sinus- und Cosinus-Funktion im Reellen:







Auch für komplexe Zahlen z und w gilt das fundamentale Potenzgesetz

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$

Beweisidee: Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe für die komplexe Exponentialfunktion ist die Umordnung von Teiltermen möglich. Man zeige damit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$.

Aus den obigen Reihendarstellungen folgt für reelles x mit ix an Stelle von z:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \ldots \\ &= 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots + ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots + i \cdot (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots) \end{aligned}$$

Und hieraus folgt die ***Eulersche Gleichung*** **(*Eulersche Formel*)**

$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$$

D.h. $cos(x) = \Re(e^{ix})$ und $sin(x) = \Im(e^{ix})$.

Für reelle x gelten die Gleichungen $cos(-x) = cos(x)$ und $sin(-x) = -sin(x)$. Aus der Eulerschen Gleichung folgt damit sofort: $e^{-ix} = e^{i\cdot(-x)} = cos(-x) + i \cdot sin(-x) = cos(x) - i \cdot sin(x)$.

Und hieraus folgt $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cdot cos(x)$ und $e^{ix} - e^{-ix} = i \cdot 2sin(x)$, also

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{und} \qquad sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Eine weitere Folgerung aus der Eulerschen Gleichung ist, dass die komplex Exponentialfunktion wegen $sin(x) = sin(x + 2\pi)$ entlang der imaginären Achse periodisch mit der Periode 2π ist. D.h. $e^{a+ib} = e^{a+i(b+2\pi)}$. Damit ist die komplexe Exponentialfunktion nicht mehr injektiv – mit der Folge, dass es Probleme mit der Umkehrfunktion (dem komplexen Logarithmus) und den komplexen Wurzelfunktionen gibt. Während nämlich im Reellen die Exponentialfunktion umkehrbar ist und stets die Gleichung $a^x = e^{x\cdot ln(a)}$ gilt, ist dies im Komplexen nicht mehr so ohne weiteres der Fall.

Die Eulersche Gleichung gilt als eine der bedeutendsten Gleichungen in der Mathematik. Aus ihr folgt z.B. sofort

$$e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i \cdot 1 = i$$

Weiterhin folgt aus der Eulerschen Gleichung mit

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

eine Gleichung, welche die für die Mathematik wichtigsten Zahlen $0, 1, e, \pi$ und i in überraschender, minimalistischer und eleganter Weise miteinander in Beziehung setzt. (Der Physiker Richard Feynman nannte diese Gleichung die „bemerkenswerteste Formel der Welt“.)

5 Die Darstellung komplexer Zahlen in der Polarform

Die komplexe Zahl $c = a + ib$ lässt sich als Punkt mit den (kartesischen) Koordinaten (a, b) in der Ebene deuten; a ist dabei die *Abszisse*, b die *Ordinate*. Sein Abstand vom Nullpunkt $0 + i \cdot 0$ ist $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \overline{c}}$.

Der durch die komplexe Zahl c gegebene Punkt in der $x/y-$Ebene lässt sich auch beschreiben durch

- seinen Abstand vom Nullpunkt $\sqrt{a^2+b^2}$; dieser Abstand wird auch als *Betrag* (oder *Modul* oder *Norm*) der komplexen Zahl c bezeichnet; in symbolischer Darstellung: $|c| := \sqrt{c \cdot \overline{c}} = \sqrt{a^2+b^2}$
- den Winkel φ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{((0,0),(1,0))}$ und $\overrightarrow{((0,0),(a,b))}$; dieser Winkel wird auch als *Argument* oder *Phase* bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen gilt für die komplex Zahl $a+ib$ mit dem Modul $r = \sqrt{a^2+b^2}$ und der Phase φ :

$$a = r \cdot cos(\varphi)$$
$$b = r \cdot sin(\varphi)$$

und weiterhin

$$a + i \cdot b = r \cdot cos(\varphi) + i \cdot r \cdot sin(\varphi) = r \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$

