Algorithmik als Schnittstelle zwischen Kunst und Mathematik

ZKM, Karlsruhe, Oktober 2004

Jochen Ziegenbalg, Karlsruhe

Gliederung

1 Vorbemerkung

Wenn man die Begriffskombination „Algorithmus und Kunst“ hört, dann stellt sich bei den vielen Menschen wohl unmittelbar eine Assoziation zu „Kunst und Computer“ oder „Computerkunst“ ein. Die Frage wird zu diskutieren sein, ob diese Begriffsfelder identisch sind oder wie sie sonst zusammenhängen.

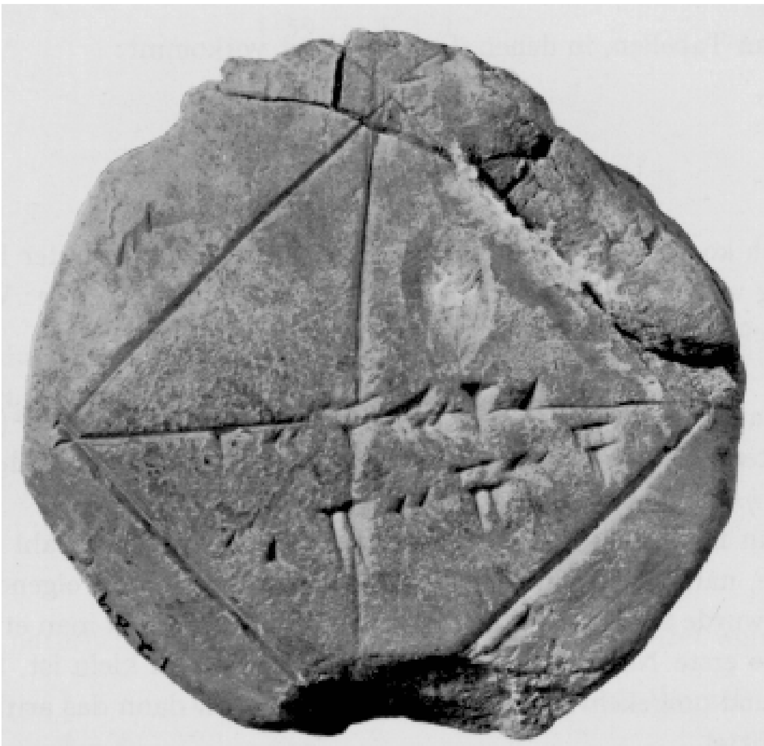
Algorithmen sind sehr viel älter als Computer. Sie spielen in der Mathematik (und darüber hinaus) schon seit Jahrtausenden eine zentrale Rolle. Aus dieser Sicht der Dinge stellen sich unmittelbar die Fragen: Gilt dies auch für das Verhältnis von Algorithmus und Kunst? Wäre das Thema „Algorithmus und Kunst“ auch dann von Bedeutung, wenn es keine Computer gäbe?

In diesem Artikel werde ich, dem Thema entsprechend, über den Diskussionsgegenstand der „Kunst“, was auch immer das ist, zu äußern haben. An dieser Stelle sei von vorn herein festgestellt, dass ich mich in keiner Weise als Fachmann in Sachen Kunst verstanden wissen möchte. Ich kann zum Thema Kunst bestenfalls nur als interessierter Laie sprechen; aber auch Laien dürfen sich ja ihre Gedanken machen. Und wenn man an einem interdisziplinären Diskurs teilnimmt, dann überschreitet man per Definition die Grenzen der eigenen Wissenschaft und muss sich zu Dingen äußern, in denen man kein Fachmann ist. Die Vorgabe, nur Fachleute sprechen zu lassen, schlösse also Interdisziplinarität weitgehend aus. Dieser Preis einer solchen Vorgabe erschiene mit als zu hoch.

2 Algorithmus / Kunst / Mathematik – Versuch einer Begriffsbestimmung

2.1 Zum Begriff des Algorithmus

Algorithmen selbst gibt es seit Jahrtausenden. Einer der ältesten dokumentierten Algorithmen aus der Epoche Hammurapis, also aus der Zeit um etwa 1800 v. Chr., ist in der folgenden Abbildung dargestellt (Yale Babylon Collection 7298).



Der Algorithmus beschreibt das Verfahren der Babylonier, eine Zahl (ich bezeichne sie in der heutigen Terminologie als *x*) zu finden mit der Eigenschaft: $x \cdot x = 2$.

In unserer heutigen Sprechweise würden wir sagen: Der Algorithmus ist ein Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel von 2. Noch anders ausgedrückt: Gesucht ist die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt 2 Flächeneinheiten beträgt.

Wir könnten ihn heute z.B. folgendermaßen formulieren:

Keilschrift-Algorithmus (nachempfunden)

```
Mit  x=2  und  y=1  tue folgendes:
  Solange der Wert von x noch nicht genau genug ist,
  tue folgendes:
    Ersetze  x  durch  (x+y)/2.
    Ersetze  y  durch  2/x.
  Gib  x  als Ergebnis aus.
```

Eine Präzisierung des Ausdrucks „Solange der Wert von *x* noch nicht genau genug ist ...“ ist ohne weiteres z.B. durch die Formulierung „Solange $|2 - x \cdot x| > 0{,}0001$ …“ möglich.

Bemerkungen:

- Die babylonische Darstellung ist von „paradigmatischer“ Qualität. Sie beschreibt zwar nur den konkreten Fall der Quadratwurzel von 2; es lassen sich aber in völlig analoger Weise auch die Quadratwurzeln beliebiger anderer (positiver) reeller Zahlen bestimmen. Der babylonische Algorithmus ist deshalb von angemessener Allgemeinheit.
- Die dem Algorithmus zugrundeliegende Idee lässt sich problemlos auf den Fall der Ermittlung beliebiger ganzzahliger Wurzeln übertragen.
- Das Verfahren ist hochgradig effizient. Es kann als konkretes Beispiel für das Newton-Verfahren angesehen werden und es wird (natürlich in anderer Terminologie) auch heute noch in den modernsten Computersystemen eingesetzt. Der Algorithmus überspannt also einen historischen Zeitraum von fast 4000 Jahren.
- Eine weitere Bemerkung vorab: Es wird die Frage zu diskutieren sein, ob man die obige Keilschrift aus heutiger Sicht selbst als ein Kunst-Objekt ansehen kann (vgl. weiter unten: Algorithmus als Kunstobjekt „ex post“)?

Im Laufe der Wissenschaftsgeschichte wurde eine Vielzahl weiterer konkreter Algorithmen entwickelt. Der Begriff des Algorithmus selbst wurde im Zusammenhang mit den Bemühungen um die Präzisierung des Begriffs der Berechenbarkeit in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts intensiv diskutiert. Es wurden verschiedene Präzisierungen entwickelt:

- auf dem Begriff der Rekursion aufbauend (Kurt Gödel, A. Markoff)
- mit Hilfe des sogenannten Lambda-Kalküls (Alonzo Church)
- die Turing-Maschine (Alan Turing)

Seitdem A. Church nachweisen konnte, dass diese formal sehr verschiedenen Fassungen inhaltlich gleichwertig sind, wird jede (und werden damit alle) dieser Fassungen als angemessene Präzisierung des Algorithmenbegriffs angesehen („Churchsche These“).

Soviel in aller Kürze zur Entwicklung des formalisierten Algorithmus-Begriffs aus wissenschaftlicher Sicht.

Was lässt sich in Bezug auf *informelle* Beschreibungen des Algorithmenbegriffs sagen?

BROCKHAUS ENZYKLOPÄDIE: *Algorithmus* ... in der Mathematik ursprünglich das um 1600 in Europa eingeführte Rechnen mit Dezimalzahlen, heute jedes Rechenverfahren (als Gesamtheit von verschiedenen Rechenschritten), mit dem nach einem genau festgelegten, auch wiederholbaren Schema eine bestimmte Rechenaufgabe, wie umfänglich sie auch sein mag, in einer Kette von endlich vielen einfachen, z.B. einer Rechenmaschine übertragbaren Rechenschritten gelöst wird. ...

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA: algorithm, systematic mathematical procedure that produces – in a finite number of steps – the answer to a question or the solution of a problem. ...

