Zahlbereichserweiterungen

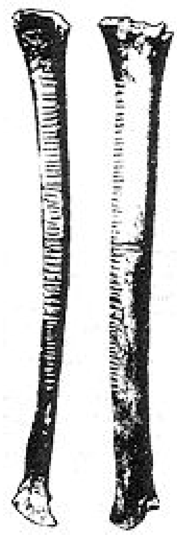
Ein Manuskript für die Arbeitsgemeinschaft *Diskrete Mathematik*
Heinrich Hertz Gymnasium, Berlin

Fragen, Korrekturen, Anregungen und Hinweise aller Art bitte an
Jochen Ziegenbalg *Email*: ziegenbalg.edu@gmail.com

1 Vorbemerkungen und Motivation

Am historischen Anfang der mathematischen Entwicklung standen (vor Tausenden von Jahren) die „Zählzahlen“ (eins, zwei, drei, vier, ...), die heute als *natürliche Zahlen* bezeichnet werden (in moderner Notation $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$). Die ältesten dokumentierten Beispiele für Zählvorgänge sind etwa 20.000 bis 30.000 Jahre alte in Tierknochen eingeritzte Markierungen; so z.B. der Ishango-Knochen (Kongo) oder der Wolfsknochen aus Unter-Wisternitz (Mähren); heute: Dolni Vestonice.

Ishango-Knochen (Kongo)



Wolfsknochen (Unter-Wisternitz)

Im folgenden sind zwar immer wieder historische Bemerkungen eingeflochten, Ziel des Manuskripts ist aber nicht, den sehr langwierigen und verwickelten historischen Prozess der Entwicklung der damit verbundenen Begriffe und Verfahren möglichst geschichtsgetreu nachzuzeichnen. Im Gegenteil: Die im folgenden beschriebenen Konstruktionen der Zahlbereiche gehen durchweg von der Begrifflichkeit der modernen Mathematik aus, wie sie sich erst im 20. Jahrhundert entwickelt hat.

Die natürlichen Zahlen, die in der modernen Mathematik üblicherweise mit Hilfe des Axiomensystems von G. Peano (1858-1932) konstruiert werden, stellen (gemeinsam mit ihrer Addition und Multiplikation) die Basis für die folgenden Ausführungen dar. Das Tripel aus natürlichen Zahlen, ihrer Addition und ihrer Multiplikation wird auch als ein „Verknüpfungsgebilde“ bezeichnet; in Zeichen: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Die Notwendigkeit von *Zahlbereichserweiterungen* entsteht u.a. dadurch, dass man versucht, gewisse Gleichungen möglichst allgemein lösbar zu machen, die in den bisherigen Zahlbereichen nicht lösbar sind.

Dies sei in diesem Manuskript anhand einer (recht groben) Skizze dargestellt. Die darin enthaltenen algebraischen Grundbegriffe wie *Halbgruppe*, *Gruppe*, *Körper*, *Schiefkörper*, *Vektorraum* u.a. spielen in diesem Manuskript keine tragende Rolle und werden an anderer Stelle behandelt.

1.1 Zum Hankelschen Permanenzprinzip

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics (G. H. Hardy, englischer Mathematiker 1877–1947)

Das mathematische Arbeiten besteht neben dem mathematischen Modellieren, dem mathematischen Problemlösen und dem mathematischen Beweisen auch in der Erschaffung neuer Objekte und Begriffe. Dabei hat man zwar in der Regel eine gewisse Freiheit (nach dem Motto „definieren kann man ja alles“), aber man kann sich bei der Umsetzung dieser Freiheit sehr wohl mehr oder auch weniger geschickt verhalten. Eine wichtige globale Leitlinie für die Formulierung von Begriffen und Definitionen ist das Hankelsche[1] *Permanenzprinzip*.

Die Ausgangssituation ist in der Regel von der folgenden Art: In einem bestimmten Gegenstandsbereich, etwa dem der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$, entwickeln sich im Laufe der Zeit gewisse Begriffe, Verfahrens- und Bezeichnungsweisen. Oft sind diese Begriffe mit „schönen“ oder fundamentalen mathematischen Gesetzen verbunden, die bei der Verwendung der Objekte immer wieder zur Anwendung kommen.

Im Laufe der Zeit erweitert sich das mathematische Wissen. Neue Gegenstands- und Objektbereiche werden entdeckt (oder unter mehr oder weniger großen Mühen entwickelt). Man denke etwa an die Entwicklung der Brüche, der negativen oder der komplexen Zahlen. Dies waren oft mühevolle Prozesse, die erst im Verlaufe von Jahrhunderten zu den heute gebräuchlichen Fassungen dieser Begriffe geführt haben. Wie auch immer – irgendwann einmal ist dann der neue Gegenstandsbereich, die neue Grundmenge da, und sehr bald versucht man dann auch, schon bekannte Operationen auf die Elemente der neuen Grundmenge zu übertragen. Eine *Leitidee* für die Definition von neuen Operationen ist entsprechend dem *Permanenzprinzip* der Wunsch, den bisher geltenden wichtigen Gesetzen bei der Erweiterung der Definitionen auf den neuen Gegenstandsbereich weiterhin zur Gültigkeit zu verhelfen.