Die komplexe Zahl $a + i \cdot b$ lässt sich unter Verwendung der Eulerschen Gleichung mit dem Modul r und dem Argument φ also auch folgendermassen in der *Polarform* schreiben:

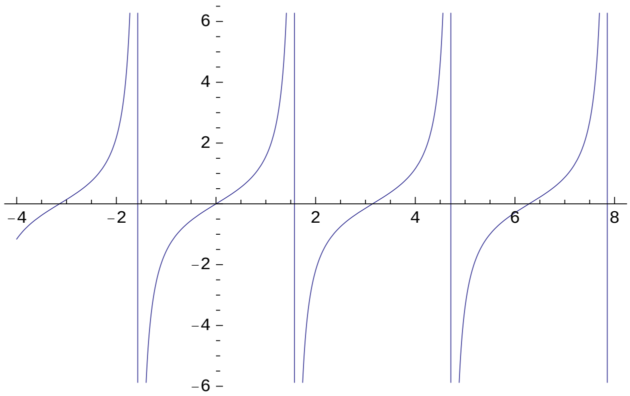
$$a + i \cdot b = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

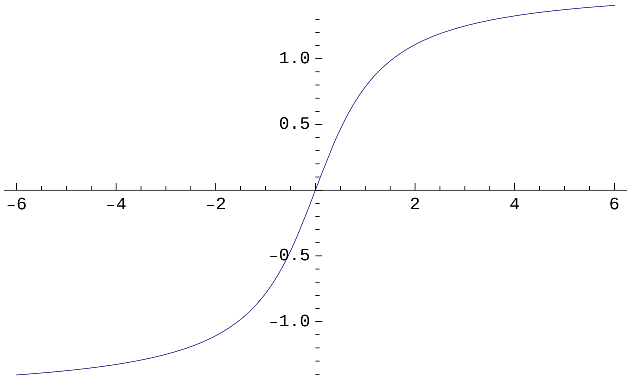
Der Winkel φ ergibt sich aus den Koordinaten a und b durch die Umkehrung „*Arcustangens*“ der Tangensfunktion wie folgt:

$$\varphi = arctan(b, a)$$

Im Hinblick auf die Umkehrbarkeit der Tangens-Funktion gibt es jedoch das Problem, dass sie periodisch und somit nicht global auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv ist $(tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi))$ - siehe Funktionsschaubild. Schränkt man den Definitionsbereich der Tangens-Funktion jedoch auf den *Hauptwertebereich* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein, so wird sie umkehrbar und die Umkehrfunktion wird als Arcustangens bezeichnet.

Die Schaubilder der Tangens- und der Arcustangens-Funktion (Winkelgrössen im Bogenmass).

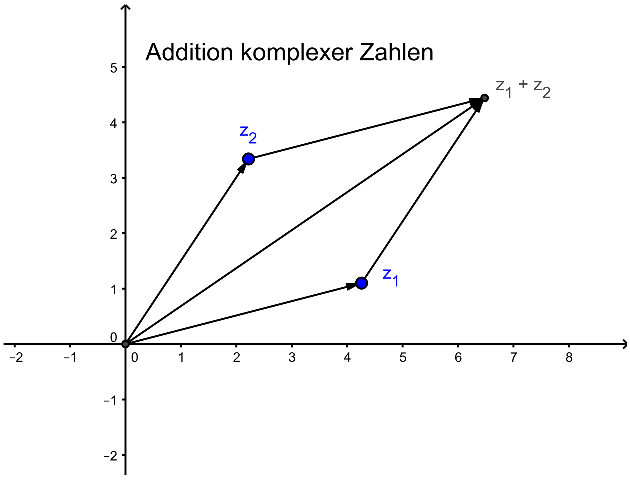




Gelegentlich wird an Stelle von *arctan* auch die Bezeichnung *atan* verwendet

6 Die geometrische Deutung der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Die **Addition** komplexer Zahlen lässt sich in naheliegender Weise als Vektoraddition deuten. In physikalischer Interpretation entspricht die Kommutativität der Addition dem „Parallelogramm der Kräfte".