Heute kann man in praktisch jedem Buch zur Informatik bzw. Algorithmik eine Fassung des Algorithmus-Begriffs finden. In der Regel unterscheiden sich diese Fassungen nur unwesentlich. Ich beende die kurze Diskussion des Algorithmusbegriffs mit dem folgenden Zitat aus [*Ziegenbalg* 1996]:

> Ein **Algorithmus** ist eine endliche Folge von eindeutig bestimmten Elementaranweisungen, die den Lösungsweg eines Problems exakt und vollständig beschreiben.

Eine persönliche Bemerkung: An dem og. Buch haben auch meine Söhne Oliver und Bernd Ziegenbalg mitgewirkt. Sie hatte sich zu der Zeit, als ich das Buch schrieb, im Rahmen ihres Mathematikstudiums gerade intensiv mit Evolutionären Algorithmen und Neuronalen Netzen befasst, und so entstand die Idee, dass sie dem damals im Prinzip „fertigen" Buch ein weiteres Kapitel über diese Themen hinzufügten.

Bernd Ziegenbalg ist heute in Berlin im Bereich des Journalismus tätig und Oliver Ziegenbalg als Drehbuchautor, ebenfalls in Berlin. Beide fühlen sich der Kunst sehr verbunden. Insofern stellt die Algorithmik für uns auch ganz persönlich eine Schnittstelle (Verbindung) zwischen Kunst und Mathematik dar.

2.2 Zum Begriff der Kunst

Zunächst einmal muss ich noch einmal betonen, dass ich auf dem Gebiet der Kunst alles andere als ein Fachmann bin. Wenn ich meinen Versuch zur Begriffsbestimmung mit der Feststellung beginne, dass der Begriff der Kunst (zumindest in meiner Wahrnehmung) weit weniger „kanonisiert" ist als etwa der Begriff des Algorithmus oder der Begriff der Mathematik, dann ist dies rein faktisch und völlig wertneutral gemeint.

Eine zentrale, allgemein anerkannte Fassung des Kunstbegriffs ist mir nicht bekannt. Dagegen gibt es eine Vielzahl sehr heterogener Äußerungen von Kunstkennern oder Künstlern selbst. Hier eine kleine Auswahl:

Niklas Luhmann
Kunst ist (wie Geld, Liebe, wissenschaftliche Wahrheit und Macht) ein symbolisch generiertes Kommunikationsmedium (und nur dann erkennbar, wenn über sie kommuniziert wird).

Pablo Picasso
- Sie erwarten von mir, dass ich ihnen sage, dass ich ihnen definiere, was Kunst ist? Wenn ich es wüßte würde ich es für mich behalten.
- Kunst ist die Lüge, die der Wahrheit am nächsten kommt.

Joseph Beuys
Das Kunstwerk ist das allergrößte Rätsel, aber der Mensch ist die Lösung.

Vincent van Gogh
Ich kenne noch keine bessere Definition für das Wort Kunst als diese: Kunst, das ist der Mensch!

Paul Klee
Die Kunst gibt nicht das Sichtbare wieder, sondern macht sichtbar.

Paul Cezanne
Kunst ist eine Harmonie, die parallel zur Natur verläuft.

André Breton
Die Kunst ist keine Unterwerfung, sie ist Eroberung.

Caspar David Friedrich
Die Kunst mag ein Spiel sein, aber sie ist ein ernstes Spiel.

Max Ernst
Kunst hat mit Geschmack nichts zu tun. Kunst ist nicht da, dass man sie "schmecke".

Johann Nepomuk Nestroy
Kunst ist, wenn man's nicht kann. Denn wenn man's kann ist es ja keine Kunst mehr.

H.A. Schult
Kunst ist Aktion

Kurt Schwitters
Was Kunst ist, wissen Sie ebensogut wie ich, es ist nichts weiter als Rhythmus.

John Cage
Die meisten Leute wissen gar nicht, wie schwer es ist, moderne Kunst zu schaffen - der Verstand ist eine so starke Kontrollinstanz, der die Menschen unpoetisch und phantasielos macht.

Autor ? (ex post: 422 Internet-Seiten)
Kunst ist für alle da

Julius Meier-Graefe
Kunst ist nicht für Kunstgeschichte da.

In dieser Weise ließen sich noch beliebig viele weitere beliebig divergente Zitate finden. Es fällt auf, dass es jede Menge aphoristischer Zitate zum Thema „Was ist Kunst“ gibt, die einen ernsthaften Beschreibungsversuch gar nicht erst versuchen. Ich kann mich auch des Eindrucks nicht erwehren, dass der Versuch, den Begriff der Kunst näher zu beschreiben von einer ganzen Reihe von Künstlern als müßig, naiv, kontraproduktiv oder gar schädlich angesehen wird. Das kann und mag natürlich jeder so halten, wie er es will; wenn aber im öffentlichen Raum die Forderung gestellt wird, die Kunst zu fördern und sie insbesondere in unserem Bildungssystem stärker zu verankern, dann kann man es m.E. bei einer solchen Haltung nicht belassen. Denn die Öffentlichkeit besteht nicht nur aus Kunst-Insidern; wenn sie dazu aufgefordert wird, etwas zu fördern, dann sollte man ihr auch sagen, was das ist, das sie fördern soll.

Wie auch immer – um den durch das Thema des Symposiums gegebenen Diskurs zu ermöglichen, soll im folgenden der Versuch einer Begriffsbeschreibung gemacht werden.

Um es ganz klar zu sagen: Dies ist der Versuch eines Dilettanten (Dilettant = Liebhaber), der sich der Problematik des Unterfangens durchaus bewusst ist.

Kunst ist die Erschaffung konkreter Objekte, mit dem Ziel, das Denken anzuregen.

Es geht mir bei dieser Beschreibung nicht primär um eine möglichst scharfe, charakterisierende Beschreibung, sondern zunächst einmal eine, die nicht komplett falsch ist, eine, die vielleicht eine gewisse Akzeptanz erreichen kann.

2.3 Gegenüberstellung Kunst – Mathematik

Es ist bemerkenswert, dass man in der obigen Beschreibung von „Kunst“ nur ein Wort auszutauschen braucht, um eine erste Beschreibung von „Mathematik“ zu bekommen:

Mathematik ist die Erschaffung abstrakter Objekte, mit dem Ziel, das Denken anzuregen.

Sowohl die Kunst als auch die Mathematik haben es mit dem *Erschaffen* zu tun. Beide Tätigkeitsbereiche sind mit hochgradig schöpferischen Aktivitäten verbunden.

Die in diesen beiden Definitionsversuchen zum Ausdruck kommende Dichotomie „konkret / abstrakt“ ist vielleicht auch eine gute Erklärung dafür, warum Kunst so viel populärer ist als Mathematik. Es gibt viele Museen für Kunst, aber weltweit m.W. nur ein einziges für Mathematik (das „Mathematicum“ in Giessen). Und auch dieses Mathematikmuseum zeigt: Wenn man Mathematik größeren Bevölkerungskreisen durch ein Museum näher bringen will, dann müssen die Exponate in diesem Museum sehr konkret sein.

Wenn auch die Mathematik eine hochgradig abstrakte Sache ist, so gibt es doch auch in ihr immer wieder das Bedürfnis nach Konkretem. Der geniale indische Mathematiker *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) formulierte es zu Beginn des letzten Jahrhunderts folgendermaßen:

> *Für große Mathematiker war das Betrachten konkreter Beispiele schon immer eine wichtige Quelle der Intuition.*

Ein Höhepunkt der Abstraktion in der Mathematik war die Periode des sogenannten „Bourbakismus“ (etwa im zweiten Drittel des letzten Jahrhunderts). Sehr bald entstand aber wieder das Bedürfnis nach mehr Konkretem, auch in der Mathematik, das in der Folgezeit wieder deutlich an Bedeutung gewann. An der Universität Essen wurde sogar ein Institut für konkrete und experimentelle Mathematik gegründet. In thematischer Hinsicht war die Hinwendung zum Konkreten verbunden mit der verstärkten Beschäftigung mit Gebieten wie der „diskreten“ Mathematik, der computerorientierten Mathematik (oft in der Form des „wissenschaftlichen Rechnens“), der Chaos-Theorie, den Fraktalen, und ganz allgemein mit einer verstärkt algorithmisch orientierten Mathematik.