Ein Beispiel: Ein besonders schöner und wichtiger Satz in der Grundmenge der natürlichen Zahlen ist das (sehr leicht mit der Anzahl der Faktoren zu begründende) Potenzgesetz $a^k + a^m = a^{k+m}$. Bei der Erweiterung des Zahlbereichs auf die Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Null oder auf die ganzen Zahlen stellt sich die Frage, wie man a^0 oder a^{-n} definieren sollte. Eine unter Schülern oft anzutreffende Meinung ist, dass a^0 als 0 definiert werden sollte, denn die Anzahl der Faktoren a ist Null und somit sollte es auch das Produkt aus Null Faktoren a sein. Dies hört sich zunächst durchaus plausibel an; würde man aber dieser Auffassung folgen, dann wäre z.B. $5^2 = 5^{2+0} \neq 5^2 \cdot 5^0$ und das ausserordentlich nützliche Potenzgesetz $a^k + a^m = a^{k+m}$ wäre nicht mehr universell anwendbar. Will man dagegen die Gültigkeit des Potenzgesetzes auch auf die Zahl Null und auf die negativen Zahlen ausdehnen, so erzwingt dies die Definitionen $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Denn aus $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$ folgt zwingend $a^0 = 1$ und aus $1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$ folgt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Definitionen $0! = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ u.s.w.

1.2 Erläuterung einiger mengentheoretischer Grundbegriffe

Zunächst seien einige mengentheoretische Grundbegriffe erläutert. A und B seien beliebige Mengen.

Das *cartesische Produkt* von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a, b) \ / \ a \in A \text{ und } b \in B\}$.

Eine *Relation* $\mathcal{R}$ zwischen den Elementen von A und den Elementen von B ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts von A und B: $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Der Text „$(a, b) \in \mathcal{R}$“ bedeutet also: Das Element a aus der Menge A steht in der Relation $\mathcal{R}$ zu dem Element b aus B. An Stelle von $(a, b) \in \mathcal{R}$ schreibt man meist $a\mathcal{R}b$.

Ist $A = B$ (dies ist ein häufiger anzutreffender Spezialfall), so spricht man von einer Relation in A

[1] Hermann Hankel (1839-1873), *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen in zwei Theilen, §3 Princip der Permanenz formaler Gesetze*, Leipzig 1867

oder auf A (letzteres meist, wenn jedes Element $x \in A$ mindestens einmal (für ein $y \in A$) in der Form $x\mathcal{R}y$ vorkommt).

Beispiel: Die Teilbarkeitsrelation in $\mathbb{N}$: $\mathcal{T} = \{(a, b) \ / \ \exists x \in \mathbb{N} \text{ mit } b = a \cdot x\}$. Als Zeichen für die Teilbarkeitsrelation verwendet man auch oft einen senkrechten Strich: $a \mid b \Leftrightarrow$ *a teilt b* $\Leftrightarrow a\mathcal{T}b$.

Einige wichtige *Eigenschaften* von Relationen:

- Die Relation $\mathcal{R}$ heisst *reflexiv*, wenn für alle x gilt: $x\mathcal{R}x$.
- Die Relation $\mathcal{R}$ heisst *symmetrisch*, wenn für alle x und alle y gilt: Aus $x\mathcal{R}y$ folgt stets $y\mathcal{R}x$.
- Die Relation $\mathcal{R}$ heisst *antisymmetrisch*, wenn für alle x und alle y gilt: Aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}x$ folgt stets $x = y$.
- Die Relation $\mathcal{R}$ heisst *transitiv*, wenn für alle x, y und z gilt: Aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ folgt stets $x\mathcal{R}z$.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heisst *Äquivalenzrelation.* Die Relation $a \equiv b \ (mod\, m)$, in Worten: „a und b lassen denselben Divisionsrest bei Division durch die (fest vorgegebene) natürliche Zahl m" ist z.B. eine fundamentale Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen ($\curvearrowright$ „modulare Arithmetik"). Äquivalenzrelationen werden im folgenden bei den Zahlbereichserweiterungen (wie überhaupt in der Algebra und Zahlentheorie bzw. in der gesamten Mathematik) eine fundamentale Rolle spielen.

Eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heisst *Ordnungsrelation.* Die Teilbarkeitsrelation ist z.B. eine Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen – nicht aber auf der Menge der ganzen Zahlen (Gegenbeispiel?).

