Woher kommen die Zahlen?

zur Geschichte des Zählens und Rechnens

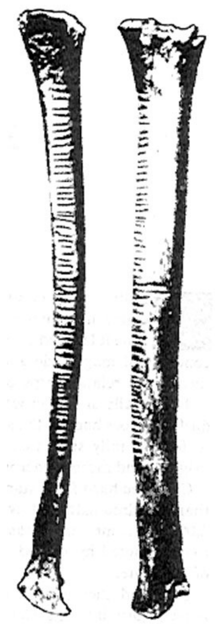
Jochen Ziegenbalg

Email: ziegenbalg.edu@gmail.com

Internet: https://jochen-ziegenbalg.github.io/root/

Zahlen – zur frühen Entstehungsgeschichte

Eines der frühesten dokumentierten Beispiele aus der *Jungsteinzeit*



Strich-Markierungen auf einem Wolfsknochen;
Fundort: Vestonice (dt. Wisternitz), Südmähren, Tschechien)

Z.B. zur Zählung von Tieren in einer Herde

Perioden der Steinzeit (grobe Datierung):

Altsteinzeit (*Paläolithikum*):
ab etwa 2 Mill. Jahren bis etwa 10. Jahrtausend v. Chr.
Jungsteinzeit (*Neolithikum*):
ab etwa 10. Jahrtausend bis etwa 4. Jahrtausend v. Chr.

Etymologie:
Das Wort Zahl entwickelte sich aus dem althochdeutschen Wort
zala ,
welches „eingekerbtes Merkzeichen“ bedeutet.

Zahlen in frühen Hochkulturen

Keine Hochkultur kommt ohne Zahlen aus.

Anwendungen: Handel und Gewerbe, Architektur, Bauwesen, Ackerbau, Feldvermessung, Logistik (auch: Kriegswesen), Astronomie

In jeder der frühen Hochkulturen gab es deshalb mehr oder weniger brauchbare Zahlschreibweisen und, damit verbunden, Rechenverfahren.

antikes Ägypten (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

Sumer, Babylon, Mesompotamien (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

antike griechische Kultur (ab ca. 800 v.Chr. – 500 n.Chr.)

Römer (ab ca. 750 v.Chr. – 500 n.Chr.)

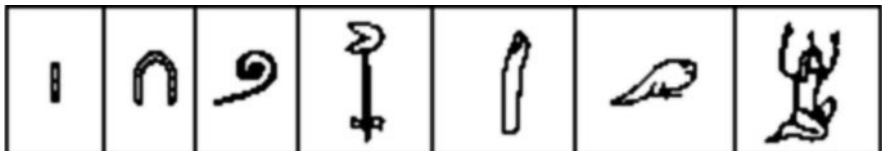
Chinesen (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

Induskultur (ab ca. 3000 v.Chr.)

Maya, Mittelamerika (ab ca. 3000 v.Chr.)

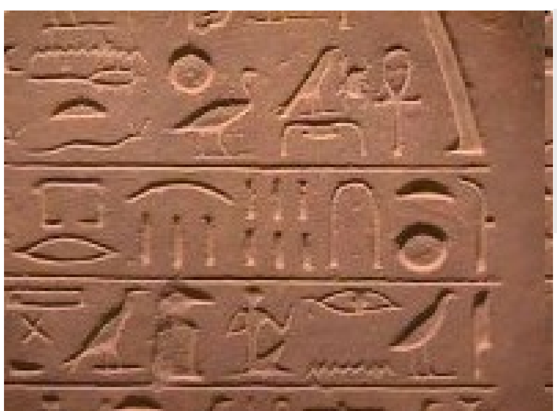
Die Ägypter (ca. 3000 – 500 v. Chr.)

Die **Ägypter** (ca. 3000–500 v. Chr.) gebrauchten eine Zehnerstufungs-Darstellung (aber kein Zehner*system*) zur Darstellung der natürlichen Zahlen.



1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Strich Huf Mess-Schnur Lotusblume Finger Kaulquappe Gott der Unendlichkeit



Stele des Königs Sesostris III. aus der Festung Semna am zweiten Katarakt

Karnak Tempel bei Luxor

Die ägyptische Multiplikation

Ein Beispiel zum Verfahren (in unserer heutigen Schreibweise)

Gesucht ist das Produkt 52 mal 67:

~~52 mal 67~~
~~26 mal 134~~
13 mal 268
~~12 mal 268~~
~~6 mal 536~~
3 mal 1072
~~2 mal 1072~~
1 mal 2144

3484

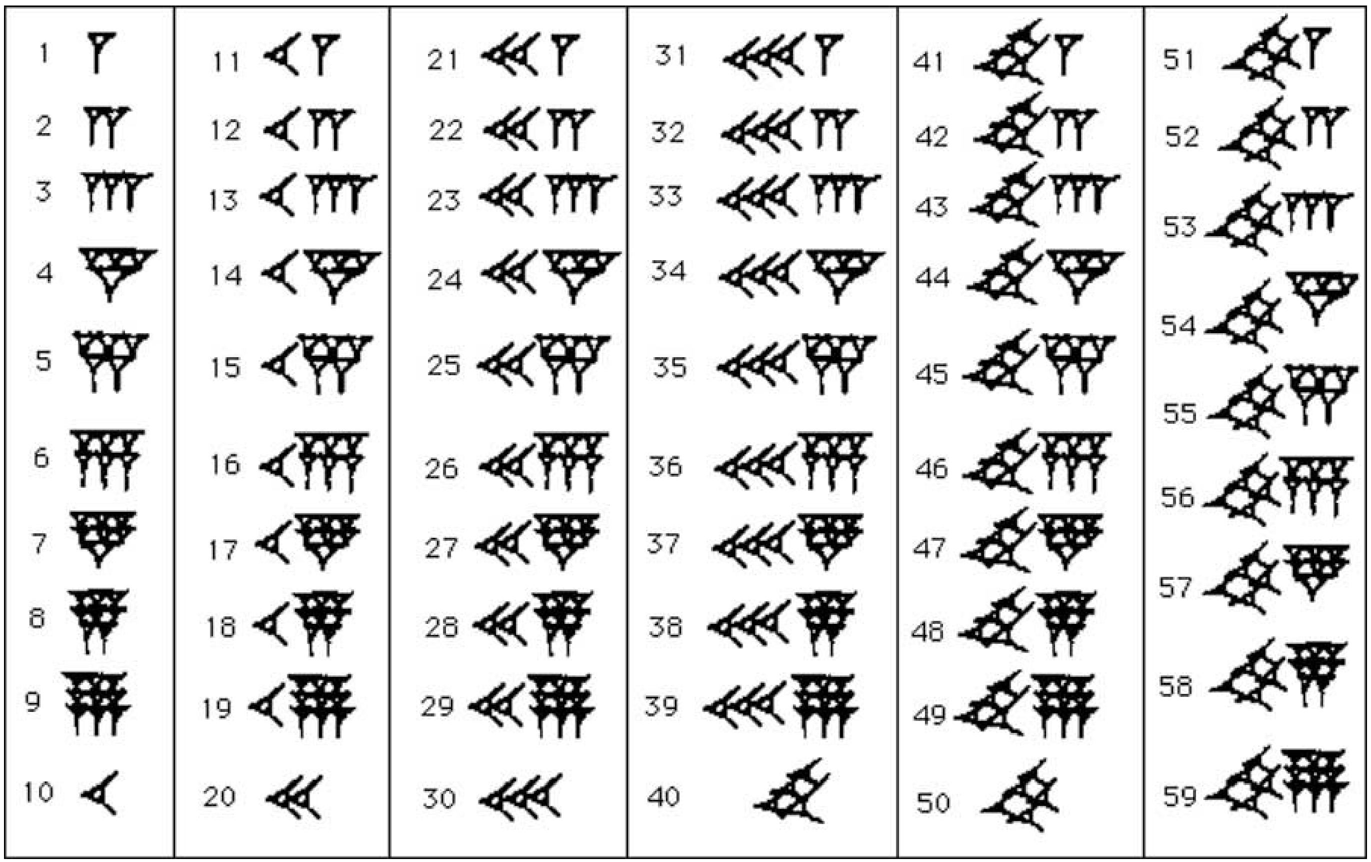
+

Ergebnis: **52 mal 67 = 3484**

Im übrigen ist das Verfahren der ägyptischen Multiplikation auch aus der Perspektive des Computereinsatzes sehr interessant. Es stellt eine Anwendung des heuristischen Prinzips von „Teile und Herrsche" und ist deshalb sehr laufzeit-effizient.

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000–200 v. Chr.)

Die Babylonier verwendeten die *Keilschrift*.
Sie verfügten fast schon über ein 60-er Stellenwertsystem.



Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Auflistung verschiedener Mengen von Gerstenschrot und Malz
Uruk ca. 3400–3000 v. Chr.

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Tontafel mit Zahlenreihen
Nippur, ca. 3000 v. Chr.

Zum effektiven Rechnen in einem Zahlensystem muss man das (kleine) Ein-mal-Eins beherrschen.
Im Zehnersystem bedeutet dies, dass man die 100 Multiplikationen von 1 x 1 bis 10 x 10 „im Kopf“ hat.
Als Vorübung dazu werden heute im Unterricht die Zahlenreihen thematisiert (Zweier-, Dreier-, … Neuner-, Zehner-Reihe).
Die babylonischen Schüler mussten ihr kleines Ein-mal-Eins, also alle 3600 Produkte von 1 x 1 bis 60 x 60 und die zugehörigen Reihen beherrschen.

Die babylonische 18-er-Reihe

Transskription:

18 ara (mal) 1 → 18
ara 2 → 36
ara 3 → 54
ara 4 → 72
ara 5 → 90
ara 6 → 108
ara 7 → 126
ara 8 → 144

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

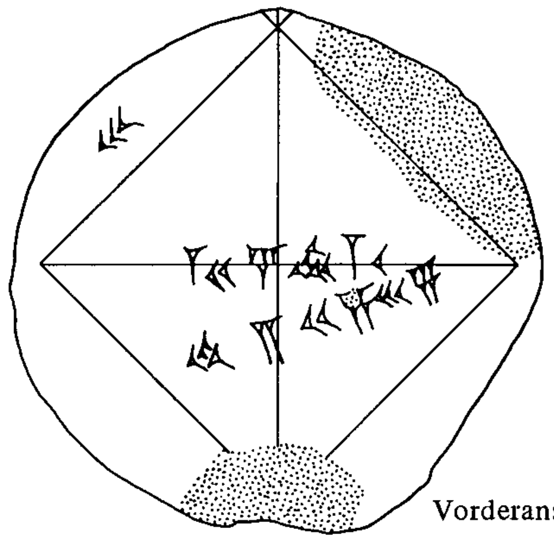
Das babylonisch-symerische Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln
(ca. 1700 – 1800 v.Chr.)