Die algorithmische Mathematik ist eine sehr konkrete, konstruktiv aufgebaute Mathematik. Die Objekte, mit denen sie sich befasst, sind konkret konstruiert. Die Art und Weise, mit diesen Objekten umzugehen, ist konkret, prozedural und konstruktiv. Die algorithmische Mathematik ist zugleich sehr jung und sehr alt.

Der renommierte Mathematikhistoriker H. M. Edwards vertritt die wohlbegründete Auffassung, dass alle Mathematik bis zum Auftreten der Zeitgenossen von Leopold Kronecker (1823–1891) algorithmischer Natur war [Edwards 1987]

> *For him (Kronecker), the algorithm was needed to give meaning to his mathematics, and he was following in the footsteps of many other – one might say all other – great mathematical thinkers who preceded him.*

Nichtalgorithmische Objekte und Methoden kamen vergleichsweise spät, erst etwa ab dem Ende des 20. Jahrhunderts, ins (mathematische) Spiel. Sie sind verbunden mit nichtkonstruktiven Prinzipien wie etwa den Auswahlprinzip, dem Wohlordnungsprinzip oder dem Lemma von Zorn.

Die nichtkonstruktive Richtung in der Mathematik stieß von Anfang an auf den Widerstand einer relativ kleinen, aber sehr dezidiert argumentierenden Gruppe von Mathematikern, den Vertretern des Konstruktivismus oder des von der Ur-Intuition des Zählens ausgehenden Intuitionismus, zu deren prominentesten Vertretern etwa Hermann Weyl und L. E. J. Brouwer gehörten.

Der Streit zwischen den Vertretern des Formalismus (David Hilbert) und des Intuitionismus um die „richtige“ Fundierung der Mathematik gehört zu den bedeutendsten philosophischen Entwicklungen des letzten Jahrhunderts.

Zweifellos spielt die Intuition (Intuition: „Eingebung“; das unmittelbare, nicht diskursive, nicht auf Reflexion beruhende Erkennen, Erfassen eines Sachverhalts) auch in der Kunst eine wichtige Rolle. Im Rückgriff auf die Intuition kommen zweifellos Gemeinsamkeiten in der Geisteshaltung von Mathematik und Kunst zum Ausdruck.

2.4 Algorithmus und Spiel

Sowohl in der Mathematik als auch in der Kunst ist der spielerische, experimentierende Zugang eine wichtige Quelle neuer Entwicklungen. Es gibt eine fülle von Literatur zum Thema „Mathematik uns Spiel“. Als eines der prominentesten Beispiele sei das Buch „Das Spiel“ des Nobelpreisträgers für Biochemie Manfred Eigen genannt.

Spiele folgen jedoch Spielregeln, also Algorithmen. Spielerische Zugänge und die algorithmische Methode hängen also auf das Engste miteinander zusammen. Eine besonders wichtige Form des spielerischen Zugangs ist in der mathematischen und naturwissenschaftlichen Modellbildung die Technik der *Simulation*. Im Abschnitt über die Methodologie des algorithmischen Arbeitens wird noch ausführlicher auf diesen Aspekt eingegangen.

2.5 Zum Begriff der Schnittstelle

Schnittstellen scheinen etwas *Trennendes* zu sein. Auch in der Informatik sind Schnittstellen enorm wichtig, aber als etwas *Verbindendes*. Eines der wichtigsten, wenn nicht das wichtigste fundamentale Prinzip der Informatik ist das Prinzip der *Modularität*.

Modularität, also das Arbeiten nach dem Baukastenprinzip, bedeutet, dass ein komplexes, unübersichtliches Problem zunächst in kleinere, einfacher zu handhabende Teilprobleme zerlegt wird. Diese Zerlegung kann u.U. auch kaskadenartig in mehreren Stufen erfolgen. Zum modularen Arbeiten gehört, dass man versucht, zuerst die einzelnen Teilprobleme zu lösen und diese Einzellösungen danach zu einer Gesamtlösung des Ausgangsproblems zusammenzusetzen. Mit dem modularen Arbeiten verbinden sich verschiedene Zielsetzungen. Zunächst einmal ist die Annahme plausibel, dass die Lösung der (i.a. einfacheren) Teilprobleme eher gelingt als die Lösung des (komplexen) Gesamtproblems. Entscheidend ist jedoch, dass man beim modularen Arbeiten nicht das Ganze aus den Augen verliert. Die Lösung aller Teilprobleme würde nichts oder nur wenig nützen, wenn diese Lösungen isoliert nebeneinander stünden. Ein wesentlicher Punkt der modularen Vorgehensweise muss also darin liegen, dass von vornherein darauf geachtet wird, dass die einzelnen Teillösungen später wieder zu einer Gesamtlösung des ursprünglichen Problems zusammengefügt werden können. Dies setzt voraus, dass die *Schnittstellen* zwischen den Moduln sehr genau beschrieben sind.
Der englische Begriff für Schnittstelle lautet „interface“. Ein Interface ist etwas, das nach beiden Seiten blickt, das zwei Dinge miteinander verbindet. Der verbindende Charakter wird also durch den Begriff des Interfaces besser wiedergegeben als durch den Begriff der Schnittstelle.

3 Algorithmik in der Kunst

An dieser Stelle ist es angemessener, den Begriff der „Algorithmik“, also der Gesamtheit aller algorithmischen Objekte und Methoden an Stelle des eher objektbezogenen Begriffs „Algorithmen“ zu verwenden. Algorithmik kann in der Kunst in sehr verschiedenen Rollen und Facetten auftreten: Algorithmen können als *Motive* von Kunstobjekten auftreten; je nach Definition des Kunstbegriffs kann man manche Ergebnisse von Algorithmen *im Nachhinein* (ex post) als Kunstwerke ansehen; vielleicht lässt sich auch manch ein *Algorithmus selbst als Kunstwerk* interpretieren; Algorithmen können, sei es ohne, sei es mit Hilfe des Computers einen *Werkzeugcharakter* zur Herstellung von Kunstobjekten haben (bei der Nutzung von Graphiksoftware stehen die Algorithmen zumindest im Hintergrund); algorithmische Verfahren können als *Designprinzipien* von Kunstwerken eine Rolle spielen (z.B. durch Diskretisierung, Digitalisierung, Randomisierung oder Seriierung); und schließlich gibt es bei der Praktizierung der *algorithmischen Methode* Parallelen zwischen Kunst und Mathematik - besonders in der Form eines konstruktiven, experimentellen, explorativen, ja sogar spielerischen Arbeitsstils. Vernetztheit, Beziehungshaltigkeit und Interdisziplinarität sind weitere charakteristische Merkmale dieses Arbeitsstils.

Dies ist vielleicht eine gute Stelle, um darauf hinzuweisen, dass die gelegentlich zu beobachtende Gleichsetzung

algorithmische Kunst = Computerkunst

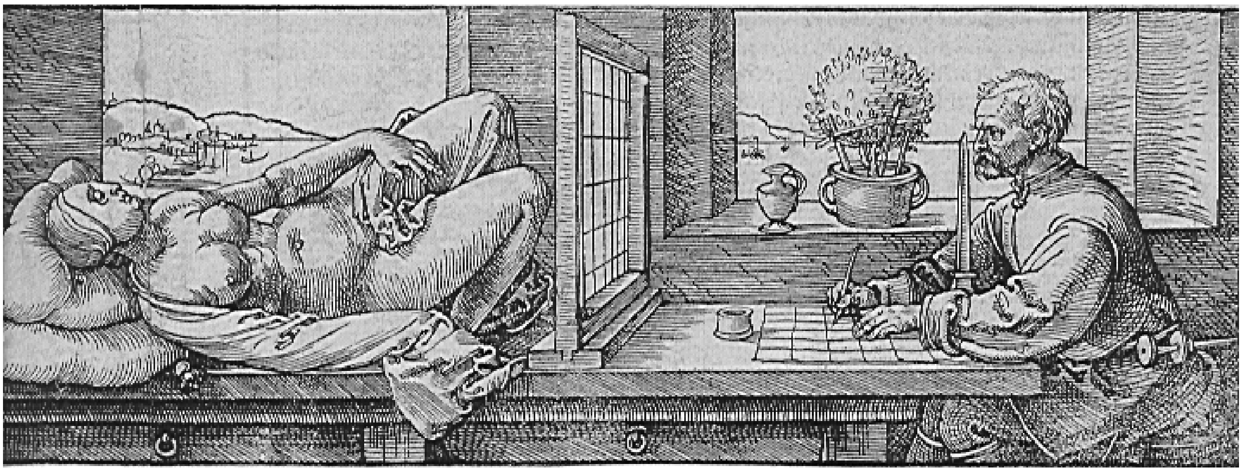
nicht tragfähig ist. Es gibt Beispiele algorithmischer Kunst (z.B. dort, wo der Algorithmus als Motiv auftritt), die nichts mit dem Computer zu tun haben, und es gibt Beispiele für Computerkunst (z.B. dort, wo der Computer als reines Zeichenwerkzeug verwendet wird), die nichts (zumindest nichts im direkten Sinne) mit Algorithmen zu tun haben.