Bemerkung: Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge A zerlegt diese Menge in eine Vereinigung disjunkter (d.h. elementefremder) Teilmengen, die als *Äquivalenzklassen* bezeichnet werden. Jede der Äquivalenzklassen ist charakterisiert durch jedes beliebige in ihr enthaltene Element. Jedes solche Element x heisst *Vertreter* (oder *Repräsentant*) seiner Äquivalenzklasse und die Äquivalenzklasse mit dem Repräsentanten x wird meist durch $\overline{x}$ gekennzeichnet. Die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation $\mathcal{R}$ auf A wird symbolisch durch $A/\mathcal{R}$ bezeichnet (in Worten: A modulo $\mathcal{R}$). Wenn es keine Verwechslungsgefahr im Hinblick auf die Relation gibt, schreibt man auch kurz $\overline{A}$ für die Menge der Äquivalenzklassen.

2 Von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen

Wir beginnen mit der Menge $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ der natürlichen Zahlen sowie deren üblicher Addition und Multiplikation, also mit dem Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. In dieser Menge ist z.B. die Gleichung $x + 7 = 5$ nicht lösbar. Die Lösung von Problemen dieser Art führt wie folgt zur Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

1. Man bildet das *cartesische Produkt* $\mathcal{P} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. In $\mathcal{P}$ definiert man die Relation $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
3. Man zeigt, dass die so definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist. Die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen sei, wie üblich, mit $\overline{\mathcal{P}}$ bezeichnet.
4. In $\overline{\mathcal{P}}$ wird auf der Basis der Addition von $\mathbb{N}$ (nach dem Prinzip der „komponentenweisen Konstruktion") wie folgt eine neue Verknüpfung eingeführt
$$\overline{(a, b)} \oplus \overline{(c, d)} := \overline{(a + c, b + d)}$$
5. Es ist zu zeigen: Die neue Verknüpfung $\oplus$ ist *wohldefiniert*, d.h. die Summe ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Anders ausgedrückt: Ist $\overline{(a_1, b_1)} = \overline{(a_2, b_2)}$ und $\overline{(c_1, d_1)} = \overline{(c_2, d_2)}$, so ist stets
$$\overline{(a_1, b_1)} \oplus \overline{(c_1, d_1)} = \overline{(a_2, b_2)} \oplus \overline{(c_2, d_2)}$$

6. Man zeigt: Die Restklasse $\overline{(1,1)} \in \overline{\mathcal{P}}$ ist ein *neutrales Element* bezüglich der Operation $\oplus$; d.h. für alle $\overline{(a,b)}$ in $\overline{\mathcal{P}}$ gilt
$$\overline{(a,b)} \oplus \overline{(1,1)} = \overline{(a,b)}$$

7. Ein Element $\overline{(x,y)}$ mit der Eigenschaft $\overline{(a,b)} \oplus \overline{(x,y)} = \overline{(1,1)}$ wird als *inverses Element* zu $\overline{(a,b)}$ bezüglich der Operation $\oplus$ bezeichnet.
Man zeigt: Zu jedem Element $\overline{(a,b)}$ in $\overline{\mathcal{P}}$ ist $\overline{(b,a)}$ ein inverses Element. d.h. es gilt
$$\overline{(a,b)} \oplus \overline{(b,a)} = \overline{(1,1)}$$

8. Man betrachtet nun die Teilmenge $\mathcal{N} := \{\overline{(x,y)} \in \overline{\mathcal{P}} \ / \ x > y\}$ von $\overline{\mathcal{P}}$.

9. Man zeigt: Die Abbildung $\iota : \ x \mapsto \overline{(x+1,1)}$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathcal{N}$.

10. Man zeigt: Die Abbildung ι ist „verknüpfungstreu“ bezüglich der Addition in $\mathbb{N}$; d.h.
$$\iota(x+y) = \iota(x) \oplus \iota(y)$$
für alle x und y. Eine bijektive Abbildung, die verknüpfungstreu ist, wird auch als *Isomorphismus* bezeichnet. Isomorphe Strukturen werden als „im wesentlichen gleich“ angesehen und sehr oft schlichtweg miteinander identifiziert.

    Man schreibt also $\mathbb{N}$ an Stelle von $\mathcal{N}$ und $+$ an Stelle von $\oplus$. Das neutrale Element $\overline{(1,1)}$ wird als 0 geschrieben (in Worten: Null); für das Element $\overline{(1,x+1)}$ schreibt man $-x$ (minus x) und an Stelle von $\overline{\mathcal{P}}$ schreibt man $\mathbb{Z}$. Die Elemente von $\mathbb{Z}$ nennt man *ganze Zahlen.* Die von $\mathbb{N}$ bekannte Subtraktion wird auf ganz $\mathbb{Z}$ ausgedehnt durch die Definition $a - b := a + (-b)$.

    Die Existenz des Isomorphismus $\iota : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ bedeutet, dass man sich $\mathbb{N}$ als in $\mathbb{Z}$ *eingebettet* denken kann und man schreibt entsprechend $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Die Abbildung ι wird dementsprechend auch als eine *Einbettung* von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Bemerkungen: Die obigen Behauptungen sind natürlich alle zu beweisen. Da die Beweise oft wirklich trivial sind und nur auf der direkten Umsetzung der Definitionen beruhen, wurden sie bisher weggelassen. Im folgenden sollen nur exemplarisch die Transitivität der oben definierten Relation $\sim$ und die Wohldefiniertheit der Addition $\oplus$ bewiesen werden.