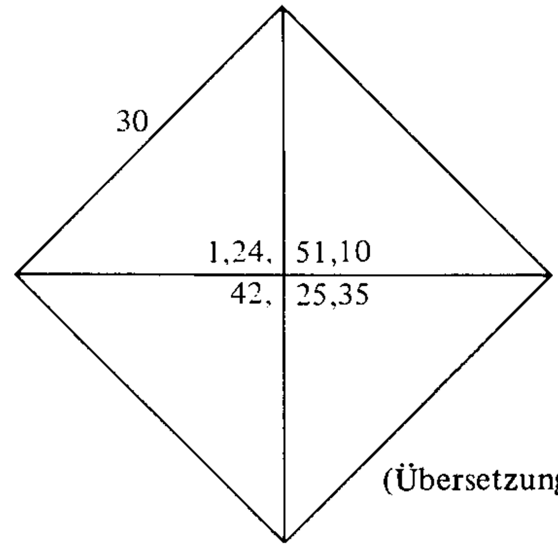
Abbildung 3.5

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Das babylonisch-symerische Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln: Transskription

Abbildung 3.5





Genauigkeit:

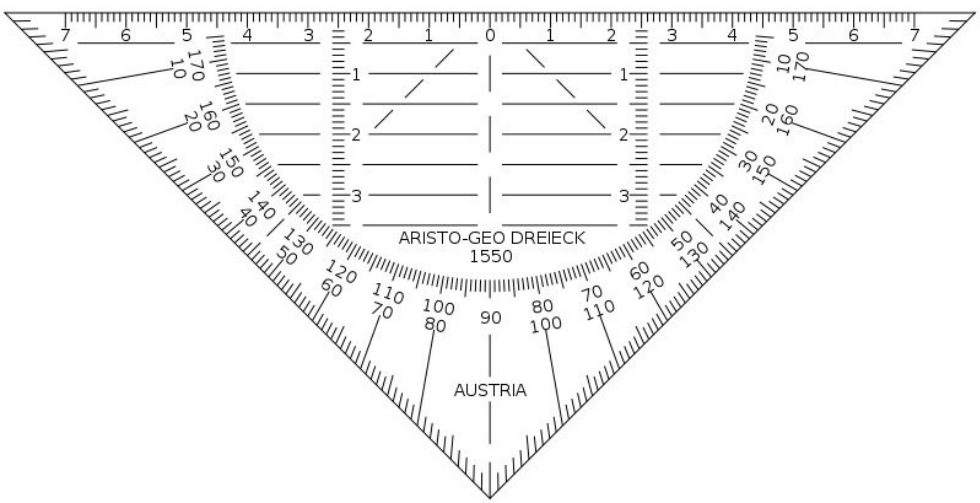
```
babylonischer Wert:              1.41421296296296
heutiger Wert (abgeschnitten):   1.41421356237468...
```

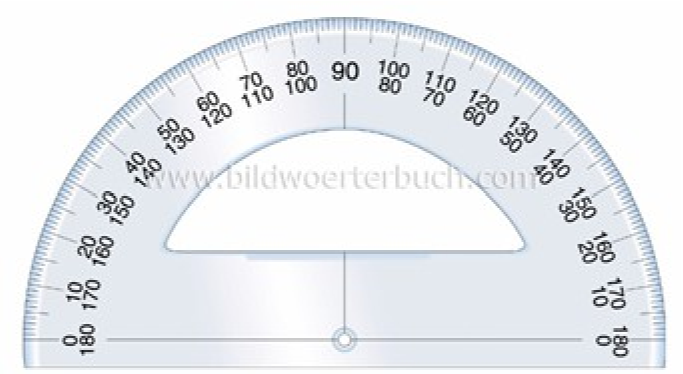
Fernwirkung des babylonischen Zahlsystems

Das babylonische 60-er-System hatte einen außerordentlich großen Einfluss, der bis in unsere Zeit hinein wirkt.

- In der Zeitmessung:
  1 Stunde hat 60 Minuten
  1 Minute hat 60 Sekunden

- Bei der Winkelmessung
  Der Vollkreis besteht aus 360 Grad (= 6 * 60 Grad).

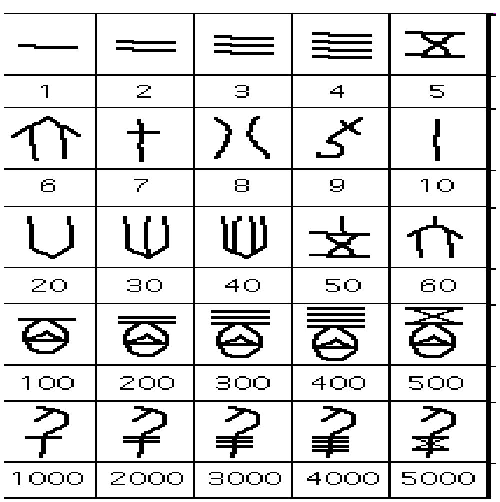


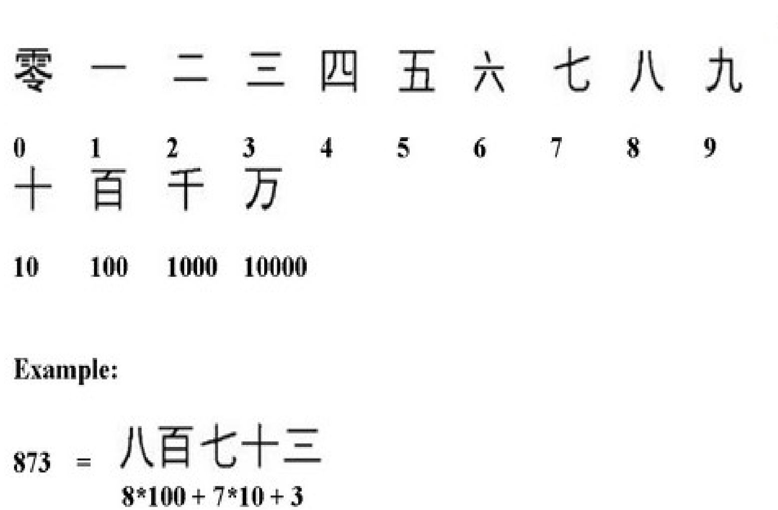


Chinesische Zahlschreibweisen

Die kulturgeschichtliche Entwicklung in China setzte ab etwa 2000 v.Chr. ein.
Für die Zahlschreibweise verwendeten die Chinesen eine Zehnerstufung – aber in der Antike ohne ein Symbol für die Null. Ähnlich wie im Falle der ägyptischen Zahlen kann man die chinesische Zahlschreibweise im Zeitraum der Antike nicht als Stellenwertsystem bezeichnen.
Im Hinblick auf die Größe des geographischen Raums und die Länge der Zeitdauer gab es sehr unterschiedliche Zahlschreibweisen.

Hier zwei Kostproben:

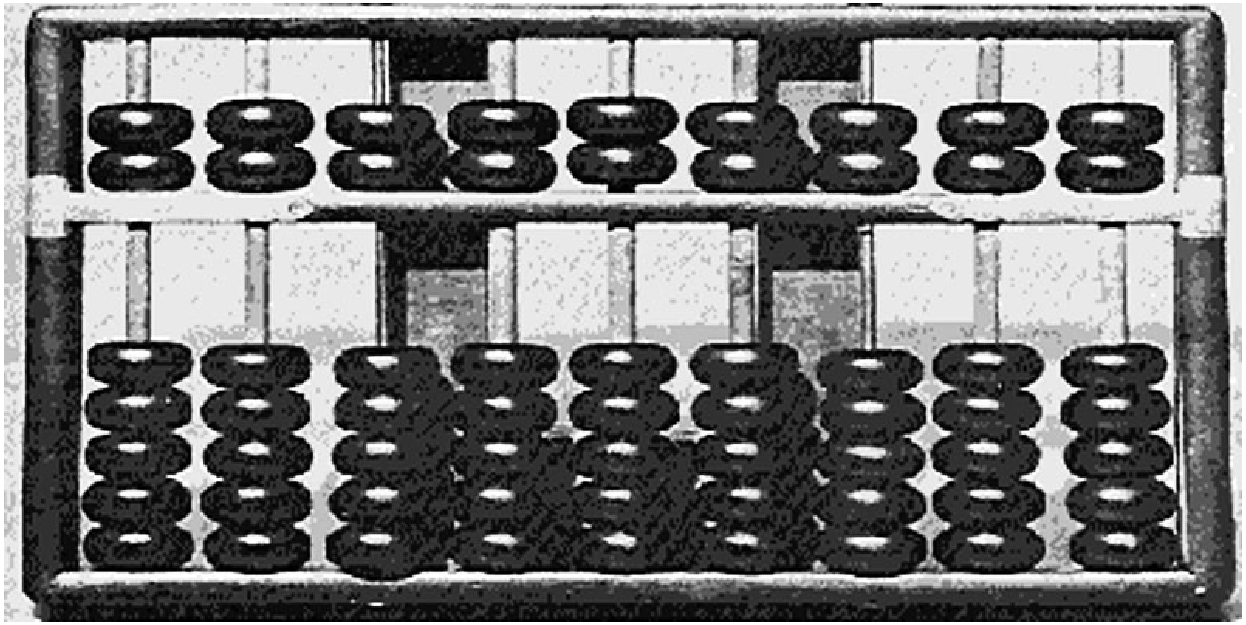




Der chinesische Abakus

Chinesisches Rechengerät: Suan Pan

Bis in die zweite Hälfte des letzten Jahrhunderts hinein (selbst nachdem elektronische Taschenrechner lange in Gebrauch waren) war der Suan Pan das weltweit am meisten genutzte Rechenhilfsmittel (*).