3.1 Der Algorithmus als Thema (Motiv) von Kunstobjekten

Zunächst einmal können Algorithmen als Themen von Kunstobjekten auftreten. Eines der bekanntesten Beispiele dafür ist das Bild von Gregor Reisch aus dem Jahre 1503 aus der Enzyklopädie „Margarita Philosophica“, auf dem er den Übergang vom Rechnen mit Rechensteinen auf den dazugehörigen Rechenbrettern zum heutigen Ziffernrechnen im Dezimalsystem darstellt.

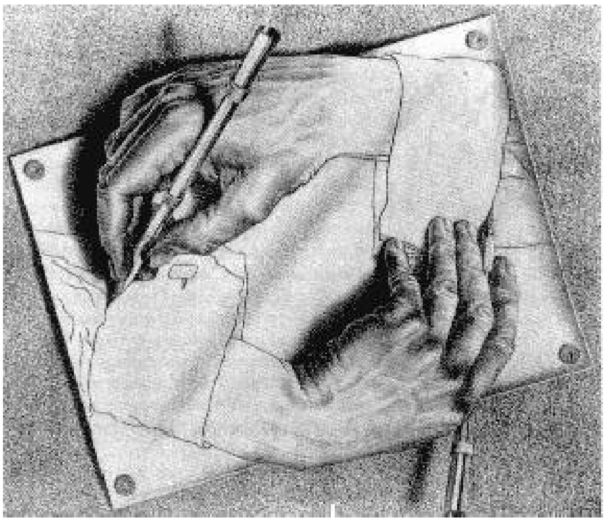
Es gibt, besonders aus der Zeit der Rechenmeister, eine Fülle weiterer künstlerischer Darstellungen zu diesem Thema.

Auch Dürers Anweisung zur Realisierung des perspektivischen Zeichnens ist dem Themenkreis „Darstellung algorithmischer Verfahren“ zuzurechnen. Das über den Betrachtungsrahmen gelegte Faden-Raster kann darüber hinaus als eine frühe Form der Digitalisierung angesehen werden.



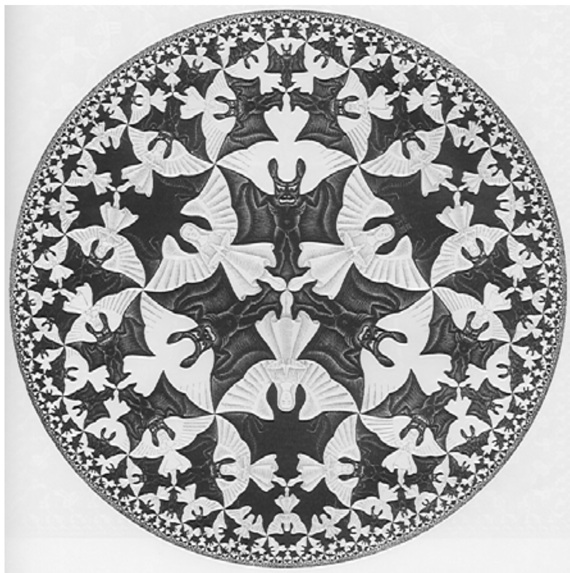
Ein weiterer Aspekt im Zusammenhang mit der Thematisierung des Algorithmus-Begriffs betrifft seine Etymologie. Der Begriff „Algorithmus“ leitet sich ab vom Namen des persisch-arabischen Gelehrten Abu Ja'far Mohammed ibn Musa *al-Khowarizmi* (ca.780-850 n.Chr.). Er erkannte die Bedeutung des indischen Zahlensystems und schrieb etwa im Jahre 820 das höchst einflussreiche Lehr- und Rechenbuch „Über die indischen Zahlen“. Aus der Ortsbezeichnung des Autors *al-Khowarizmi* („der aus Khowarizm Stammende“ - einem zentralasiatischen Reiche etwa im Raum des heutigen Usbekistan) leitete sich so im Laufe der Zeit durch Sprachtransformation der Begriff *Algorithmus* ab.

Die nebenstehende phantasievolle Darstellung dieses al-Khowarizmi zeigt eine Briefmarke der sowjetischen Post aus dem Jahre 1983 („Khowarism“ wird dabei als „Koresm“ bezeichnet). Ob sie als Kunstwerk anzusehen ist, hängt von dem zugrunde gelegten Kunstbegriff ab. Die Briefmarke ist wahrscheinlich bei einem Künstler in Auftrag gegeben worden. Dies wirft die Frage auf, ob alles, was ein Künstler herstellt, auch Kunst ist.



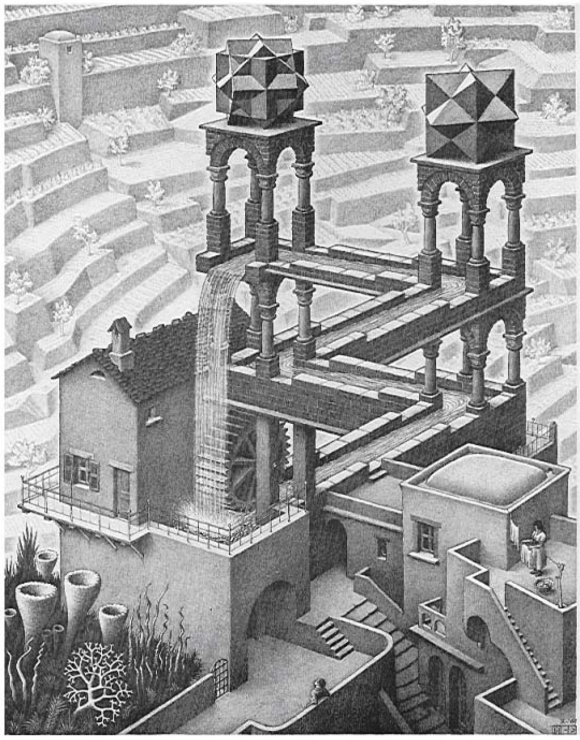
Rekursion (Selbstbezüglichkeit) ist ein Kernthema der Algorithmik – aber auch ein gelegentlich anzutreffendes Motiv in der Kunst. Der holländische Künstler M. C. Escher hat sich immer wieder Themen mit hohem mathematischen Gehalt zugewendet. Sein Bildnis der sich selbst wechselseitig zeichnenden Hände enthält eine deutliche Anspielung auf das Thema „Rekursion“.

Das *Unendliche* und das *Unmögliche* faszinieren immer wieder. Weite Bereiche der Mathematik drehen sich um das Unendliche. Die Frage, ob es das Unendliche nur (etwa im Sinne des Euklidischen Beweises über die Unendlichkeit der Primzahlmenge) potentiell oder auch (im Sinne Platons) als aktual Unendliches gibt, reicht tief in die Grundlagenfragen der Mathematik.



Als Beispiel für die Thematisierung des Unendlichen in der Kunst möge die nebenstehende Darstellung von M. C. Escher dienen. Von Rune Mields stammen diverse Darstellungen zur Unendlichkeit der Primzahlmenge.