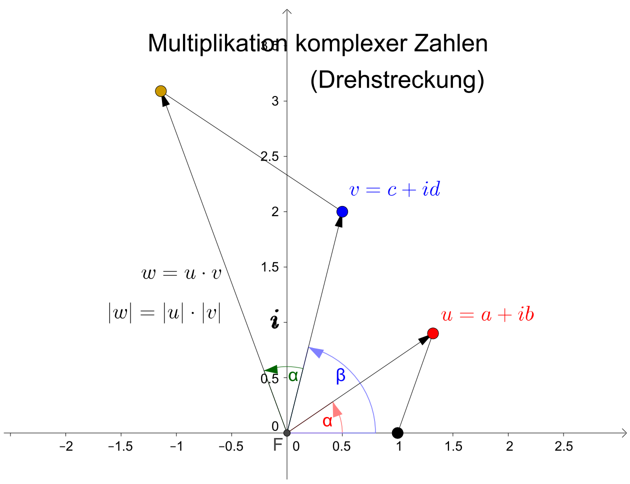


Für die **Multiplikation** der komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = Modul(z_1) \cdot e^{i \cdot Argument(z_1)} \cdot Modul(z_2) \cdot e^{i \cdot Argument(z_2)}$$
$$= r_1 \cdot e^{\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\varphi_1 + \varphi_2} = r \cdot e^{\varphi}$$

mit $r = r_1 \cdot r_2$ und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Verbal ausgedrückt, heisst das: Der Modul (Betrag) des Produkts ist gleich dem Produkt der Moduln und das Argument (Winkel) des Produkts ist gleich der Summe der Argumente.



Kurz: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Winkel.

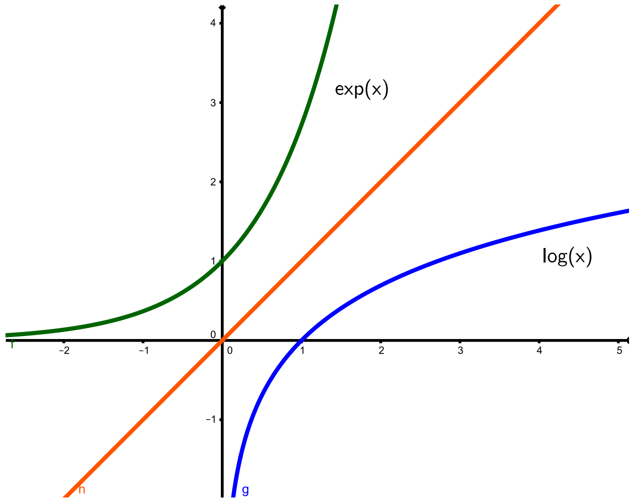
7 Das Potenzieren komplexer Zahlen

Das Potenzieren komplexer Zahlen mit natürlichen Exponenten lässt sich, wie im Bereich der rationalen Zahlen, deuten als iteriertes Multiplizieren:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \ldots \cdot z}_{n \text{ Faktoren}}$$

Im Bereich der reellen Zahlen ist die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ streng monoton steigend; ihre Werte liegen alle im Bereich $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen. Sie ist daher injektiv und umkehrbar. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion ist der *natürliche Logarithmus* $x \mapsto ln(x)$. Da alle Werte der reellen Exponentialfunktion positiv sind, ist der natürliche Logarithmus nur für positive reelle Zahlen definiert. Wie bei allen Umkehrfunktionen gelten die Gleichungen

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \quad e^{ln(x)} = x \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad ln(e^x)) = x$$