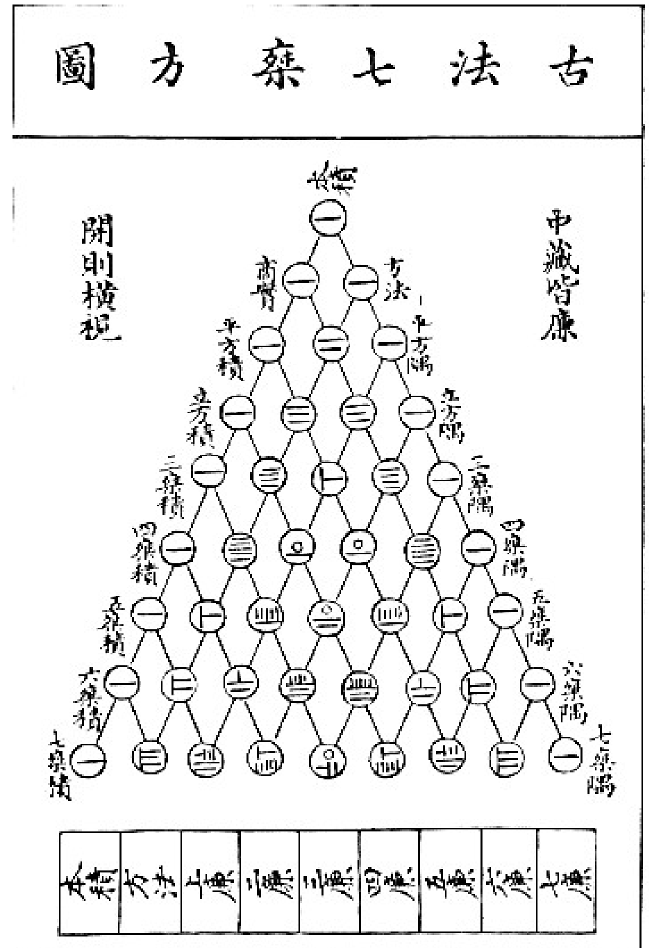
(*) Man konnte bis in unsere Zeit hinein in asiatischen Ländern gelegentlich beobachten, dass die Kassiererin an einer Einkaufskasse das Ergebnis mit einem Taschenrechner ausrechnete – und dann sicherheitshalber noch mal mit einem Suan Pan kontrollierte.

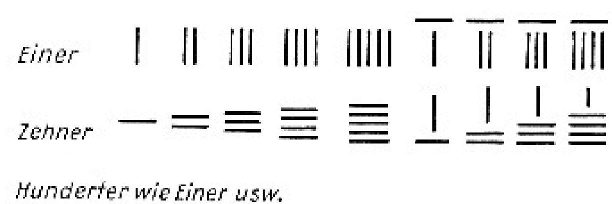
Das „Pascalsche“ Dreieck bei den Chinesen

Chinesische Mathematik

Yang Hui (ca. 1238-98): Sein Buch *Xiangjie Jiuzhang Suanfa* (1261) enthält die älteste noch erhaltene schriftliche Darstellung des „Pascalschen Dreiecks“. Er schreibt, dass er das Dreieck in einer Arbeit von Jia Xian (ca. 1010-1070) kennen gelernt habe. Die bei uns als Pascalsches Dreieck bekannte Figur wird in China als Yang Hui‘s Dreieck bezeichnet. (Diesem Dreieck kann man insbesondere auch die damalige chine-sische Zahlschreibweise entnehmen.)

Blaise Pascal, 1623-1662, französischer Mathematiker, Philosoph und Theologe

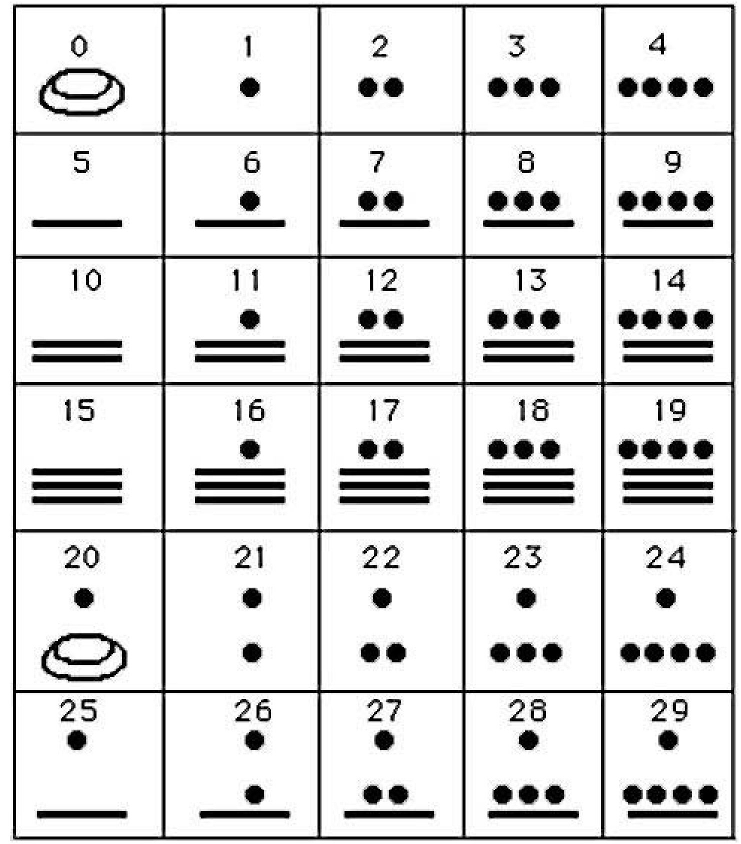




Die Maya (ab dem 3. Jahrtausend v. Chr.)

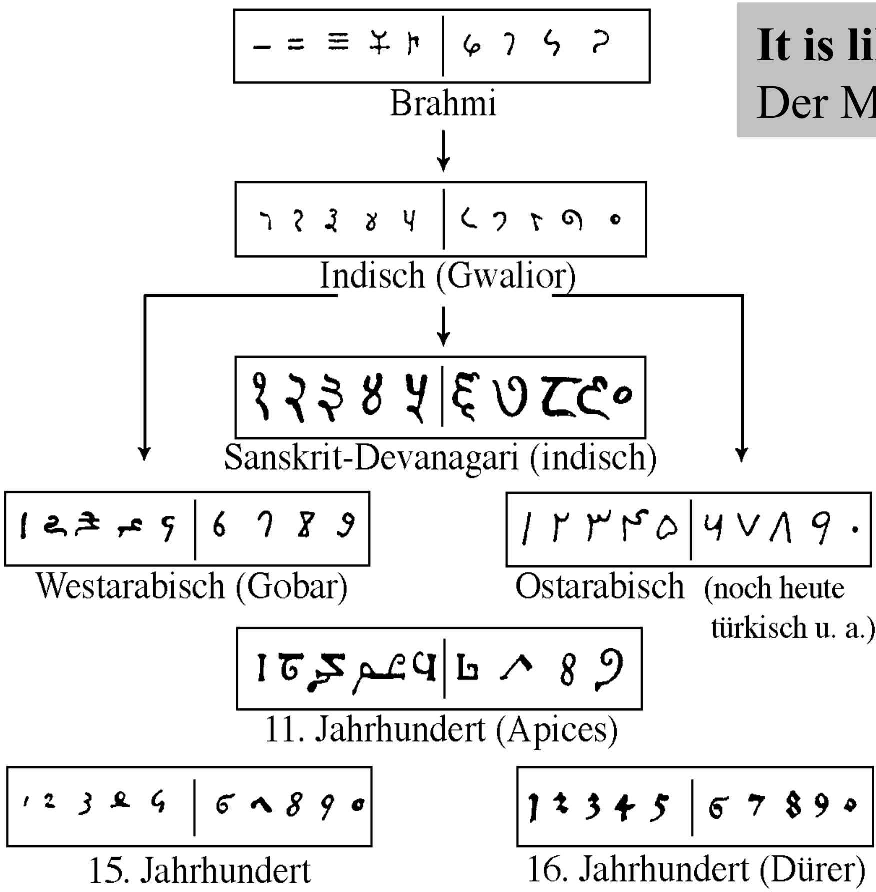
Die Maya verwendeten ein System zur Basis Zwanzig.

P. Beckmann schreibt in dem Buch *A History of Pi*: "... it is clear that with a positional notation closely resembling our own of today, the Maya could out-calculate the Egyptians, the Babylonians, the Greeks, and all Europeans up to the Renaissance".



Die Inder – Erfinder unseres Zehnersystems

Entscheidende Idee (etwa im 6. Jahrh. n.Chr.): **Die Erfindung der Null.**
Genauer: Die Erfindung eines Schreib-Symbols (einer Ziffer) für Null.



It is like coining the Nirvana into dynamos.
Der Mathematikhistoriker *G. B. Halsted*

Etymologie der Wortes „Ziffer“:

Ein **Zahlzeichen** beziehungsweise eine **Ziffer** (aus dem Sanskrit *sunya* für „Leere“, über das Arabische *aṣ-ṣifr* „die Leere, das Nichts“) ist ein Schriftzeichen, das für die Darstellung von Zahlen verwendet wird.

Die Verbreitung der indischen Zahlen

Ab dem 700 Jh. n.Chr. Entwicklung des Dezimalsystems (Erfindung der Null !) in Indien

In der Folgezeit: Verbreitung der indischen Zahlen – besonders in Richtung Westen: Zentralasien, Persien, arabische Welt

Ca.780-850 AD: Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi Autor des einflussreichen (im Original verloren gegangenen) Buches „*Über das Rechnen mit den indischen Zahlen*“

In den folgenden Jahrhunderten: Verbreitung der indischen Zahlen nach Westen über den gesamten arabischen Einflussbereich – bis nach Andalusien und andere Landstriche Spaniens

Übersetzerschule von Toledo: Übersetzung des Buches von al-Khowarizmi ins Lateinische, ca. 1140 vermutlich durch Johannes von Sevilla (Johannes Hispalensis) et al; Titel der lateinischen Übersetzung „ *Algoritmi de numero Indorum*“

In den folgenden Jahrhunderten: Verbreitung der “arabischen” Zahlen in der Welt des europäischen Mittelalters; insbesondere Leonardo von Pisa (Fibonacci) ca. 1170-1250; Liber Abaci 1202.