Die Mathematik kennt viele Unmöglichkeitsbeweise. In der Physik taucht die Unmöglichkeit oft im Zusammenhang mit dem „Perpetuum Mobile“ auf, das Escher als in sich zurückfließenden Wasserfall realisiert hat.



3.2 Algorithmische Produkte als Kunstwerke „ex post“

Die Frage, ob es sich bei dem folgenden Objekt um ein Kunstwerk handelt, wird von vielen Menschen spontan bejaht. Unabhängig davon, ob es dies ist oder nicht, ist es aus ganz anderen Motiven heraus entstanden.

Es ist eine Auflistung von Malz- und Gerstenschrotmengen aus der Stadt Uruk im Zweistromland (etwa 3000 v. Chr.), also letztlich ein buchhalterisches Produkt. Als Produkt eines Zähl- und Rechenvorgangs ist es also das Produkt einer algorithmischen Tätigkeit. Die Tätigkeit eines Buchhalters wird heute gern als das genaue Gegenteil der künstlerischen Tätigkeit angesehen und entsprechend in gängigen Redeweisen in Verbindung mit Eigenschaften wie „staubtrocken“ belegt (eine Ausnahme stellt jedoch die neudeutsche Wortschöpfung „kreative Buchführung“ dar). Im Hinblick auf diesen Sachverhalt stellt sich die Frage: Kann das Produkt eines Buchhalters als Kunst angesehen werden? Auch dies hängt natürlich wieder von dem

zugrunde gelegten Kunstbegriff ab.

Die Tontafel aus Uruk ist nur ein Beispiel aus einer Fülle vergleichbarer Objekte (babylonische Einmaleins-Tafeln, ägyptische Zahldarstellungen, …). Auch moderne Produkte, wie z.B. Leiterplatten- oder Mikroprozessor-Layouts werden oft wegen ihres ästhetischen Charakters abgebildet.

3.3 Der Algorithmus selbst als Kunstobjekt

Es gibt Algorithmen, bei denen man versucht ist, ihnen wegen ihrer kompakten Eleganz und Stringenz den Status von Kunstobjekten einzuräumen. Als Beispiel betrachten wir das recht bekannte Turm-von-Hanoi-Spiel. Dabei ist ein Turm aus immer kleiner werdenden Scheiben nach der folgenden Regel von einer Startposition unter Zuhilfenahme einer Hilfsposition auf eine Zielposition zu transferieren:

(1.) Es darf immer nur eine Scheibe bewegt werden.
(2.) Es darf nie eine größere auf einer kleineren Scheibe zu liegen kommen.

Bei einem aus vier Scheiben bestehenden Ausgangsstapel lautet ein entsprechendes Handlungsprotokoll (dabei sei A die Ausgangsposition, B die Hilfsposition und C die Zielposition): AB, AC, BC, AB, CA, CB, AB, AC, BC, BA, CA, BC, AB, AC, BC.

Bei einem aus 10 Scheiben bestehenden Turm gibt es ein Handlungsprotokoll aus 1023 Zügen, bei 20 Scheiben sind es 1048575 Züge und bei 283 Scheiben liegt die Anzahl der Züge (sie beträgt 155413511378058325673556952545881512531392547124171161700144992779112 34281641667985407) oberhalb der Zahl der „quarks“, also der kleinsten (subatomaren) Elementarteilchen im bekannten Teil unseres Weltalls (vgl. [Hawking, 1988]).

Dieser gigantische Output wird von dem folgenden im Vergleich dazu unglaublich kompakten Algorithmus produziert. Er ist hier in der Syntax eines bekannten Computeralgebra Systems geschrieben, die sich leicht in die Syntax jeder beliebigen anderen Programmiersprache umsetzen lässt, welche über die Konstrukte der Rekursion und der Listenverarbeitung in Verbindung mit einem universellen Funktionskonzept verfügt. Dies sind praktisch alle Varianten der Programmiersprache LISP (List Processing Language) und insbesondere praktisch alle modernen Computeralgebra Systeme.

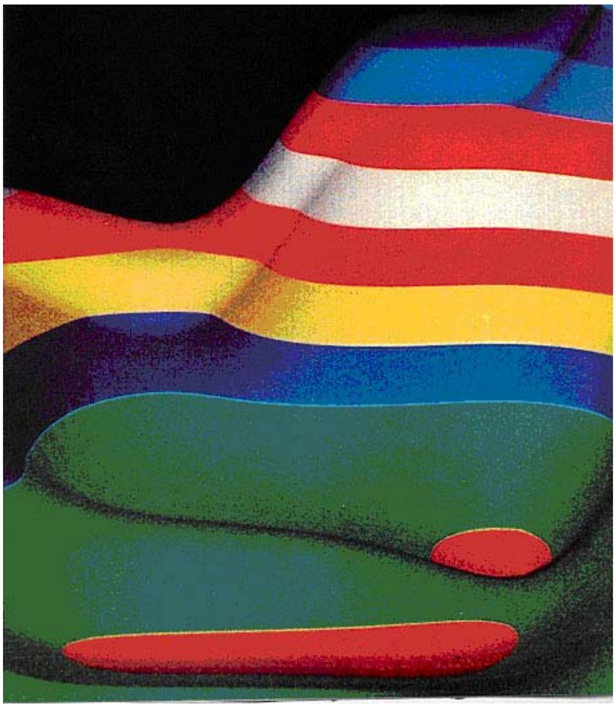
```
Hanoi[n_, start_, hilf_, ziel_ ] :=
  Which[
    n==1, {{start, ziel}},
    True, Join[
               Hanoi[n-1, start, ziel, hilf ],
               {{start, ziel}},
               Hanoi[n-1, hilf, start, ziel]  ]  ]
```

Im Hinblick auf die Komplexität der Ausgabe des Programms kann seine strukturelle Einfachheit und Durchsichtigkeit nur als verblüffend angesehen werden. In diesem Sinne weckt es deutliche Assoziationen an die Kunstform der „minimal art“.

3.4 Algorithmen als Werkzeuge zur Herstellung von Kunstobjekten - oft, aber nicht notwendigerweise, in Verbindung mit dem Computer

Manche Produkte der Computer-Kunst haben nicht explizit das Thema „Algorithmus“ zum Inhalt; dennoch wären sie ohne Algorithmen nicht oder nicht so entstanden. Sobald nämlich der Computer und seine Software zur Herstellung eines Kunstobjekts verwendet werden, kommen (zumindest im Hintergrund) Algorithmen automatisch ins Spiel, z.B. als graphische Algorithmen, die im Zentrum der Graphik-Programme und Graphik-Software stecken.

Vielen so entstandenen Objekten scheint man diesen Herstellungsprozess mehr oder weniger direkt anzusehen. So käme wohl kaum jemand bei dem nebenstehenden Objekt („Mathscape“ von M. L. Prueitt) auf die Idee, dass es nicht mit Hilfe des Computers und von Graphiksoftware erstellt wurde.



Aber diese Art der Herstellung besagt noch nichts darüber, dass es sich bei derartigen Objekten um einen Beitrag zum Thema „Kunst und Algorithmik“ handelt. Denn Algorithmen treten bei der Herstellung vieler derartiger Objekte bestenfalls im Hintergrund als die Algorithmen der verwendeten Graphik-Software auf.

Dennoch gilt grundsätzlich: Die Werkzeuge, Medien und Techniken zur Herstellung von Kunstobjekten haben schon immer einen großen Einfluss auf die Bewertung und Rezeption der Objekte selbst gehabt. So eben auch das Werkzeug „Computer“.

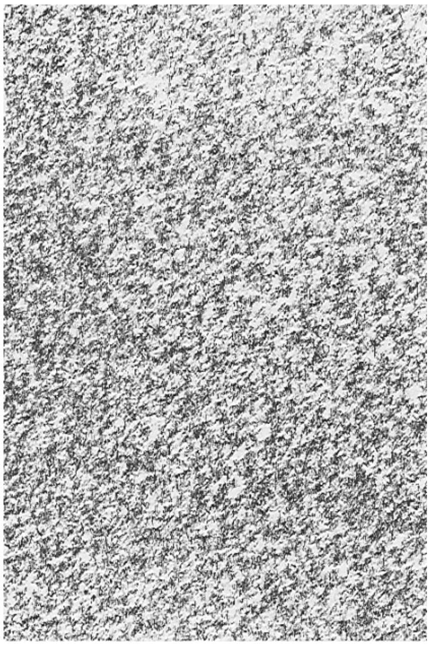
Deutlicher tritt der Werkzeugcharakter der algorithmischen Arbeitsweise im folgenden Punkt auf.