Somit gilt für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ (wegen des für reelle Zahlen geltenden Logarithmengesetzes $ln(a^x) = x \cdot ln(a)$):

$$a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln(a)}$$

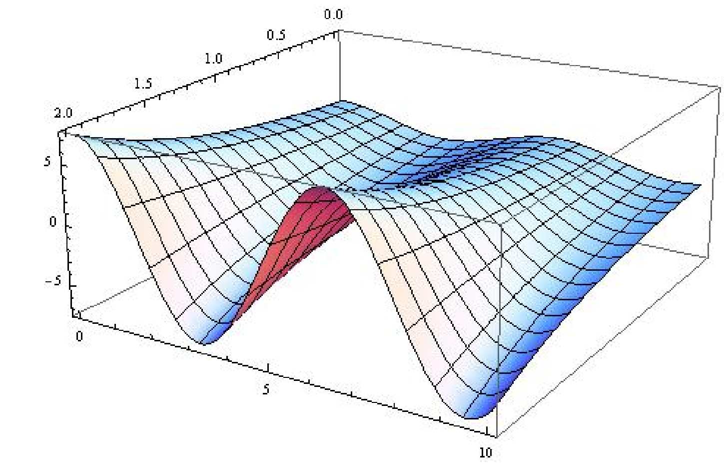
Mit der Funktion $x \mapsto e^x$ und ihrer Umkehrfunktion sind somit sofort für alle positiven reellen Zahlen a die (unendlich vielen) Potenzfunktionen $x \mapsto a^x$ definiert.

Das Potenzieren beliebiger komplexer Zahlen mit beliebigen (komplexen) Exponenten wird jedoch durch den Sachverhalt erschwert, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv ist. Die Frage, ob und wie sich z.B. z^w für beliebige komplexe Zahlen z und w realisieren lässt, führt in das Gebiet der *Riemannschen Flächen*.

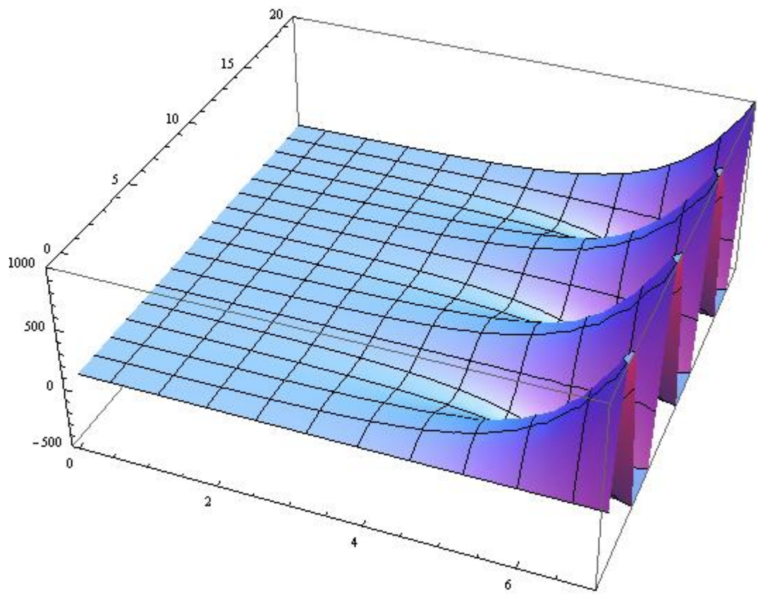
8 Komplexe Funktionen und ihre graphische Darstellung

Unter einer *komplexen Funktion* versteht man eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertebereich ist 2-dimensional über den reellen Zahlen. Eine direktes Analogon zur üblichen Darstellung reeller Funktionen wäre also nur in einem 4-dimensionalen reellen Raum möglich. Dieser Raum entzieht sich aber unserer unmittelbaren Anschauung. Man muss die graphische Darstellung deshalb anders realisieren. So kann man z.B. mit den Mitteln der darstellenden Geometrie durch Weglassen geeigneter Achsen 3-dimensionale Projektionen des 4-dimensionalen Raumes erzeugen.