Damit verbunden: Häufiges Zitieren von al-Khowarizmi, oft eingeleitet durch die Worte “dixit Algorithmi …” (Algorithmi hat gesagt …); z.B. durch den Übersetzer („Arabisten“) Robert of Chester (ca. 1150) und durch Adam Ries 1492-1559

In den folgenden Jahrhunderten: Entwicklung des Begriffs Algorithmus (durch Sprachtransformation); Bedeutungswandel: vom Rechnen in den Grundrechenarten hin zum allgemeinen mathematischen Begriff der Berechenbarkeit (einschliesslich der *Programmierbarkeit* von Computern)

Einige Protagonisten des Ziffernrechnens

Al Khowarizmi

Leonardo von Pisa (Fibonacci)

Adam Ries

Al Khowarizmi (al Chwarizmi, al Hwarizmi)

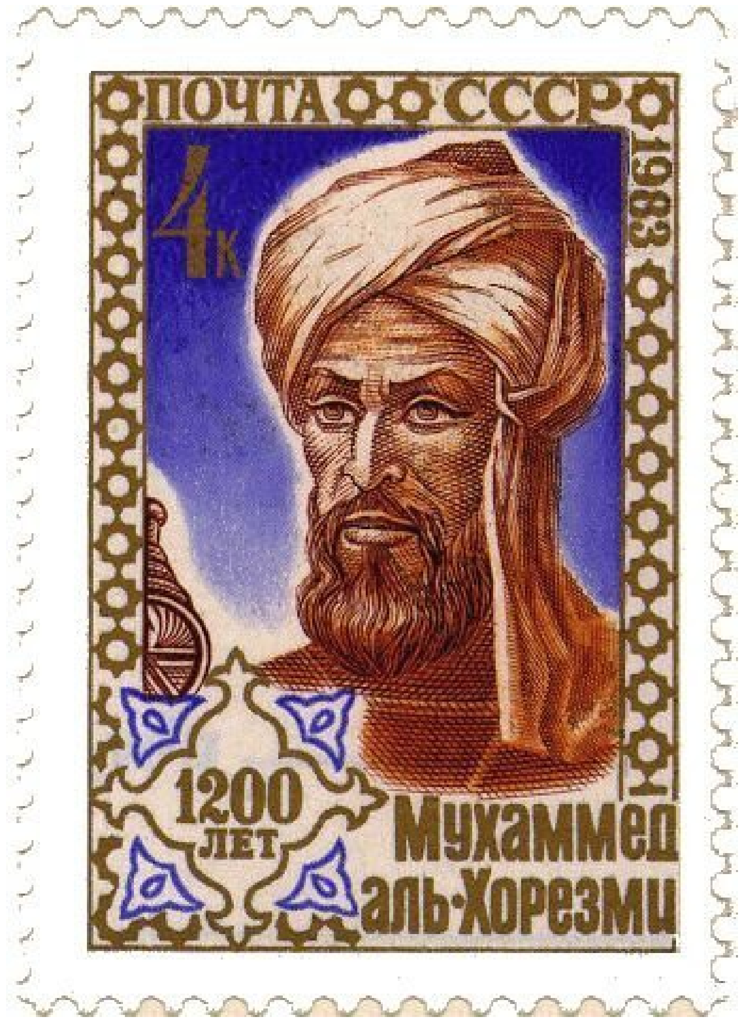
Abu Ja'far Mohammed ibn Musa *al-Khowarizmi*
(ca.780-850 AD)

Algorithmus

Al-kitab al-muhtasar fi hisab *al-jabr* w'al-muqabala (*)

Das Buch über Ergänzung (al-jabr)
und Ausgleich (al-muqabala)

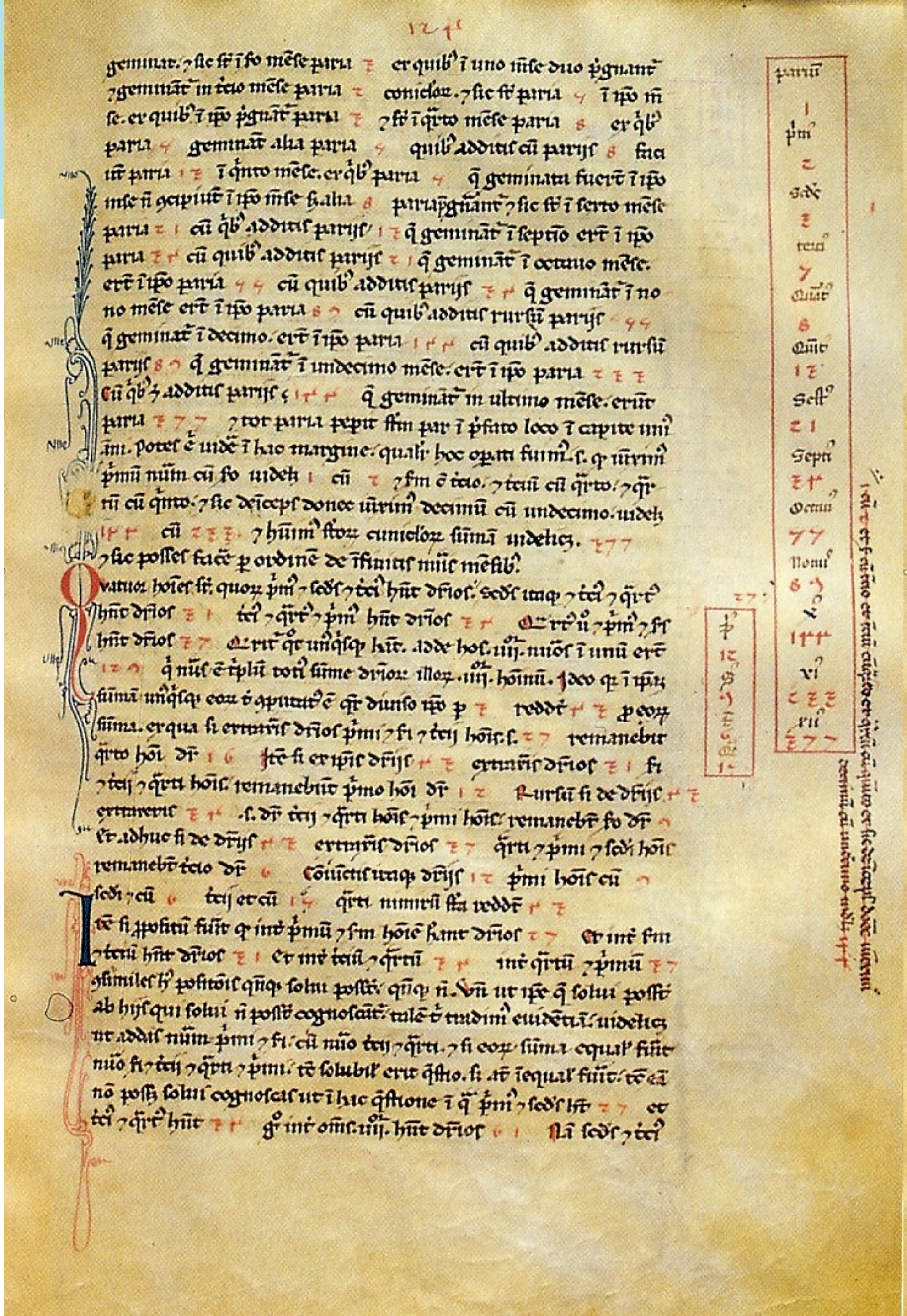
Algebra



Briefmarke Sovietische

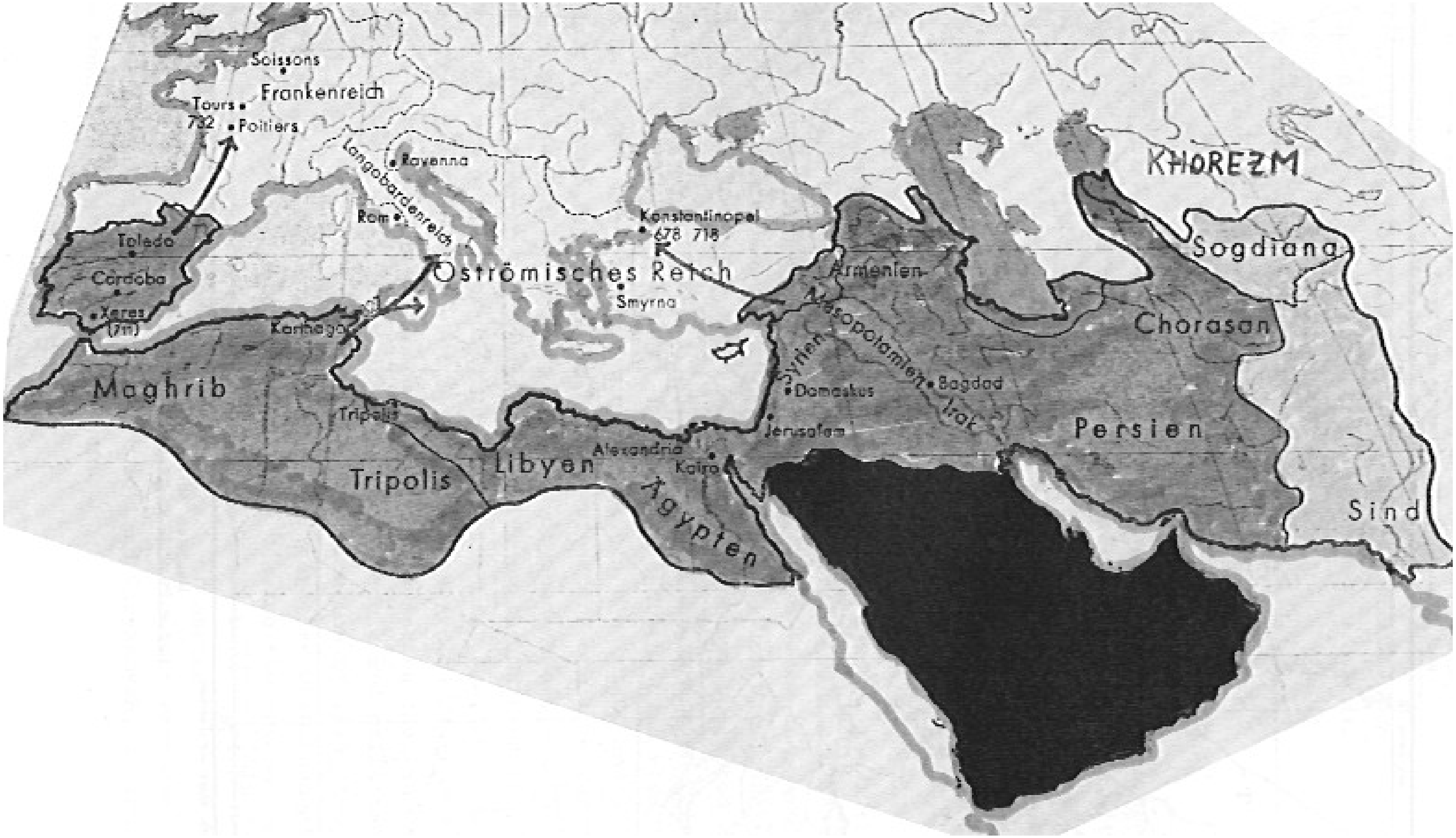
Al-kitab al-muhtasar fi hisab *al-jabr* w'al-muqabala