Zur Transitivität der Relation $\sim$:
Zu Zeigen ist: Aus $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$ folgt stets $(a,b) \sim (e,f)$.
Es gelte also für beliebige natürliche Zahlen $a+d = b+c$ und $c+f = d+e$. Daraus folgt $a+d+c+f = b+c+d+e$ und somit $a+f = b+e$, d.h. $(a,b) \sim (e,f)$.

Zur Wohldefiniertheit der Operation $\oplus$:
Zu Zeigen ist: Aus $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ und $(c_1,d_1) \sim (c_2,d_2)$ folgt stets
$$\overline{(a_1,b_1)} \oplus \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_2,b_2)} \oplus \overline{(c_2,d_2)}$$
Nach Definition ist
$$\overline{(a_1,b_1)} \oplus \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_1+c_1, b_1+d_1)}$$
und
$$\overline{(a_2,b_2)} \oplus \overline{(c_2,d_2)} = \overline{(a_2+c_2, b_2+d_2)}$$
Im Hinblick auf die behauptete Gleichheit dieser Summen ist also zu zeigen: $(a_1+c_1)+(b_2+d_2) = (b_1+d_1)+(a_2+c_2)$. Nach Voraussetzung und Definition der Relation $\sim$ gilt $a_1+b_2 = b_1+a_2$ und $c_1+d_2 = d_1+c_2$ und die „Addition“ dieser Gleichungen liefert $(a_1+b_2)+(c_1+d_2) = (b_1+a_2)+(d_1+c_2)$. Wegen der Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen ist dies genau das Gesuchte und die Behauptung (Wohldefiniertheit) ist bewiesen.

Übung: Man überprüfe die (eben bewiesenen) Eigenschaften der Transitivität und der Wohldefiniertheit an konkreten Zahlenbeispielen.

Die ganzen Zahlen werden üblicherweise im x/y-Diagramm quasi „kanonisch“ dargestellt als *ganzzahlige Punkte* auf der x-Achse.

Historische Bemerkungen: Die negativen Zahlen standen kultur- und wissenschaftsgeschichtlich latent schon sehr lange im Raum, etwa bei den Chinesen und Indern. Der Grieche Diophant von Alexandria formulierte im 3. Jahrhundert n. Chr. die Regeln: Minus mal minus ergibt plus, minus mal plus ergibt minus. Erst bei Leonardo von Pisa, genannt „Fibonacci“, trat im 12. Jahrhundert eine negative Zahl als Lösung einer Gleichung auf. Je nach Anwendungsgebiet wurden negative Zahlen gelegentlich auch als „Schulden“ interpretiert. Bis zum heutigen Tage werden sie in Bilanzen manchmal rot geschrieben. Viele Mathematiker oder Rechenmeister lehnten negative Zahlen bis ins 16. und 17. Jahrhundert ab. Erst seit dem 19. Jahrhundert werden negative Zahlen universell akzeptiert und systematisch verwendet.

3 Von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen

In der Menge der ganzen Zahlen ist z.B. die Gleichung $4 \cdot x = 3$ nicht lösbar. Die Lösung dieses Problems führt wie folgt zur Konstruktion der Brüche bzw. der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Im Prinzip folgt die Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen weitgehend dem Schema der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen und soll deshalb nicht noch einmal in extenso wiederholt werden. Im folgenden werden nur noch die besonderen Spezifika dieses Falles dargestellt.

1. Man definiert zunächst $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus 0$ und betrachtet als neue Grundmenge jetzt das cartesische Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

2. In dieser Menge definiert man (unter Verwendung der gewöhnlichen Multiplikation ganzer Zahlen) die Relation $\wr$ wie folgt: $(a, b) \wr (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b.$ Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

3. Für die Äquivalenzklasse $\overline{(a, b)}$ verwendet man die Schreibweise $\frac{a}{b}$ und bezeichnet dies als einen *Bruch*. Man nennt a den *Zähler* und b den *Nenner* des Bruches.

4. Für die Menge aller Äquivalenzklassen verwendet man die Bezeichnung $\mathbb{Q}$.

5. Man führt in $\mathbb{Q}$ (unter Zuhilfenahme der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von $\mathbb{Z}$) die Operationen $\oplus$ und $\otimes$ wie folgt ein

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

6. Die Abbildung $\eta : x \mapsto \frac{x}{1}$ ist eine Einbettung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. An Stelle von $\frac{x}{1}$ schreibt man üblicherweise nur x, an Stelle von $\oplus$ schreibt man wieder nur einfach $+$ und für die Multiplikation verwendet man wieder den „Malpunkt“ $\cdot$ an Stelle von $\otimes$ (wobei der Malpunkt gelegentlich auch weggelassen werden kann, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht).