Dreidimensionale Darstellung von $Exp(z)$ mit dem Realteil auf der vertikalen Achse:

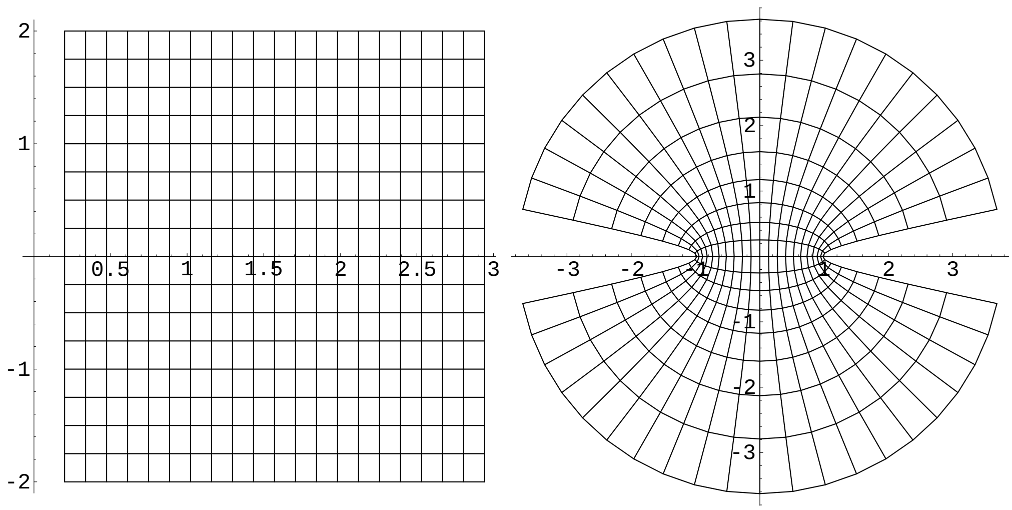


Dreidimensionale Darstellung von $Exp(z)$ mit dem Imaginärteil auf der vertikalen Achse:

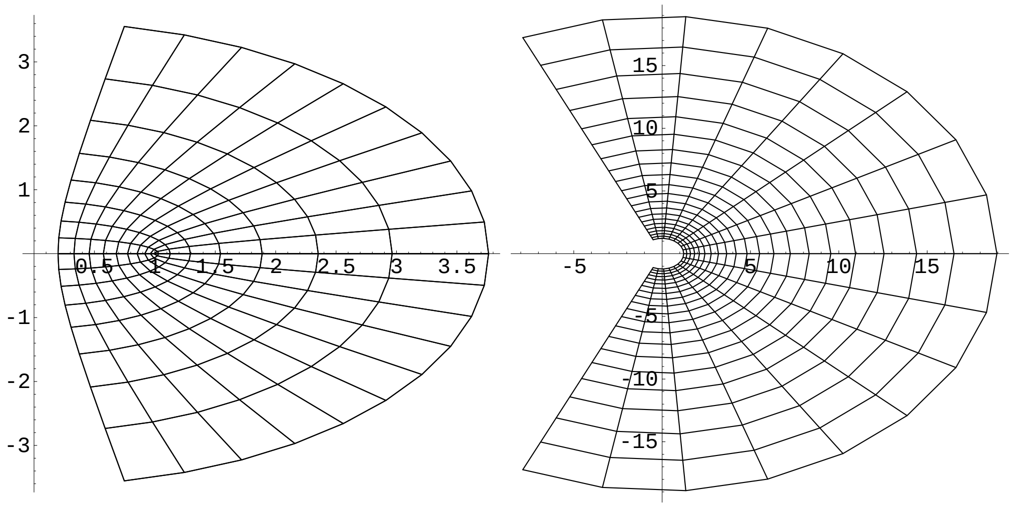


Eine andere Möglichkeit, komplexe Funktionen zu veranschaulichen besteht darin, die komplexe Ebene zweimal zu zeichnen: in der ersten Ebene die Urbilder und in der zweiten Ebene die dazugehörigen Funktionswerte. Verwendet man als Urbild z.B. ein Rechtecksgitter, so vermittelt die Transformation der Gitterlinien einen Eindruck von der Wirkungsweise der Funktion.