Aus: Liber Ab(b)aci *Kaninchenaufgabe*



Liber abbaci, MS Biblioteca Nazionale di Firenze, Codice Magliabechiano cs cI 2616, fol. 124r: Berechnung der „Kaninchenaufgabe“ mit Fibonacci-Reihe

Khowarizm / Khorezm relativ zur arabischen Welt




Chiva
KASPI-SEE
Aral-See
Baku
Astrachan
Gurjew
Machatschkala
Derbent
Kara-Bogas-Gol
Krasnowodsk
Ustjurt-Plateau
KARA-KALPAKISCHE
TURKMENISCHE S.S.R.
USBEKISCHE S.S.R.
KASACHISCHE S.S.R.
KIRGISISCHE S.S.R.
TADSCHIKISCHE S.S.R.
Kara-Kum
Kysyl-Kum
Taschkent
Samarkand
Buchara
Aschchabad
Teheran
Pamir
IRAN
(PERSIEN)
AFGHANISTAN
Swerdlowsk
Omsk
Karaganda
Balchasch-See
Mujun-Kum
Bet-Pak-Dala
Stalingrad
Saratow
Kuibyschew
Magnitogorsk

<back>

Die Griechen und die Mathematik

Die **Griechen** waren hervorragende Mathematiker. In der Zeit der griechischen Antike entwickelte sich die Mathematik zur eigentlichen Wissenschaft. Sie prägten auch den Begriff „Mathematik“:

Mathematik (altgriechisches Adjektiv μαθηματική [τέχνη] *mathēmatikē [téchnē]* „[die Kunst des] Lernen[s], zum Lernen gehörig“

- Thales von Milet (ca. 624–546 v.Chr.)
- Pythagoras von Samos (ca. 580–500 v.Chr.)
- Theodorus von Kyrene (ca. 460–399 v.Chr.)
- Theaitetos (ca. 414–369 v.Chr.)
- Eudoxos von Knidos (ca. 400–347 v.Chr.)
- Euklid von Alexandria (ca. 365–300 v.Chr.)
- Archimedes von Syrakus (ca. 287–212 v.Chr.)
- Eratosthenes von Kyrene (ca. 276–194 v.Chr.)
- Apollonius von Perge (ca. 260–190 v.Chr.)
- Heron von Alexandria (ca. 60 n.Chr.)
- Klaudios Ptolemaios (ca. 85–165 n.Chr.)
- Diophantos von Alexandria (ca. 250 n.Chr.)
- Hypatia of Alexandria (ca. 370–415 n.Chr.)

Die Griechen und ihre Zahlschreibweise

Die Mathematik der Griechen war überwiegend Geometrie.

Um Mathematik zu betreiben, brauchten sie konkrete Zahlen nur selten. Und wenn, dann veranschaulichten sie die Zahlen durch Strecken.

Bei all ihren epochalen mathematischen Leistungen hatten die Griechen allerdings ein ziemlich schlechtes Zahlensystem hatten, das sie aber nur im Bereiche von Handel und Gewerbe verwendeten.

Wenn sie “heftig” zu rechnen hatten, also z.B. im Zusammenhang mit astronomischen Problemen (Ptolemaios), verwendeten sie die babylonischen Zahlen.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	o	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϙ	koppa*	900	ϡ	sampi

*vau, koppa, and sampi are obsolete characters

Die Myriade (griechisch, dann auch im Lateinischen) steht für eine Anzahl von 10.000 (altgriech. μύριας – *myrias*).
Der Plural Myriaden steht oft für eine „unzählbare“ Menge (griech μύριος – *myrios*: unzählig, unendlich).

Die Römer

Zur Zeit der **Römer** und im (europäischen) Mittelalter verfiel der grösste Teil des bis dahin erworbenen mathematischen Wissens.

Das Zahlensystem der Römer war aus mathematischer Sicht, hochgradig ungeeignet zum Zählen, Messen und Rechnen.

I	1	XXI	21	XLI	41	LXI	61	LXXXI	81
II	2	XXII	22	XLII	42	LXII	62	LXXXII	82
III	3	XXIII	23	XLIII	43	LXIII	63	LXXXIII	83
IV	4	XXIV	24	XLIV	44	LXIV	64	LXXXIV	84
V	5	XXV	25	XLV	45	LXV	65	LXXXV	85
VI	6	XXVI	26	XLVI	46	LXVI	66	LXXXVI	86
VII	7	XXVII	27	XLVII	47	LXVII	67	LXXXVII	87
VIII	8	XXVIII	28	XLVIII	48	LXVIII	68	LXXXVIII	88
IX	9	XXIX	29	XLIX	49	LXIX	69	LXXXIX	89
X	10	XXX	30	L	50	LXX	70	XC	90
XI	11	XXXI	31	LI	51	LXXI	71	XCI	91
XII	12	XXXII	32	LII	52	LXXII	72	XCII	92
XIII	13	XXXIII	33	LIII	53	LXXIII	73	XCIII	93
XIV	14	XXXIV	34	LIV	54	LXXIV	74	XCIV	94
XV	15	XXXV	35	LV	55	LXXV	75	XCV	95
XVI	16	XXXVI	36	LVI	56	LXXVI	76	XCVI	96
XVII	17	XXXVII	37	LVII	57	LXXVII	77	XCVII	97
XVIII	18	XXXVIII	38	LVIII	58	LXXVIII	78	XCVIII	98
XIX	19	XXXIX	39	LIX	59	LXXIX	79	XCIX	99
XX	20	XL	40	LX	60	LXXX	80	C	100
								D	500
								M	1000

Wie wurde in der Antike gerechnet ?

1. Für intensive, umfangreiche Rechnungen (z.B. astronomische Berechnungen oder aufwendige Statik- bzw. Volumen-Berechnungen in der Baukunst) wurde mit den babylonischen Zahlen gerechnet.

2. Für Rechnungen aus dem Bereich des täglichen Bedarfs wurde mit einfachen Rechengeräten (Abakus, suan pan, soroban, stschoti) sowie auf Rechentischen mit Rechensteinen gerechnet.

Die Rechnungen wurden von *Rechenmeistern* ausgeführt, zu denen man ging, wenn man etwas auszurechnen hatte – und dieser Dienst war zu bezahlen. (Ähnliche Situation wie mit den *Schreibern*.)

Etymologie:

abax (griechisch): Brett, Tisch → Abakus

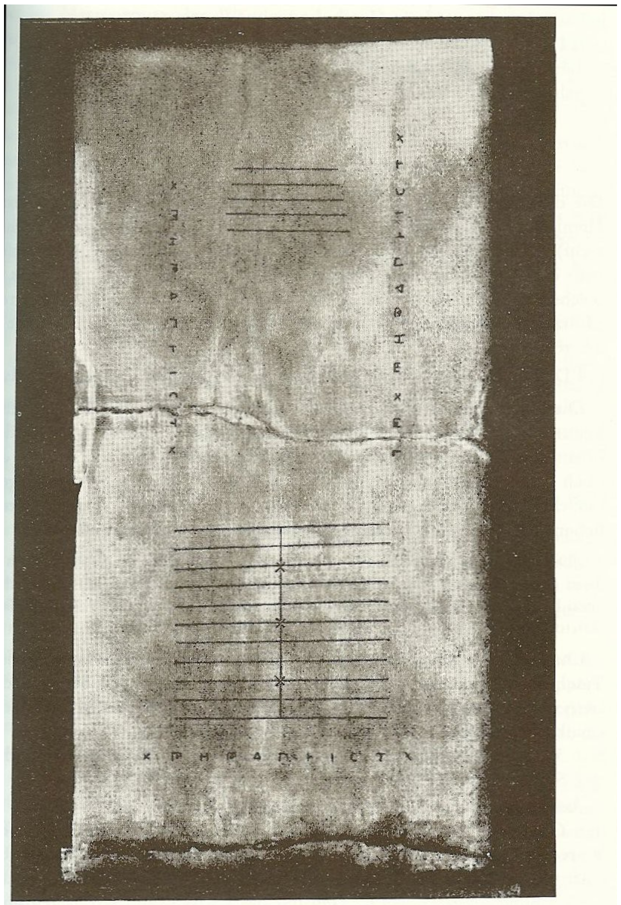
calculus (lat.): Steinchen → Kalkül, Kalkulieren, Kalkulation / engl. calculus