7. Das multiplikativ neutrale Element (*Einselement*) von $\mathbb{Q}$ ist 1. Zu jedem Element $\frac{a}{b}$ (mit $a \neq 0$) ist $\frac{b}{a}$ das multiplikativ inverse Element (auch „Kehrwert“ von $\frac{a}{b}$ genannt). Ist x ein von Null verschiedenes Element von $\mathbb{Q}$, so ist für die Bezeichnung seines Inversen auch die Bezeichnung x^{-1} üblich (und nach dem *Permanenzprinzip* sinnvoll); also z.B. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Man kann z.B. mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren zeigen, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, dass es also eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gibt.

Bemerkung zur Notwendigkeit, die Null als Nenner auszuschliessen: Falls die Zahl Null in die Paarmengenbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ einbezogen worden wäre, falls man also $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als neue Grundmenge genommen hätte, dann hätte auch das Element 0 ein multiplikativ Inverses 0^{-1} mit der Eigenschaft $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Andererseits kann man aber auch leicht zeigen, dass für alle x auch stets $0 \cdot x = 0$ ist. Dann wäre also $0 = 1$ und somit gälte für jedes Element x: $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0$ und der neu konstruierte Rechenbereich bestünde nur aus dem einen Element 0.

Die rationalen Zahlen werden üblicherweise im x/y-Diagramm dargestellt als *rationale Punkte* auf der x-Achse. Sie liegen „dicht" auf der x-Achse, d.h. zwischen je zwei verschiedenen rationalen Punkten auf der x-Achse liegt stets (mindestens) ein weiterer rationaler Punkt.

Übung: Man führe die Beweise zu den Behauptungen in den obigen Konstruktionsschritten aus.

Übung: Man gebe einen solchen „Zwischenpunkt" zwischen zwei beliebigen rationalen Punkten konkret an und zeige, dass daraus folgt, dass zwischen zwei rationalen Punkten stets unendlich viele weitere rationale Punkte liegen.

Bemerkung: In kulturgeschichtlicher Hinsicht verlangte die Beschäftigung mit den Brüchen (d.h. den positiven rationalen Zahlen) weit weniger Überwindungen als mit den negativen Zahlen. Das Dividieren und die Brüche waren in der Antike bereits bei den Babyloniern und Ägyptern ganz natürliche Bestandteile der Mathematik. Auch in der Alltagssprache werden Begriffe wie einhalb, dreiviertel u.s.w. in ganz natürlicher Weise verwendet und verstanden. Vom „ontologischen" Standpunkt aus betrachtet, sind die Brüche also seit jeher als weit weniger problematisch anzusehen als etwa die negativen oder gar die komplexen Zahlen.

4 Von den rationalen Zahlen zu den algebraischen Zahlen

In den rationalen Zahlen ist z.B. die Gleichung $x^2 = 3$ nicht lösbar. Probleme dieser Art führen zur Einführung der algebraischen Zahlen. Man kann die Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ auch als Nullstelle des Polynoms $x^2 - 3$ ansehen. Ganz allgemein bezeichnet man die Nullstellen beliebiger Polynome mit rationalen Koeffizienten als *algebraische Zahlen*. Für die Menge der algebraischen Zahlen wird gelegentlich das Symbol $\mathbb{A}$ verwendet.

Man kann zeigen, dass die Menge der algebraischen Zahlen *abzählbar* ist (Grundidee: Induktion nach dem Grad des Polynoms).

Die Standardbezeichnung für die Lösungen (Nullstellen, Wurzeln, „Radikale") von Polynomen der Form $x^n - a$ mit $a \in \mathbb{Q}$ ist (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens): $\sqrt[n]{a}$. Das Hankelsche *Permanenzgesetz* lässt auch die alternative Schreibweise $a^{\frac{1}{n}}$ als sinnvoll erscheinen.

Beispiel: Der *goldene Schnitt* beschreibt wie folgt ein bestimmtes Teilungsverhältnis der Einheitsstrecke:

$$\text{Gesamtstrecke : grössere Teilstrecke} = \text{grössere Teilstrecke : kleinere Teilstrecke.}$$

Algebraisch ausgedrückt ist er also gegeben durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Er ist also eine Nullstelle des (quadratischen) Polynoms $x^2 + x - 1$. Lösungsverfahren für derartige quadratische Gleichungen waren schon den Babyloniern (ca. 2000 v. Chr.) bekannt. Das heute in der Schule gelehrte Standardverfahren liefert die (formalen) Lösungen $(\sqrt{5} - 1)/2$ (numerischer Näherungswert: 0,618) und $-(\sqrt{5} + 1)/2$, von denen von der gegebenen Problemstellung her nur der erste Wert in Frage kommt.

Eine leicht modifizierte Definition des goldenen Schnitts lautet

$$\text{Gesamtstrecke : Einheitsstrecke} = \text{Einheitsstrecke : (Gesamtstrecke - Einheitsstrecke).}$$

Im Sinne dieser alternativen Definition ist er die Lösung der Gleichung

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{y-1}$$

Und von den Lösungen $(\sqrt{5}+1)/2$ (numerischer Näherungswert: 1,618) und $-(\sqrt{5}-1)/2$ kommt von der Sache her auch wieder nur die Positive in Frage.