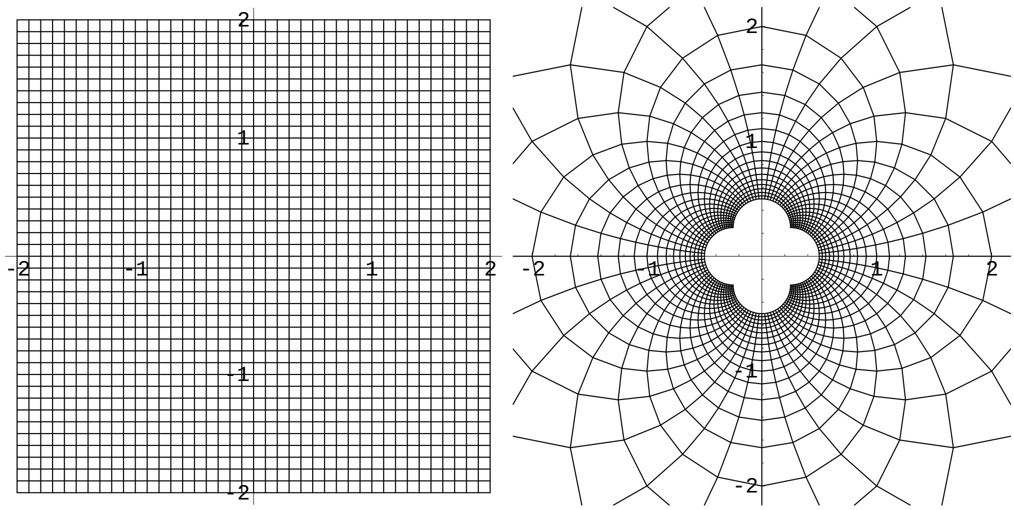
Ein Beispiel: Links das Urbild (Rechtecksgitter in der komplexen Ebene) und rechts das Bild (das mit der komplexen Cosinus-Funktion transformierte Rechtecksgitter):



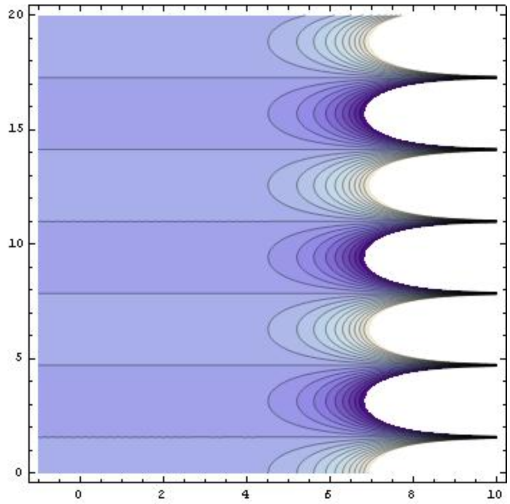
Im folgenden sind die Bilder des Rechtecksgitters unter den komplexen Sinus- und Exponentialfunktion dargestellt.