Interaktiver Rechentisch im Adam Ries Museum (online version):

http://www.adam-ries-bund.de/

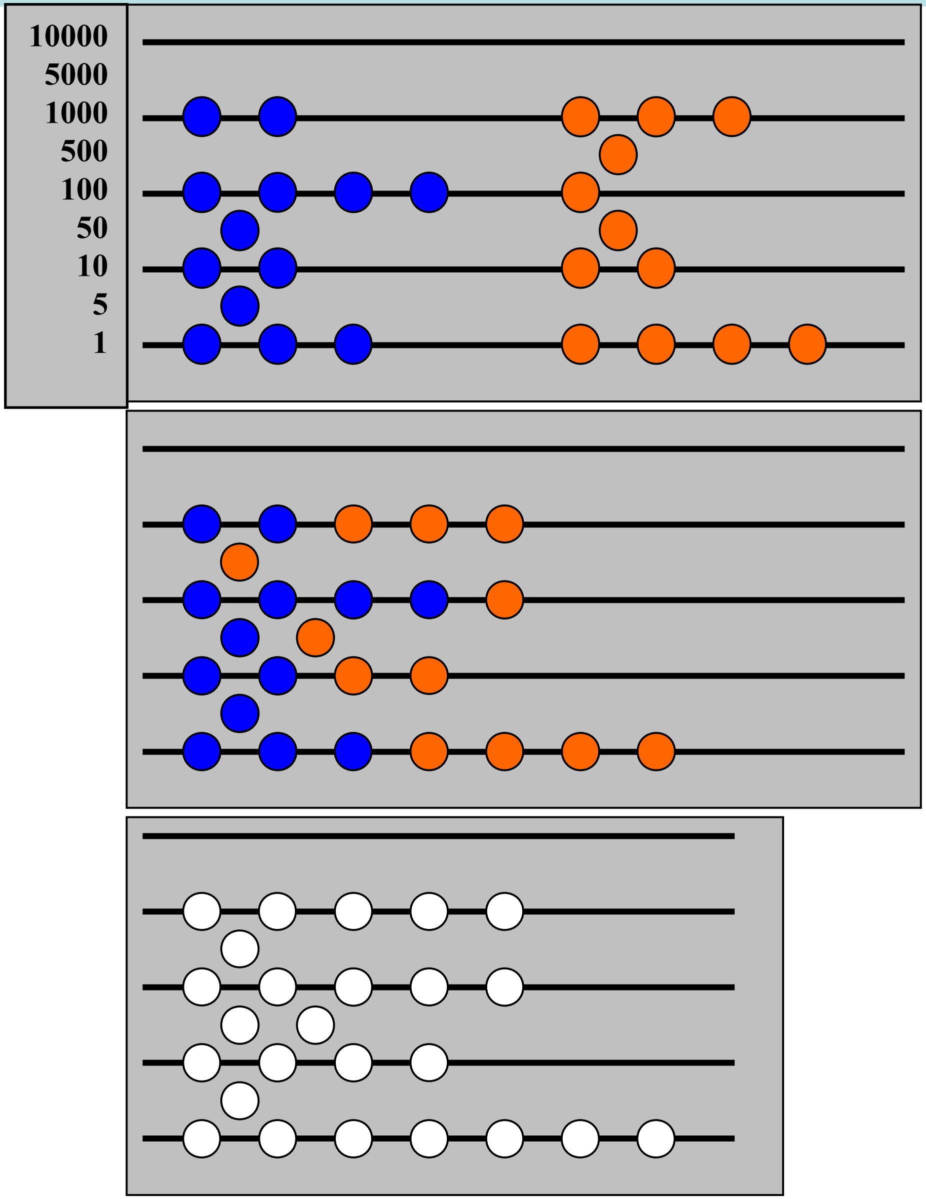
Erste Rechenhilfsmittel

Die salaminische Rechentafel, Fundort: Insel Salamis; geschätzte Datierung ca. 300 Jh.v.Chr.



Die Salaminische Rechentafel,
das bis heute einzige erhaltene große Rechenbrett der alten Kulturwelt.
Maße 149 × 75 × 4,5 (am Rand 7,5) cm.
Nationalmuseum, Athen.

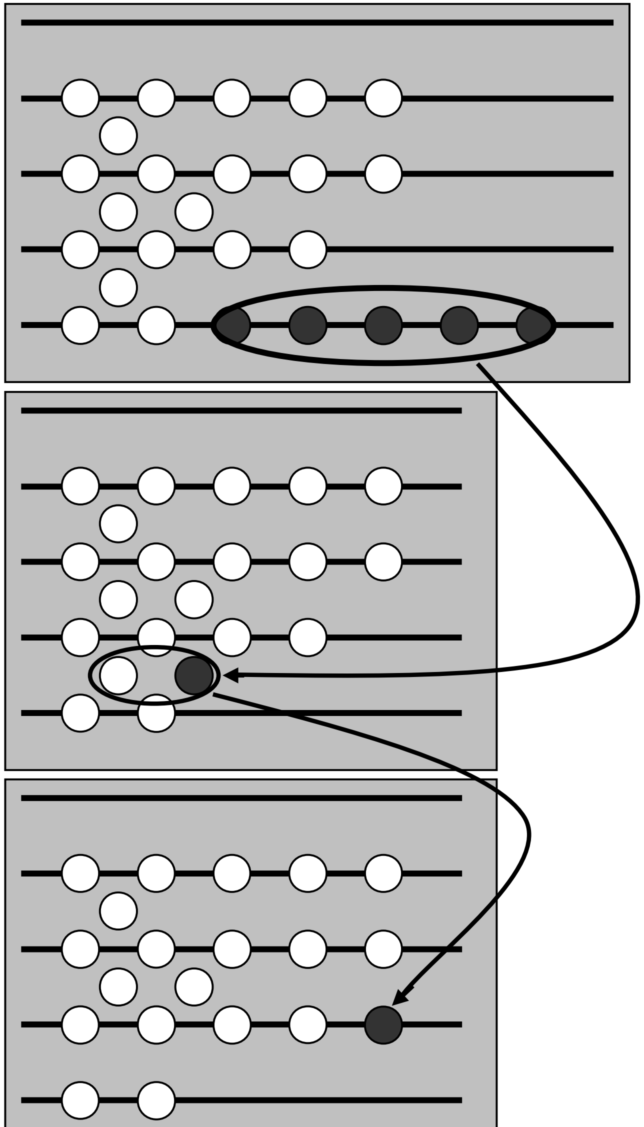
Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



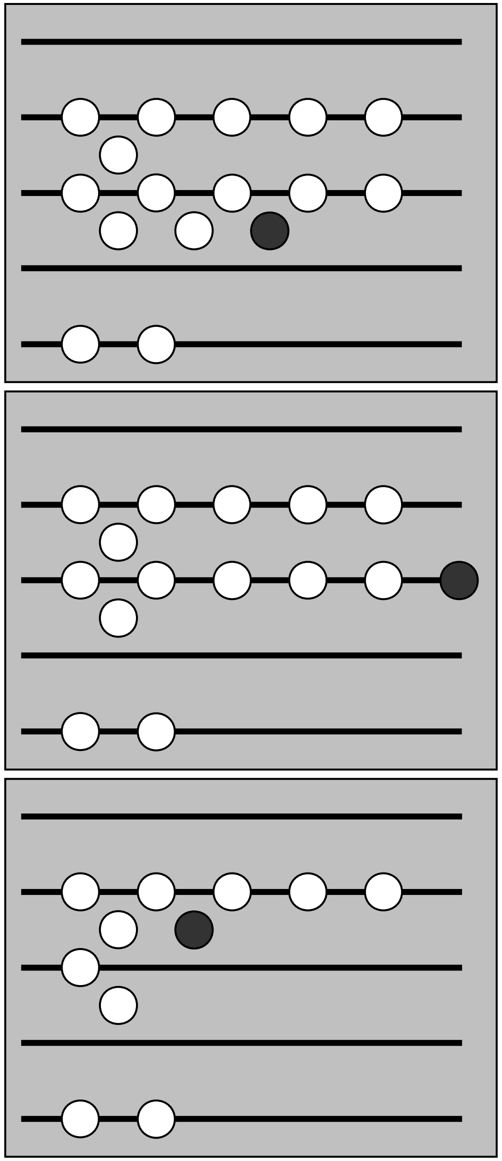
2478 + 3674

Die unterschiedliche Einfärbung der „Calculi“ sollte zu Beginn des Verfahrens der besseren Identifizierbarkeit der beiden Summanden dienen.
Für den weiteren Verlauf entfällt dieser Aspekt und die Calculi werden alle weiss eingefärbt.
Gelegentlich werden einige von ihnen zur Verdeutlichung des Verfahrens auch schwarz eingefärbt.

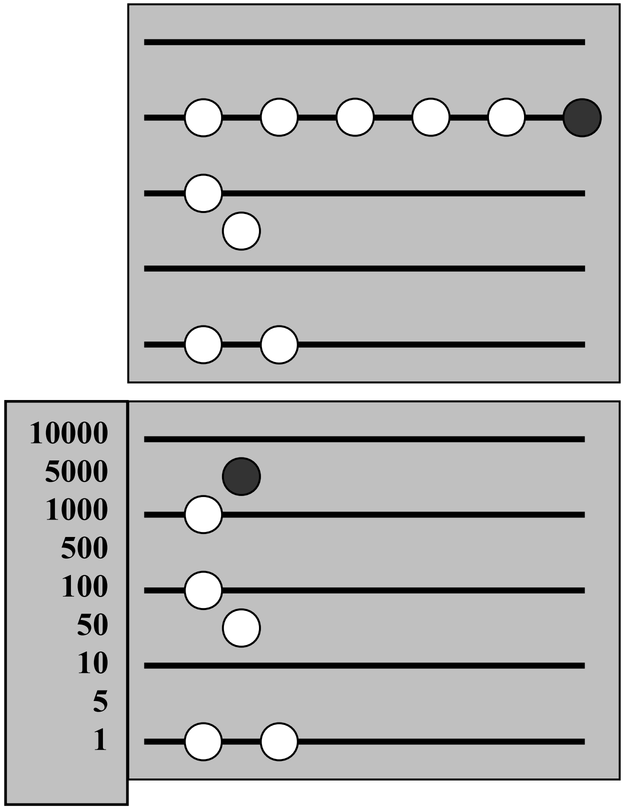
Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Ergebnis: 6152

Adam Ries: Rechenbücher

Das *erste Rechenbuch* von Adam Ries (1518)

Rechnung auff der linihen

Ries beschreibt darin das Rechnen auf den Linien eines Rechenbretts
.