In der Kunst und der Architektur werden Skulpturen und Gebäude, bei deren Konstruktion der goldene Schnitt als Konstruktionsprinzip angewandt wird, unter ästhetischen Gesichtspunkten als besonders schön oder „ausgewogen“ angesehen. Der erste Künstler, der von diesem Prinzip bewusst Gebrauch gemacht haben soll, war der Grieche Phidias (ΦΙΔΙΑΣ, 480-430 v. Chr.). Ihm zu Ehren wird der goldene Schnitt symbolisch meist mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens geschrieben:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$$

Die Lösungen quadratischer Gleichungen wurden in systematischer Form von dem persisch-arabischen Wissenschaftler *al-Khwarizmi* (etwa 780-850 n. Chr.) erarbeitet. Da ihm keine negativen Zahlen zur Verfügung standen, musste er die Gleichungstypen so formulieren, dass nur positive Zahlen aufgeschrieben wurden. Dies führte zu den folgenden sechs Typen.

- Typ: quadratischer Term gleich linearer Term (in heutiger Schreibweise: $a \cdot x^2 = b \cdot x$)
- Typ: quadratischer Term gleich Zahl ($a \cdot x^2 = c$)
- Typ: linearer Term gleich Zahl ($b \cdot x = c$)
- Typ: quadratischer Term plus linearer Term gleich Zahl ($a \cdot x^2 + b \cdot x = c$)
- Typ: quadratischer Term plus Zahl gleich linearer Term ($a \cdot x^2 + c = b \cdot x$)
- Typ: linearer Term plus Zahl gleich quadratischer Term ($b \cdot x + c = a \cdot x^2$)

Al-Khwarizmi stellte dies in seinem einflussreichen Buch *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al jabr w'al-muqabala* (frei übertragen etwa: Das Buch vom Rechnen durch Ergänzung und Gegenüberstellung) dar. Das mathematische Teilgebiet der Algebra hat sich aus dem Gleichungslösen entwickelt und aus dem Bestandteil „al jabr“ des Buchtitels entwickelte sich der Begriff der Algebra.

In heutiger Darstellung behandelt man im Kontext der quadratischen Gleichungen i.a. nur noch einen Gleichungstyp. Die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ hat für $a \neq 0$ die Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da a von Null verschieden ist, kann man die quadratische Gleichung mit a „durchdividieren“. Man erhält so eine Gleichung, die meist in der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ geschrieben wird. Sie hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Einige Bemerkungen zur weiteren Entwicklung der Algebra: Als *Cossisten* bezeichnet man im ausgehenden Mittelalter die Verfasser mathematischer Schriften zum Lösen von Gleichungen. Das Wort „Coß“ leitet sich her von der Bezeichnung für *Ding* oder *Sache*. Die gesuchte Größe, die aus den Gleichungen zu bestimmen war, wurde anfangs verbal als „Ding“ notiert. Lateinisch hieß dies res, italienisch cosa, deutsch Coß. Die Coß nahm eine Entwicklung, die später in die Symbolsprache der Algebra und die Algebraisierung mathematischer Theorien einmündete.

Motiviert durch die Erfolge bei der Lösung von quadratischen Gleichungen durch geschlossene Formeln mit Hilfe von Wurzelausdrücken versuchten die Cossisten, eine „ars magna“, eine allgemeine

Kunst zur Lösung von Gleichungen dritten, vierten, fünften und höheren Grades zu finden. *Scipione del Ferro* (1465–1526) und unabhängig davon der Rechenmeister *Niccolo Tartaglia* (1500–1557) entdeckten die Lösungsformel für kubische Gleichungen im Jahre 1500 bzw. 1535. *Girolamo Cardano* (1501–1576) drängte Tartaglia, ihm die Lösung mitzuteilen. Nach einiger Zeit kam Tartaglia diesem Wunsche nach. Entgegen seinem Versprechen, die Formel geheim zu halten, veröffentlichte Cardano sie unter seinem Namen in dem Buch *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (Die große Kunst oder über die algebraischen Regeln). Das Plagiat machte sich bezahlt: Die Formel ist noch heute als „Cardanische“ Formel bekannt. Ein Höhepunkt des Cossismus war mit dem Auftreten von *François Vieta* (1540–1603) erreicht. Sein „Satz von Vieta“ stellt den folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Nullstellen quadratischer Gleichungen her: Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $\quad x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad$ gilt

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

und somit

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Auf Vieta geht auch unsere heutige „Buchstabenalgebra“ zurück.