3.5 Algorithmik als Prinzip des Designs: Diskretisierung, Digitalisierung, Randomisierung, Seriierung

Obwohl algorithmische Kunst immer wieder mit Computerkunst gleichgesetzt wird, gibt es eine Fülle von einschlägigen Beispielen algorithmisch entstandener Kunst, die nichts mit dem Computer zu tun haben.

Diese Objekte entstanden durch Anwendung algorithmischer Prinzipien und Techniken, die vom Künstler selbst (als „Prozessor“, d.h. als Ausführender) umgesetzt wurden. Solche Prinzipien und Techniken sind z.B. unter den Bezeichnungen Diskretisierung (also das Arbeiten mit „gerasterten“ Darstellungsformen), Digitalisierung (also der Rückgriff auf 0/1-codierte Darstellungen), Randomisierung (also die Verwendung von Zufallsprozessen) und Seriierung (also das Arbeiten mit Wiederholungsstrukturen) bekannt. Sie sind nicht nur für die bildende Kunst sondern besonders auch für die Musik (auf die ich hier nicht eingehen kann) von Bedeutung.

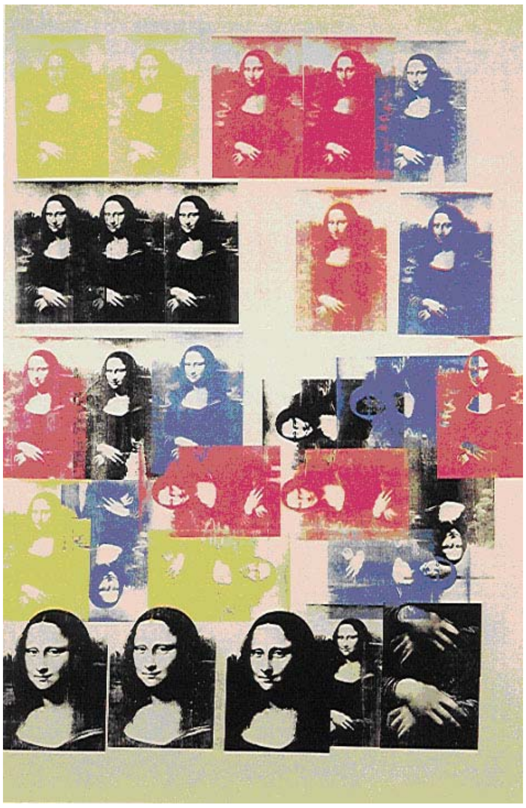
Es fällt schwer, eine Auswahl zu treffen. Bei Kunstobjekten, die vorrangig durch Anwendung des Prinzips der Randomisierung entstanden sind (vgl. nebenstehend: W. Kiwus „Der geistige Mensch und die Technik"), ist es manchmal schwer zu sagen, ob das Endprodukt von einem Menschen oder von einem Computer erzeugt wurde. Aber auch, wenn es der Computer ist, so ist er doch nie in autonomer Form der „Vater des Designs".



Diskretisierung und Digitalisierung entstehen im Zusammenhang mit der Verwendung gerasterter, „körniger" Medien. Die Frage, ob unserer gesamten Welt, wie wir sie heute kennen, eine solche diskrete Struktur zugrunde liegt, führt direkt in die Grundlagenfragen der modernen (Quanten-) Physik.

Als spektakuläre Beispiele für serielle Kunst werden immer wieder die Produkte von A. Warhol zitiert.

Weitere Beispiele serieller Kunst, die mit Sicherheit nicht mit Hilfe des Computers erstellt wurden, stammen z.B. von HAP Grieshaber oder C. Monet (Die Kathedrale von Rouens).



Dass auch dichterische Kunstwerke durch Algorithmierung in Verbindung mit Randomisierung entstehen können, zeigt das folgende „Computer"-Gedicht (Gunzenhäuser):

> Der Schnee ist kalt
> und jeder Friede ist tief
> und kein Christbaum ist leise
> oder jede Kerze ist weiss
> oder ein Friede ist kalt
> oder nicht jede Kerze ist rein
> und ein Engel ist rein
> und jeder Friede ist still
> oder jeder Friede ist weiss
> oder das Kind ist still
> ein Engel ist überall.

4 Algorithmik auf unterschiedlichen geistigen Ebenen

Algorithmik findet auf unterschiedlichen Ebenen statt. Auf der *Objektebene* gehört dazu der Umgang mit konkreten Algorithmen und algorithmischen Produkten. Auf der *Metaebene* ist das algorithmische Arbeiten mit einer bestimmten Methodologie verbunden. Ganz im Vordergrund steht dabei in offensichtlicher Weise das Konstruktive, denn jeder Algorithmus ist eine Handlungs-, eine Konstruktionsvorschrift. Darüber hinaus ist algorithmisches Arbeiten stets auch konkret und beispielsorientiert. Jeder Algorithmus transformiert *konkret* gegebene Eingabedaten durch eine *konkrete* Vorschrift in *konkrete* Ausgabedaten. Mathematische Algorithmen haben somit etwas „handfestes“, das nicht-algorithmischen Objekten des mathematischen Diskurses oft fehlt. Algorithmisch zu arbeiten heißt aber auch, zu experimentieren, einen explorativen Arbeitsstil zu pflegen. In der Didaktik der Mathematik spielt das *operative Prinzip* eine herausragende Rolle. In seiner kürzestmöglichen Beschreibung bedeutet die Anwendung des operativen Prinzips eine Vorgehensweise nach der Frage „Was passiert, wenn …“ (vgl. z.B. E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts). Diese Vorgehensweise ist z.B. in der Form der kontrollierten Variation von einschlägigen Einflussparametern fundamental für mathematisches und naturwissenschaftliches Arbeiten. Ganze Software-Entwicklungen sind von der Frage „Was passiert, wenn …“ durchdrungen. So werden die inzwischen überall vorzufindenden Tabellenkalkulationssysteme im Englischen auch als „what-if-software“ bezeichnet. Eine weitere Klasse von Software-Systemen, bei denen die operative Vorgehensweise im Zentrum steht, sind die Systeme der „Dynamischen Geometrie“(Cabri Geomètre, Cinderella, Euklid, GeoNext, ...).

Und schließlich weist das algorithmische Arbeiten oft einen hohen Grad von Beziehungshaltigkeit, von Vernetztheit, von Interdisziplinarität auf. Dies sei im folgenden stichwortartig erläutert.

Vernetzung bedeutet das Herstellen eines Beziehungsnetzes sowohl fachintern als auch fachübergreifend. Themen mit einem hohen Grad an Beziehungshaltigkeit sind vielseitig „vernetzte“ Themen. Solche Themen sind übrigens auch in einem höheren Maße bildungsrelevant als Themen mit „Inselcharakter“. Dies nicht zuletzt auch, weil vernetztes Wissen lernpsychologisch stabiler ist als isoliertes Wissen. Marvin Minsky beschreibt dies sehr schön im folgenden Text (vgl. [Minsky 1985]):

> *As scientists we like to make our theories as delicate and fragile as possible. We like to arrange things so that if the slightest thing goes wrong, everything will collapse at once!*
> *Why do scientists use such shaky strategies? So that when anything goes wrong, they'll be the first to notice it. ...*
> *But it isn't good psychology. In real life, our minds must always tolerate beliefs that later turn out to be wrong. It's also bad the way we let teachers shape our children's mathematics into slender, shaky tower chains instead of robust, cross-connected webs. A chain can break at any link, a tower can topple at the slightest shove. And that's what happens in a mathematics class to a child's mind whose attention turns just for a moment to watch a pretty cloud.*

Algorithmisches Arbeiten kann sehr unterschiedliche Wissensfelder miteinander verbinden. So verbindet z.B. der Euklidische Algorithmus Algebra und Geometrie. Die Fraktal-Algorithmen verbinden Analysis und Geometrie. Ähnliche Verbindungen gibt es auch über das Fach Mathematik hinaus:

- Algorithmen sind im *naturwissenschaftlichen Bereich*, z.B. durch Simulationsverfahren und die Anwendung diskreter Methoden von Bedeutung.
- Algorithmen spielen in den *Sprachwissenschaften* eine Rolle, z.B. in der Form generativer Grammatiken (N. Chomsky).
- Algorithmen kommen in den *Sozialwissenschaften*, z.B. im Zusammenhang mit dem d'Hondtschen (und anderen) Verfahren zur Ermittlung der Sitzverteilung im Parlament vor.