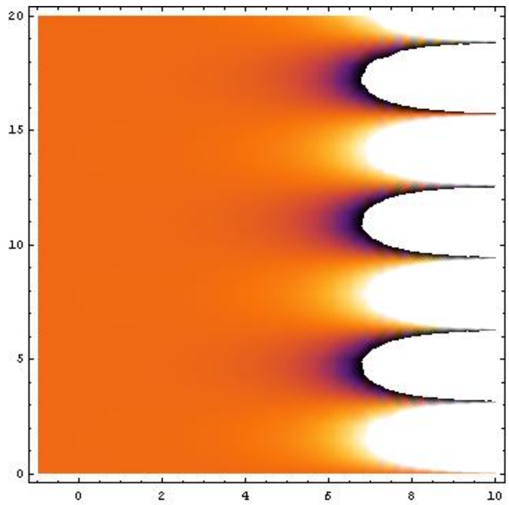
Das folgende Bild des Rechteckgitters unter der komplexen Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ (auch *Inversion* genannt) verdeutlicht, dass dadurch Geraden auf Kreise abgebildet werden.



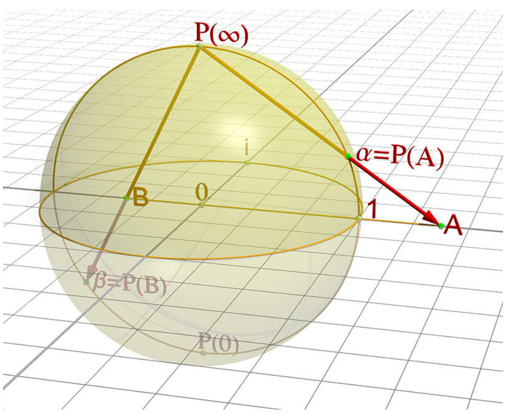
Veranschaulichung des Realteils der komplexen Exponentialfunktion mit Hilfe von Höhenlinien-Plots (engl.: contour plots):



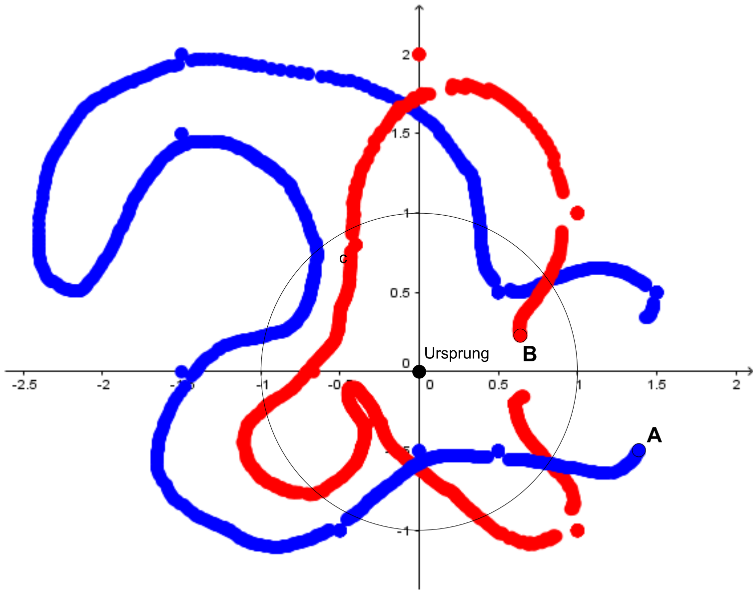
Veranschaulichung des Imaginärteils der komplexen Exponentialfunktion mit Hilfe von Farb-und-Dichte-Darstellungen (engl. density plots):



Eine weitere Veranschaulichung komplexer Zahlen und komplexer Funktionen ist durch die *stereographische Projektion* der komplexen Zahlenebene auf die *„Riemannsche Zahlenkugel“* gegeben (vgl. `www.de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zahlenkugel`).



Sehr hilfreich für die Visualisierung komplexer Funktionen ist auch die Software zur „dynamischen“ Geometrie (*Dynamische-Geometrie-Systeme* (DGS)). Im folgenden ist die Spur eines Urbildpunkts (A, blau) und seines Bildpunkts (B, rot) unter der Inversion $f(z) = \frac{1}{z}$ in einem einzigen 2-dimensionalen Koordinatensystem dargestellt.