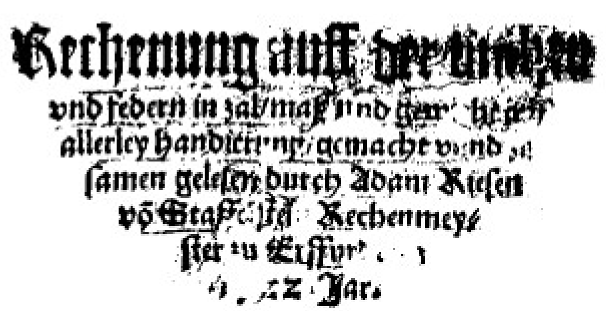
Es war also ganz dem Abakusrechnen gewidmet

Adam Ries: Rechenbücher

Das *zweite Rechenbuch* von Adam Ries (1522)

Rechenung auff der linihen und federn...

Neben dem Rechnen auf dem Rechenbrett beschreibt er in diesem Buch das Ziffernrechnen mit indischen/arabischen Ziffern. Zielgruppe waren Lehrlinge kaufmännischer und handwerklicher Berufe. Es wurde zu seinen Lebzeiten über hundertmal, bislang mindestens 120 mal aufgelegt.


Rechenung auff der linihen
vnd federn in zal/maß und gew
allerley handierung/gemacht vnd zu
samen gelesen durch Adam Riesen
vō Staffelstein Rechenmey-
ster zu Erffurt
Jar.

Titelblatt der Auflage 1522


Rechnung auff
der Linihen vnd Federn/
Auff allerley handthirung gemacht/
durch Adam Risen.
zum andern mal ubersehen.
vnd gemehret.
Anno M. D. XXXiij.

Titelblatt der Auflage 1532

Adam Ries: Rechenbücher

Das *dritte Rechenbuch* von Adam Ries (1550)

Rechenung nach der lenge/ auff den Linihen vnd Feder

Oft zitiert unter dem Kurztitel „Practica“. Das Buch zeigt erstmals auch ein Portrait des Autors, das als einziges zeitgenössisches Bild von Ries auch einen Hinweis auf sein Geburtsjahr gibt.

Der Siegeszug des Zehnersystems

Die Verbreitung des indischen (arabischen?) Zahlensystems dauerte mehrere Jahrhunderte.

Es gab viele Widerstände und Anfeindungen (heidnische Praxis, Teufelszeug, …).

Das Rechnen mit den Rechentischen wurde teilweise noch bis ins 18. Jahrhundert praktiziert.

Dennoch war der Siegeszug der indischen Zahlen nicht aufzuhalten.

Für den sich ausbreitenden Handel war wichtig, dass man mit diesen Zahlen nicht nur rechnen konnte, sondern dass die Rechnung zugleich ihre eigene *Dokumentation* war.

Das Bild rechts veranschaulicht den Streit zwischen den Rechentisch-Rechnern (*Abakisten*) und den Anhängern der indischen Methode (*Algoristen*).

Gregor Reisch:
Margarita Philosophica, Straßburg 1504

Was ist an den Stellenwertsystemen so wichtig?

Die Stellenwertdarstellung von (natürlichen) Zahlen bringt folgende Vorteile mit sich:

- Man benötigt nur relativ wenige (auf jeden Fall nur endlich viele) Grundsymbole, um jede (natürliche) Zahl, so groß sie auch sei, in eindeutiger Weise darzustellen.

- Aber dazu braucht man ein Symbol für die Null. Ohne Null kein Stellenwertsystem!

- Die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sind universell und in transparenter Weise ausführbar und sie sind relativ leicht zu erlernen. Heute ist dies Bestandteil des Mathematikunterrichts in den ersten Schuljahren; im Mittelalter gab es nur wenige Universitäten, an denen die „enorm schwierige“ Technik des Dividierens gelehrt wurde

(vgl. auch: Rede von Melanchton).

- Man gelangt in ganz natürlicher Weise zur Darstellung von Brüchen (z.B. Dezimalbrüche; allgemein: Systembrüche).

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ich beginne mit einem (sicher geläufigen) Beispiel aus unserem Zehnersystem

Die Zahlschreibweise 20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0
10000	1000	100	10	1
10*10*10*10	10*10*10	10*10	10	1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
2	0	5	3	4
$2 * 10^4$	$+\ 0 * 10^3$	$+\ 5 * 10^2$	$+\ 1 * 10^1$	$+\ 4 * 10^0$

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ein Beispiel aus dem Achtersystem

Die Zahlschreibweise 20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0
		Vierundsechziger	Achter	Einer
8*8*8*8	8*8*8	8*8	8	1
8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
2	0	5	3	4
Darstellung im Zehnersystem:				
Basiszahlen:				
4096	512	64	8	1
Wert der Zahl 20534 (Achtersystem) im Zehnersystem:				
8192	0	320	24	4
				= 8540

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ein Beispiel aus dem System zur Basis g

Die Zahlschreibweise   20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

<table>
<tr><td>Stufe 4</td><td>Stufe 3</td><td>Stufe 2</td><td>Stufe 1</td><td>Stufe 0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Einer</td></tr>
<tr><td>g*g*g*g</td><td>g*g*g</td><td>g*g</td><td>g</td><td>1</td></tr>
<tr><td>g^4</td><td>g^3</td><td>g^2</td><td>g^1</td><td>g^0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Darstellung im Zehnersystem:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Basiszahlen:</td></tr>
<tr><td>g^4</td><td>g^3</td><td>g^2</td><td>g^1</td><td>g^0</td></tr>
<tr><td colspan="5">Wert der Zahl 20534 (Achtersystem) im Zehnersystem:</td></tr>
<tr><td>$2 * g^4$</td><td>$0 * g^3$</td><td>$5 * g^2$</td><td>$3 * g^1$</td><td>$4 * g^0$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Das Dualsystem (Binärsystem) : Basis 2

Ziffern: 0, 1 *dual* *dezimal*

dual	dezimal	dual	dezimal
0	0	10000	16
1	1	10001	17
10	2	10010	18
11	3	10011	19
100	4	10100	20
101	5	10101	21
110	6	10110	22
111	7	10111	23
1000	8	11000	24
1001	9	11001	25
1010	10	11010	26
1011	11	11011	27
1100	12	11100	28
1101	13	11101	29
1110	14	11110	30
1111	15	11111	31

u.s.w.

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Das Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem) : Basis 16
Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

10	16
11	17
12	18
13	19
14	20
15	21
16	22
17	23
18	24
19	25
1A	26
1B	27
1C	28
1D	29
1E	30
1F	31

Die Hexadezimaldarstellung ist im Computerbereich die Standarddarstellung; z.B. zur Adressierung von Speicherbereichen. Eine zweistelliger Speicherblock für hexadezimale Darstellungen wird auch als ein *Byte* bezeichnet.

$\boxed{0}\boxed{0}$ … $\boxed{F}\boxed{F}$

Dies lässt die Adressierung von 16*16 = 256 Speicherzellen zu. Oft wird zur Adressierung auch ein Block aus 2 Bytes verwendet.

$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ … $\boxed{F}\boxed{F}\boxed{F}\boxed{F}$

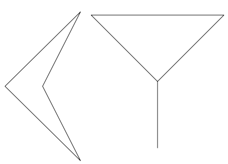
Dies macht die Adressierung von 16^4 = 65536 Speicherzellen möglich.

Probleme mit der babylonischen Zahl-Schreibweise

1. Wenn die (Basis-) Ziffern aus unzusammenhängenden Zeichen bestehen, geht die Eindeutigkeit der Interpretation verloren.

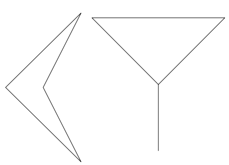
2. Die babylonische Zahldarstellung lässt die „Tabellenstruktur“ von Stellenwertsystemen nicht klar erkennen.

Beispiele: Zu (1.): unzusammenhängende Ziffern

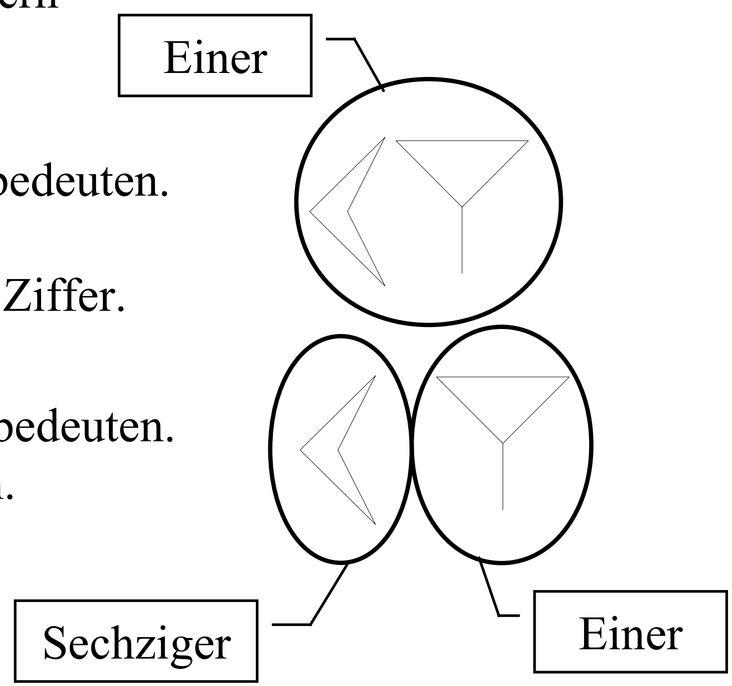


Dies könnte (dezimal) 11 bedeuten.

Dann wäre es eine einzige Ziffer.

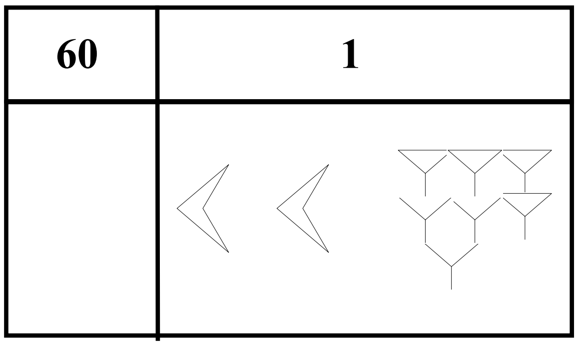


Dies könnte (dezimal) 601 bedeuten.
Dann wären es zwei Ziffern.