- Algorithmen spielen in der (schriftlich tradierten) *Kultur- und Wissenschaftsgeschichte* der Menschheit als gesetzliche Vorschriften und Handlungsprotokolle aller Art eine wichtige Rolle. Ein frühes Beispiel ist der Codex Hammurapi aus der Zeit um etwa 1800 v.Chr. (Gesetz 2 – sinngemäß):

  > *„Wenn jemand einen Mann beschuldigt und der Angeklagte zum Fluss geht und in den Fluss springt, und wenn er dann untergeht, so soll der Ankläger sein Haus in Besitz nehmen.*
  > *Aber wenn der Fluss beweist, dass der Angeklagte unschuldig ist und wenn dieser unverletzt entkommt, dann werde der Ankläger zum Tode verurteilt, während derjenige, der in den Fluss gesprungen ist, vom Hause des Anklägers Besitz ergreifen soll."*

  Was immer man (und dies besonders in der „Hauptstadt des Rechts") juristisch von dem Gesetz halten mag – eines ist offensichtlich: Es ist ein Algorithmus.
- Algorithmen spielen natürlich in der *Informatik* eine zentrale Rolle. Nach Ansicht mancher Informatiker ist die Informatik geradezu die Wissenschaft von den Algorithmen. Da die Algorithmik seit jeher auch ein Kerngebiet der *Mathematik* ist, liegt sie im Zentrum des Bereiches, wo sich Mathematik und Informatik überschneiden und gegenseitig befruchten.
- In der *Philosophie*, Wissenschaftstheorie und Logik spielt die Analyse von Algorithmen im Zusammenhang mit der Diskussion um die Grenzen des Computers und darüber hinaus um die Grenzen der menschlichen Erkenntnis eine zentrale Rolle (Formalisierung des Begriffs der Berechenbarkeit, Hilbertsches Programm des Formalismus, Gödelsche Unvollständigkeitssätze, ...).
- Und schließlich: Die Rolle der Algorithmik im Bereiche der *Kunst* ist ja gerade der Gegenstand dieses Artikels.

Die algorithmische Methode ist ein Band, das viele Fachgebiete und Wissensbereiche miteinander verbindet. Algorithmische Verfahren (wie z.B. Diskretisierung, Digitalisierung, Randomisierung, Seriierung und vieles mehr), die ein Lernender in einem Bereich kennen gelernt hat, lassen sich oft in andere Bereiche übertragen.

Vielleicht liegt nicht so sehr in den algorithmischen Objekten selbst als in den gerade beschriebenen methodologischen Eigenschaften eine der größten Gemeinsamkeiten zwischen Kunst und Mathematik.

5 Bildungsziel: Wahrnehmensschulung

Ich möchte diesen Artikel nicht abschließen, ohne die Rolle von Kunst und Mathematik in unserem Bildungssystem aus einer weiteren Perspektive anzusprechen.

Dem Unterrichtsfach Mathematik kommt grundsätzlich eine aufklärerische Aufgabe zu. Dazu gehört traditionell die Schulung des Denkens, aber auch die Sinnes- und Wahrnehmensschulung. In der letzten Zeit gewinnt gerade die letztere Aufgabe im Zusammenhang mit der

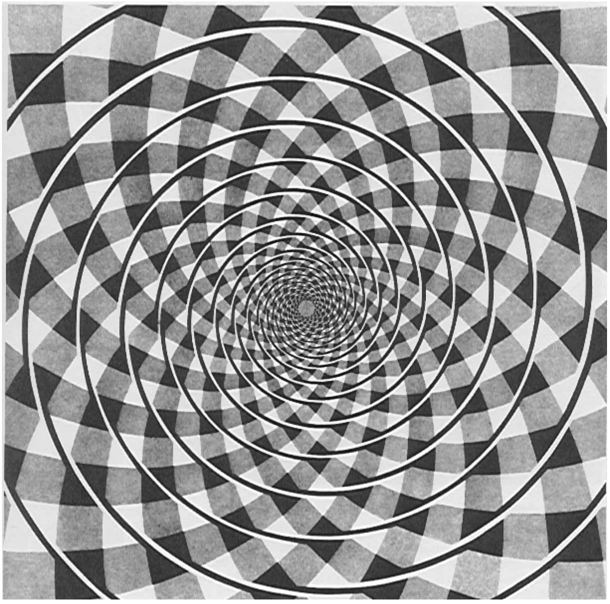
Überflutung der Sinne durch Umwelteinflüsse und besonders durch die Medien eine immer größere Bedeutung. Künstliche Video- und „multi-media“ Welten drängen sich zunehmend ins Bewußtsein der Kinder. Dabei droht der Sinn für die reale Welt und allgemein für die Realitäten des Lebens verloren zu gehen. So wird z.B. das „Geld“ immer mehr von seiner Bindung an Arbeit, an Gelderwerb, an konkrete Warenwerte (Tauschfunktion des Geldes) entkoppelt. Geld manifestiert sich in den Medien oft in der Form von sich in irrwitzigen Zickzackbewegungen um den Globus jagenden, jeder Realität entkleideten Zahlenkolonnen, wo ein kleiner Ausschlag nach oben oder nach unten über das Schicksal von ganzen Firmen oder menschlichen Gemeinschaften „Ausschlag“ geben kann.

Wie in jeder Gesellschaft, so gibt es auch in der unseren Kräfte, die von der Verschleierung, von der Täuschung, vom Vorspiegeln falscher Tatsachen leben. Die alles durchdringende und durchsetzende Werbung (besonders in der Form der Fernseh-Werbung und der Internet-Werbung) ist heute eine solche Kraft. Diese Art von Werbung hat kaum noch etwas mit sachlicher Information sondern bestenfalls mit Effekthascherei und in ihren schlimmeren Varianten mit Täuschung, Verschleierung und Desinformation zu tun. Die Werbung ist einer der „modernen“ Nachfolger der heute eher altbacken anmutenden Propaganda aus früheren Zeiten. Schon werden Pläne geschmiedet, Schulen und andere Bildungseinrichtungen in Zeiten knapper Finanzmittel über „Werbung“ zu finanzieren. Das Ganze wird dann noch mit „coolen“ Schlagwörtern wie „edutainment“ und „infotainment“ garniert und so einer staunenden, desorientierten Öffentlichkeit angedient.

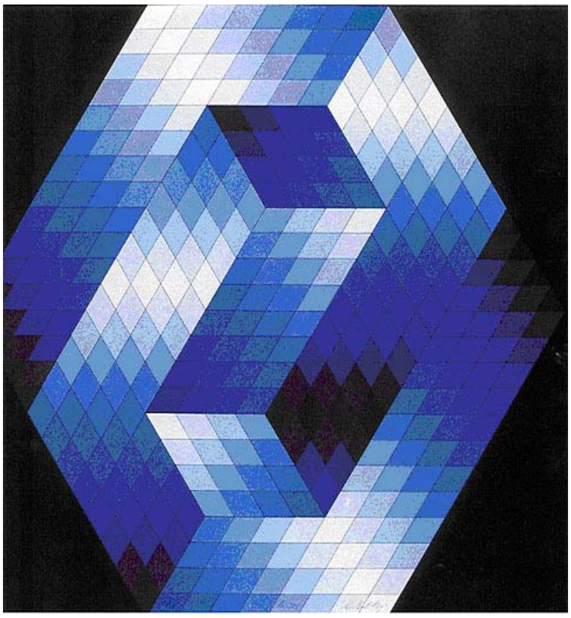
Um so wichtiger ist es, neben der Schulung des Denkens auch Sinnes- und Wahrnehmensschulung zu betreiben. Mathematisches Denken und mathematische Methoden können viel dazu beitragen, nicht nur Scheinargumente zu entlarven sondern auch Scheinwelten zu erkennen und von der realen Welt unterscheiden zu lernen. Im Hinblick auf diese Zielsetzung könnten Kunst und Mathematik gemeinsam wichtige Bildungsziele verfolgen.