9 Komplexe Zahlen, „verrückte“ Argumente und Miscellanea

Eine interessante Begründung für die These

$$1+2+3+4+5+...=-\frac{1}{12}$$

ist bei YouTube unter dem Titel „Ramanujan: Making sense of 1+2+3+... = -1/12 and Co.“ zu sehen; vgl. `https://www.youtube.com/watch?v=jcKRGpMiVTw`
Autor: „Mathologer“ und „Mathemagician“ Burkard Polster

Recht interessant und gut verständlich ist auch das Video des Dresdner als „Mathematik-Rapper“ (Pseudonym *DorFuchs*) bekannten Mathematikers Johann Beurich: „Darf man die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen?“ Vgl. `https://www.youtube.com/watch?v=xoEvlmZkNcg`

Ein veritabler Ohrwurm ist sein Video über die Lösung quadratischer Gleichungen
`https://www.youtube.com/watch?v=tRblwTsX6hQ`

10 Komplexe Zahlen und ihre Anwendung

Es hat sich gezeigt, dass komplexe Zahlen sehr viel tiefer in der Natur und auch in der Mathematik verankert sind, als man zur Zeit ihrer Entdeckung ahnen konnte. Das Rechnen mit diesen „irrealen“ Zahlen liefert sehr häufig Ergebnisse, die anders nicht zu erreichen sind. Der Begriff „imaginär“ für diesen Zahlenbereich hat sich damit eigentlich als falsch erwiesen, wird aber, historisch bedingt, beibehalten.

In der Physik werden komplexe Zahlen vielfältig verwendet; so z.B. bei der Behandlung von Differentialgleichungen zu Schwingungsvorgängen, in der Relativitätstheorie und in der Quantentheorie.

In der Elektrotechnik wird die Darstellung in der komplexen Zahlenebene genutzt, um Vorgänge in der Wechselstromtechnik mathematisch zu beschreiben. Für die imaginäre Einheit verwendet man in der Elektrotechnik den Buchstaben j (mit $j^2=-1$) an Stelle von i, um Verwechslungen mit dem Buchstaben i (bzw. I), der dort für die Stromstärke verwendet wird, zu vermeiden.

Und rein innermathematisch stellen die komplexen Zahlen ein derart fundamentales Konzept dar, dass eine Mathematik ohne komplexe Zahlen heutzutage schlicht unvorstellbar ist. Besonders für die mathematischen Teilgebiete der Funktionentheorie (englisch: *complex analysis*) und der Algebra sind die komplexen Zahlen unverzichtbar.

11 Literaturhinweise

Die Literatur zu den komplexen Zahlen ist unüberschaubar. Fast jede Darstellung zur Funktionentheorie enthält eine Einführung in die Materie der komplexen Zahlen – oft mit interessanten historischen Hinweisen. Aus der Fülle der Literatur seien hier nur die folgenden (fast schon als „klassisch“ zu bezeichnenden) Werke zitiert:

Conway J.H. / Guy R.K.: The Book of Numbers; Springer Verlag, New York 1996

Ebbinghaus H.-D., Hermes H., Hirzebruch F., Koecher M., Mainzer K., Neukirch J., Prestel A., Remmert R.: *Zahlen*; Springer-Verlag, Berlin 1983

Hankel, Hermann (zum „Permanenzprinzip“): *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen in zwei Theilen*, §3 *Princip der Permanenz formaler Gesetze*, Leipzig 1867

Knopp, Konrad: *Elemente der Funktionentheorie*; Sammlung Göschen Band 1109, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1971

Pesic, Peter: *Abels Beweis*; Springer-Verlag, Berlin 2005

Pieper, Herbert: *Die komplexen Zahlen*; Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW), Berlin 1984

Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 1*; Springer-Verlag, Berlin 1984