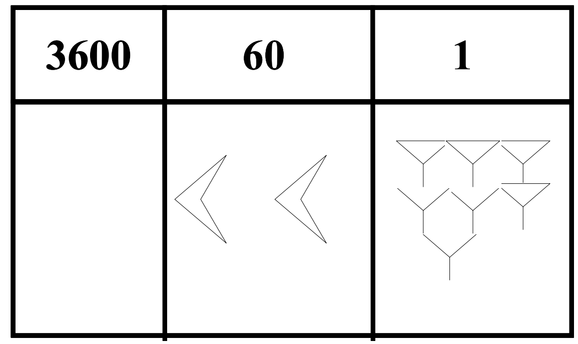


Probleme mit der babylonischen Zahl-Schreibweise

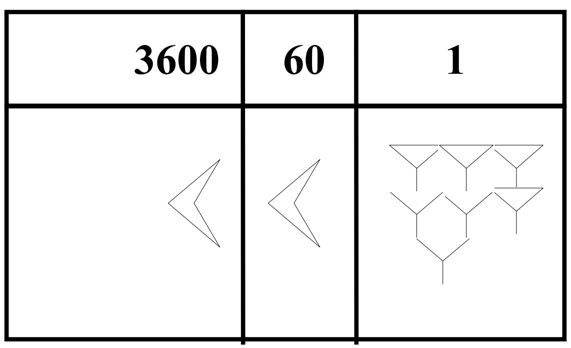
Beispiele: zu (2.): fehlende Eindeutigkeit der Tabellenstruktur



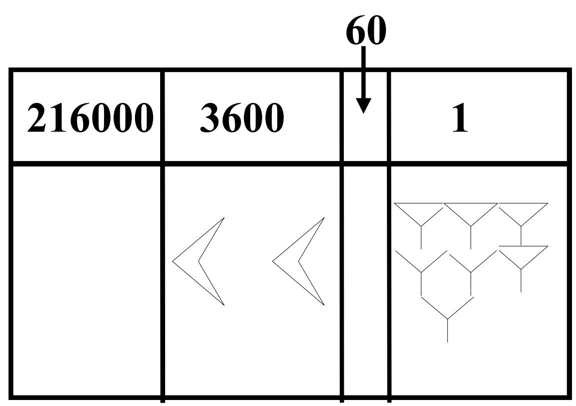
10+10+7 → 27



(10+10)*60+7 → 127



10*3600+10*60+7 →
36607



(10+10)*3600+7 →
72007

Philipp Melanchton (1497-1560) zur Arithmetik

Ich glaube, … noch etwas über die leichte Erlernbarkeit [der Arithmetik] anfügen zu müssen. Ich weiß, dass sich die jungen Leute durch das Vorurteil ihrer Schwierigkeit von diesen Wissenschaften abschrecken lassen. Aber hinsichtlich der Elemente der Arithmetik, die man normalerweise an den Schulen lehrt und die für die tägliche Praxis herangezogen werden, irren sie sich sehr, wenn sie meinen, sie seien ungemein schwer. Die Rechenkunst leitet sich unmittelbar aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes ab und besitzt Beweise mit dem höchsten Gewißheitsgrad. Daher können ihre Grundlagen weder unverständlich noch schwierig sein, die ersten Regeln sind im Gegenteil so klar, dass auch Kinder sie begreifen können, weil dieses ganze Wissensgebiet aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes hervorgeht. Zweitens erfordern die Regeln der Multiplikation und der Division zwar etwas mehr Genauigkeit, aber ihre Gründe können dennoch von aufmerksamen Schülern schnell begriffen werden. Diese Wissenschaft verlangt genauso Übung und praktische Anwendung wie alle anderen.

(Aus Philipp Melanchthons 1536 in lateinischer Sprache abgefasster Rede über den Nutzen der Arithmetik oder Vorrede zur Arithmetik des Georg Joachim Rheticus (1514 - 1576), Corpus Reformatorum 11, Sp. 284 - 292, übersetzt von Gerhard Wenig)

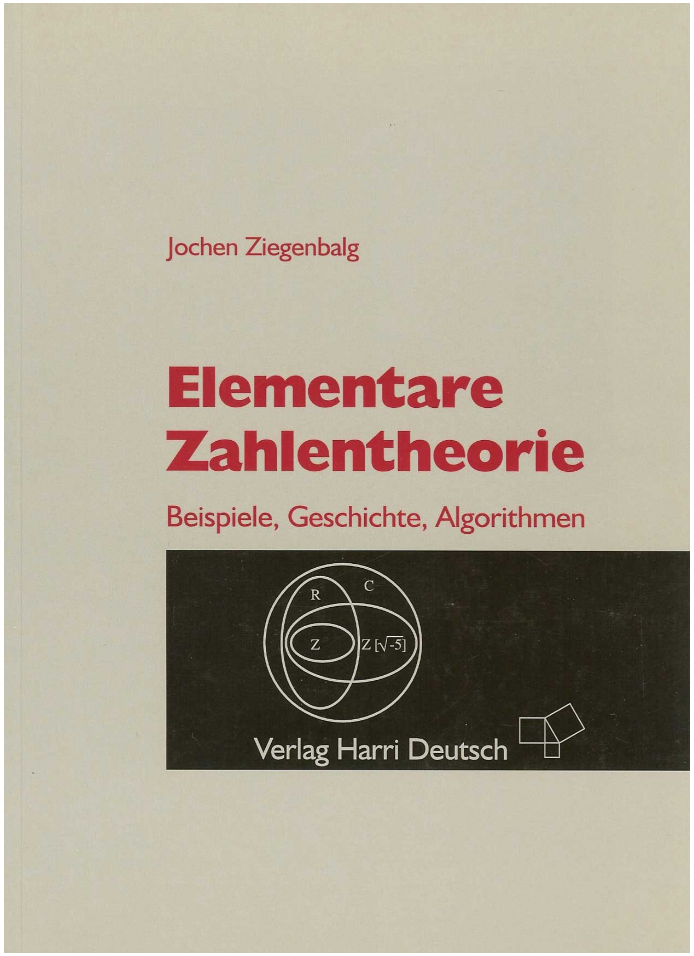
Mathematik und der mündige Bürger

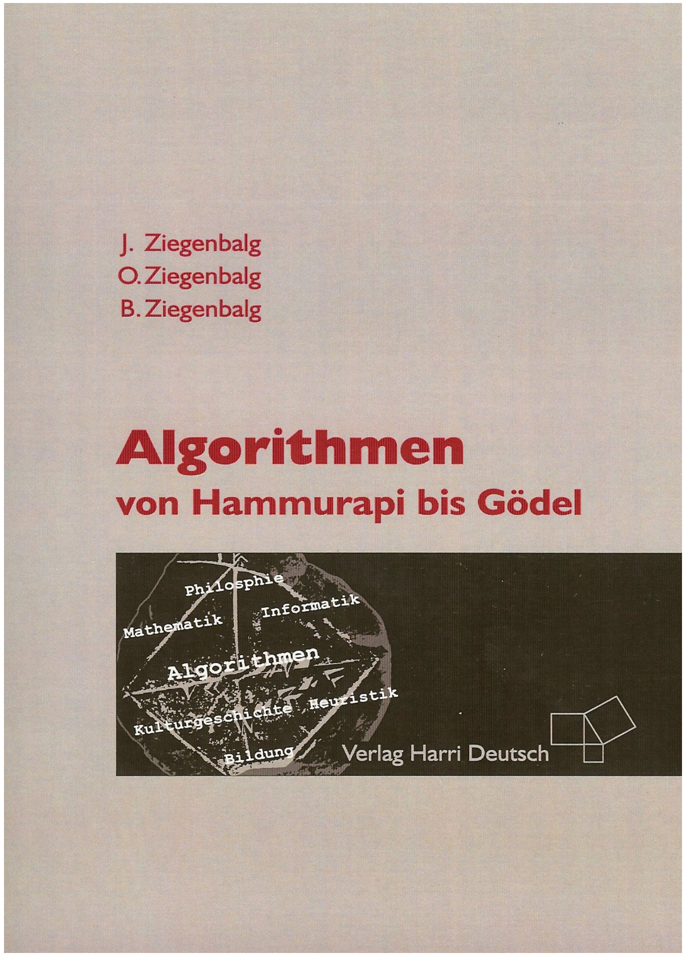
Zur Zeit von Philipp Melanchton war es nicht üblich, dass jedermann rechnen (oder auch schreiben) konnte. Wenn man etwas auszurechnen hatte, musste man in der Regel die Dienste eines (zu bezahlenden) Rechenmeisters in Anspruch nehmen, der die Rechnungen für seinen Kunden durchführte. Natürlich war der Kunde dem Rechenmeister im Hinblick auf die Korrektheit des Ergebnisses völlig ausgeliefert. Er hatte kaum die Möglichkeit, das Ergebnis des Rechenmeisters zu überprüfen.

Durch das Wirken der Mathematiker und in diesem Fall besonders auch der Rechenmeister wurde im Laufe der Zeit nahezu jedermann in die Lage versetzt, die Rechnungen des täglichen Lebens (und einiges darüber hinaus) selbst auszuführen.

Die Menschen gewannen, nicht zuletzt auch dadurch, ein erhebliches Maß an geistiger Autonomie und Mündigkeit -- und dies stellt eine wesentliche Voraussetzung für den aufgeklärten Bürger dar, ohne den ein demokratisches Staatswesen kaum möglich ist.

Danke für die Aufmerksamkeit


Jochen Ziegenbalg
Elementare Zahlentheorie
Beispiele, Geschichte, Algorithmen
R
C
Z
Z [√-5]
Verlag Harri Deutsch


J. Ziegenbalg
O. Ziegenbalg
B. Ziegenbalg
Algorithmen
von Hammurapi bis Gödel
Philosphie
Informatik
Mathematik
Algorithmen
Kulturgeschichte
Heuristik
Bildung
Verlag Harri Deutsch