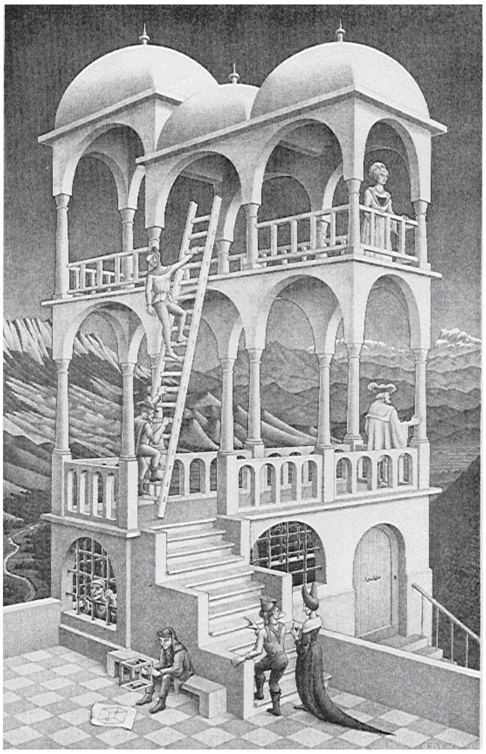
Es gibt eine Fülle von Bildern, die schlichtweg falsche Sachverhalte suggerieren, darunter z.B. auch viele wahrnehmungsphysiologisch oder auch aus mathematischer Sicht interessante optische Täuschungen. Auf manchen Bildern „sieht“ der Betrachter Dinge, die gar nicht abgebildet sind – hier sei z.B. auch an das Phänomen der „lateralen Inhibition“ erinnert. Manche Bilder enthalten mehr als man zunächst sieht (z.B. die zu Beginn des letzten Jahrhunderts recht beliebten „Vexier“-Bilder) oder die *SIRD-Bilder* (SIRD: Single Image Random Dot Stereogram), die in den letzten Jahren eine sprunghafte Popularität erreicht haben. In manchen Bildern sehen verschiedene Menschen verschiedenes.

Dieses Thema verlangt im Hinblick auf die Fülle der zu berücksichtigenden Aspekte, im Grunde genommen, eine eigenständige Abhandlung. An dieser Stelle kann nur eine Winzige Auswahl widergegeben werden.



Dass es immer wieder Probleme mit der Darstellung dreidimensionaler Sachverhalte auf einem zweidimensionalen Medium gibt, haben V. Vasarely und M. C. Escher eindrucksvoll gezeigt.





6 Schlussbemerkungen

Die Algorithmik ist fundamental für die Mathematik, die Wissenschaft und vielleicht sogar für die Kunst. Sie spielt eine wichtige Rolle in den Bereichen

- Geschichte (und Kulturgeschichte) von Mathematik und Wissenschaft

  Ein großer Teil des mathematischen Wissens ist Wissen über Algorithmen und je weiter man in der Geschichte zurückgeht, um so mehr trifft dies zu. Wußing [1979] formuliert es so: *Keine wissenschaftliche Disziplin würde mehr verlieren als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde.*
- Mathematik im Unterricht / mathematische Bildung

  Auf der *Ebene der Inhalte* ist eine Fülle von Algorithmen zu „erlernen“, zu erarbeiten, zu analysieren, zu verstehen.

  Auf der *Ebene der Methodologie* beeinflusst die algorithmische Methode ganz entscheidend die Prozesse

  * des Lehrens von Mathematik
  * des Erlernens von Mathematik
  * des Praktizierens von Mathematik (also des algorithmischen Problemlösens).

- Metamathematik

  Hier werden Fragen der folgenden Art untersucht

  * Was ist ein Algorithmus ?
  * Was soll es heißen, dass etwas berechenbar ist ?
  * Wo liegen die Grenzen des Algorithmierens ?
  * Was sind die Grenzen des Computers ?

- Philosophie der Mathematik

  Algorithmen sind zentraler Bestandteil einer konstruktiven Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. Eine der herausragenden Persönlichkeiten, welche die Grenzen der Berechenbarkeit (und damit die Grenzen des Algorithmierens und die Grenzen des Computers) erforscht und erkundet haben, war Kurt Gödel (1906–1978). Im folgenden seien einige Zitate wiedergegeben, welche die Bedeutung seiner Arbeit, aber zugleich auch die Bedeutung der Wechselbeziehungen zwischen der Algorithmik und der Philosophie verdeutlichen.

  Der Mathematiker und Logiker Heinrich Scholz bezeichnete den Gödelschen Unentscheidbarkeitssatz als

  > *die Kritik der reinen Vernunft im Jahre 1931.*

  Der Mathematiker Lynn Arthur Steen schreibt in dem Buch „Mathematics Today“

  > *Gödel proved what could well be one of the most profound results in the history of thought ...*

Der Dichter und Schriftsteller H. M. Enzensberger hat sich von den Gödelschen Resultaten zu dem folgenden Gedicht anregen lassen [Enzensberger 1971, S. 168]

Hommage à Gödel

Münchhausens Theorem, Pferd, Sumpf und Schopf,
ist bezaubernd; aber vergiß nicht,
Münchhausen war ein Lügner.

Gödels Theorem wirkt auf den ersten Blick
etwas unscheinbar, doch bedenk:
Gödel hat recht.
...

Und mit diesem Gedicht zu einer der Kernfragen der Algorithmik ist wiederum eine Brücke zwischen Mathematik und Kunst geschlagen.

Literaturhinweise

Deken J.: Computerbilder – Kreativität und Technik; Birkhäuser, Basel 1984

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Mathematik für Computeranwendungen – Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen; Paderborn 1989

Edwards H. M.: An Appreciation of Kronecker, Mathematical Intelligencer, 1, 1987, 28–35

Eigen M., Winkler. R.: Das Spiel; Serie Piper, München 1975

Engel A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt; Klett Verlag, Stuttgart 1977

Enzensberger H. M.: Gedichte 1955-1970, suhrkamp taschenbuch 4, 1971

Euklid: Die Elemente, Buch I-XIII; Friedr. Vieweg Verlag, Braunschweig 1973 und Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1991

Ganzhorn K. / Walter W.: Die geschichtliche Entwicklung der Datenverarbeitung; IBM Deutschland, München 1975

Gunzenhäuser R.: Zur Synthese von Texten mit Hilfe programmgesteuerter Ziffernrechenmaschinen; Philips Techn. Bibl., Hamburg 1960

Hawking, Stephen W.: Eine kurze Geschichte der Zeit, Rowohlt 1988

Hermes H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit; Springer-Verlag, Berlin 1971 (2. Aufl.)

Jacobs K.: Resultate – Ideen und Entwicklungen in der Mathematik: Band 2: Der Aufbau der Mathematik; Vieweg Verlag, Braunschweig 1990

Minsky M.: The Society of Mind; New York 1985

Nake F., Stoller D. (Hrsg.): Algorithmus und Kunst “Die präzisen Vergnügen”; Sautter + Lackmann Fachbuchhandlung, Hambzrg 1993

Nissen H.J., Damerow P., Englund R.K.: Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient; verlag franzbecker und Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 1990

Rödiger K.-H. (Hrsg.): Algorithmik – Kunst – Semiotik, Hommage für Frieder Nake; SYNCHRON Wissenschaftsverlag der Autoren, Heidelberg 2003

Steen L. A.: Mathematics Today; Springer-Verlag, New York 1978

Steinbuch K.: Automat und Mensch, Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1963

Wittmann E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1976

Wußing H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik; Berlin 1979

Zemanek H.: AL-KHOREZMI – His Background, His Personality, His Work and His Influence; in: Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science (Hrsg. A. P. Ershov and D. E. Knuth), Berlin 1981

Ziegenbalg J.: Algorithmen – von Hammurapi bis Gödel; Heidelberg Berlin Oxford 1996