Schon für Gleichungen dritten Grades wird die Darstellung der Lösung durch Wurzelausdrücke sehr kompliziert. Moderne Computeralgebra Systeme sind in der Regel in der Lage, die Lösung von Gleichungen dritten Grades zu ermitteln. Das System *Maxima* liefert z.B. die folgenden drei Lösungen für die Gleichung $x^3 + p \cdot x^2 + q \cdot x + r = 0$:

$$x_1 = \left(-\frac{\sqrt{-3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}} - \frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}} +$$
$$\frac{\left(\frac{\sqrt{-3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(p^2-3q\right)}{9\left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}}-\frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{p}{3}$$

$$x_2 = \left(\frac{\sqrt{-3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}} - \frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}} +$$
$$\frac{\left(-\frac{\sqrt{-3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(p^2-3q\right)}{9\left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}}-\frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{p}{3}$$

$$x_3 = \left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}} - \frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}} +$$
$$\frac{p^2-3q}{9\left(\frac{\sqrt{27r^2+\left(4p^3-18pq\right)r+4q^3-p^2\,q^2}}{2\,3^{\frac{3}{2}}}-\frac{27r-9pq+2p^3}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{p}{3}$$

Die Frage, ob alle Polynome mit rationalen Koeffizienten Nullstellen besitzen, die sich als endliche algebraische Komposition von Wurzelausdrücken (also nur unter Verwendung der Grundrechenarten bezogen auf rationale Zahlen und Wurzelausdrücke aus rationalen Zahlen) schreiben lassen, hat in der Geschichte der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt. Ausgehend von den Erfolgen bei Gleichungen 2-ten, 3-ten und 4-ten Grades war man sehr lange davon überzeugt, dass eine entsprechende Darstellung durch (wenn u.U. auch sehr komplizierte) Wurzelausdrücke für alle Polynomgleichungen mit rationalen Koeffizienten möglich sein müsse. Erst *Nils Henrik Abel* (1802-1829) und *Evariste Galois* (1811-1832, $\curvearrowright$ *Galois*-Theorie) konnten zeigen, dass die Nullstellen von Polynomen 5-ten und höheren Grades i.a. keine Wurzeldarstellung besitzen. Mit anderen Worten: Polynomgleichungen 5-ten und höheren Grades sind i.a. nicht durch Radikale lösbar (Satz von Abel-Ruffini, 1924). Algebraische Zahlen, die nicht durch Wurzelausdrücke darstellbar sind, werden gelegentlich (vgl. P. Pesic: Abels Beweis; Springer-Verlag, Berlin 2005) als *überradikale Zahlen* bezeichnet. Die Lösungen von Polynomgleichungen fünften und höheren Grades lassen sich mit Hilfe „elliptischer Funktionen" ausdrücken.

Für konkrete Anwendungen in der uns umgebenden physischen Welt reichen allerdings meist numerische Näherungslösungen von Polynomgleichungen aus.

Im Vorgriff auf die weiter unten noch einzuführenden Begriffe sei hier bereits erwähnt, dass algebraische Zahlen reell oder auch komplex sein können.

5 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

In den rationalen Zahlen ist z.B. die Gleichung $x = lim(1 + 1/n)^n$ nicht lösbar. Probleme dieser Art führen zur Einführung der reellen Zahlen. Die entsprechende Zahlbereichserweiterung wird oft mit Hilfe von *Intervallschachtelungen* (oder aus historischer Sicht mit Hilfe von „*Dedekindschen Schnitten*") konstruiert; dies sei hier aber nicht näher ausgeführt.

Für die Lösung im obigen Beispiel wird heute die Bezeichnung e (*Eulersche Zahl* bzw. *Basis des natürlichen Wachstums*) verwendet (numerische Approximation: $e = 2.718281828459...$). Ihre Dezimalzahldarstellung bricht nicht ab und wird auch nicht periodisch.

Die Standard-Bezeichnung für die Menge der reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$.

Reelle Zahlen werden im x/y-Diagramm in der Regel als Punkte auf der x-Achse dargestellt. Sie füllen die x-Achse komplett und lückenlos aus.

Nicht-rationale reelle Zahlen werden als *irrational* und nicht-algebraische reelle Zahlen werden als *transzendent* bezeichnet. Die berühmtesten transzendenten Zahlen sind die *Basis des natürlichen Wachstums* e und die *Kreiszahl* π. Man kann (z.B. mit dem 2. Cantorschen Diagonalverfahren) zeigen, dass die Menge reellen Zahlen nicht abzählbar, dass sie also *überabzählbar* ist. Da die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist, muss die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar sein; d.h. es gibt sehr viel mehr transzendente als algebraische Zahlen.

Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang ist der *Satz von Gelfond-Schneider* (1934; 1935): Es seien a und b algebraische Zahlen, $a \neq 0, a \neq 1$ und b irrational. Dann ist die Potenz a^b eine transzendente Zahl.

6 Von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen

In den reellen Zahlen ist z.B. die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösbar (denn das Quadrat jeder reellen Zahl ist positiv oder gleich Null). Die Lösung dieses Problems führt wie folgt zur Konstruktion der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Man bildet die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und definiert neue Operationen durch

$$\begin{aligned}
(a,b) \oplus (c,d) &= (a+b, c+d) \\
(x,0) \otimes (y,0) &= (x \cdot y, 0) \\
(0,1) \otimes (0,1) &= (-1, 0) \\
(a,b) \otimes (c,d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\zeta : x \mapsto (x, 0)$ ist eine (verknüpfungstreue) Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$.

Die obige Notation macht deutlich, dass $\mathbb{C}$ auch als 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ angesehen werden kann. (Durch die komplexe Multiplikation $\otimes$, die jedoch sehr bald wieder durch das gewöhnliche Multiplikationszeichen von $\mathbb{R}$ ersetzt wird, besitzt er aber noch die zusätzliche Struktur einer sogenannten $\mathbb{R}$-Algebra.)

Dem historischen Prozess entsprechend wird das Element $(0,1)$ seit Euler üblicherweise als i geschrieben und als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Es hat die fundamentale Eigenschaft $i^2 := -1$. Unter Verwendung der imaginären Einheit lässt sich die Menge der komplexen Zahlen auch wie folgt darstellen

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \ / \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Bei dieser Schreibweise stellen sich die komplexen Operationen folgendermassen dar

$$\begin{aligned}(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) &= (a + c) + i \cdot (b + d)\\ (a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) &= (a \cdot c - b \cdot d) + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c)\end{aligned}$$

Die imaginäre Einheit i ist als Wurzel des Polynoms $x^2 + 1$ natürlich auch eine algebraische Zahl.

Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen erfolgt üblicherweise in der „Gauß'schen Zahlenebene".

Eine ausführlichere Behandlung der komplexen Zahlen erfolgt in dem separaten Manuskript „Die komplexen Zahlen". Es ist beim Autor dieses Texts erhältlich.

7 Die Technik der Zahlbereichserweiterungen ist kein „Wunschkonzert"

Dass es mit den oben beschriebenen Zahlbereichserweiterungen immer so relativ gut geklappt hat, mag vielleicht den folgenden Eindruck vermitteln: Wenn es beim Lösen von Gleichungen mal ein Problem gibt, dann erfindet (zaubert?) man sich schnell ein neues Symbol, wie $\frac{a}{b}$, $\sqrt{x}$ oder i, mit dem das Problem dann elegant zu lösen ist. Dem ist jedoch nicht so. Dass dies alles nicht so einfach ist, erkennt man insbesondere auch daran, dass sich der Prozess, der weiter oben in heutiger Begriffsbildung und Notation in wenigen Zeilen beschrieben ist, im historischen Prozess über Jahrtausende hinweg entwickelte.

Für jede Zahlbereichserweiterung ist der neue Zahlbereich auf der Basis dessen, was bisher gegeben war, zu konstruieren – nach Möglichkeit unter Realisierung des Permanenzprinzips. Dabei sind zentrale Aspekte der Konstruktion wie die Wohldefiniertheit und die Widerspruchsfreiheit der neu konstruierten Objekte sorgfältig zu überprüfen. Auch die algebraischen Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Existenz neutraler und inverser Elemente u.s.w.) der neuen Objekte sind zwar wünschenswert, aber sie ergeben sich nicht selbstverständlich oder sind in vielen Fällen auch gar nicht realisierbar.

Man kann z.B. die Konstruktion der komplexen Zahlen als Erweiterung des (eindimensionalen) Bereichs („Körpers") der reellen Zahlen auf die (2-dimensionale) Ebene deuten. Versuche, dies in den 3-dimensionalen Raum fortzusetzen, scheiterten jedoch immer wieder. Erst dem irischen Mathematiker Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) gelang 1843 die Konstruktion einer abgeschwächten Variante, dem (über den reellen Zahlen) 4-dimensionalen *Schiefkörper* der („hamiltonschen") *Quaternionen*, dessen Multiplikation allerdings nicht kommutativ ist (Schiefkörper = nichtkommutativer Körper).

Die hamiltonschen Quaternionen werden mit Hilfe von vier „Basisvektoren" $1, i, j, k$ gebildet. Für diese Basisvektoren definierte Hamilton die Rechenregeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

Und daraus folgt:

$$\begin{array}{lll} i \cdot j = k & j \cdot k = i & k \cdot i = j \\ j \cdot i = -k & k \cdot j = -i & i \cdot k = -j \end{array}$$

Die Konstruktion *kommutativer* Quaternionen ist nicht möglich.

Es gilt aber der Satz von *Wedderburn* (J. Wedderburn, 1882-1948): Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ.

Ähnliche Konstruktionen wie die Quaternionen werden manchmal unter dem Namen *hyperkomplexe Zahlen* zusammengefasst. So sind z.B. die hyperkomplexen *Cayley-Zahlen* oder *Oktaven* ein 8-dimensionales Analogon zu den Quaternionen; ihre Multiplikation ist allerdings weder kommutativ noch assoziativ (Arthur Cayley, 1821-1895).

Eine Fülle von weiteren Beispielen für die Erweiterung des Zahlbegriffs ist durch die Konstruktion von *Matrizen* gegeben, deren Multiplikation zwar immer assoziativ, in der Regel aber nicht kommutativ ist.