Das Folgende ist ein Zitat aus dem Buch

Algorithmen
von Hammurapi bis Gödel

Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum
Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016

1.3 Zur Methodologie des algorithmischen Arbeitens

Auf der *Metaebene* ist die Algorithmik eng mit philosophischen Fragen und Fragen der allgemeinen Methodologie verknüpft. Die philosophischen Fragen werden ausführlicher in Kapitel 7 behandelt. Hier seien zunächst die methodologischen Aspekte angesprochen.

Die algorithmische Vorgehensweise stellt, insbesondere bei Verwendung des Computers als modernem Werkzeug zur Abarbeitung von Algorithmen, ein wertvolles Hilfsmittel dar, um klassische methodologische Ziele zu verfolgen; vgl. Ziegenbalg 1984, 1988 und 2000.

Hierzu gehören vorrangig (vgl. auch Polya 1945):

- Das *experimentelle* und *beispielgebundene* Arbeiten: Vor jeder abstrakten mathematischen Theorie steht in der Regel das spielerische Experimentieren mit Beispielen aus dem Bereich der Zahlen oder anderer mathematischer Objekte. Das Aufstellen und Verifizieren von Hypothesen setzt im Allgemeinen ein solides Studium der dem Problem zugrunde liegenden *Daten* voraus. Solche Experimente sollte man zunächst „von Hand“ ausführen. Bei etwas komplexerer Sachlage wird aber sehr bald der (mit geeigneter Software ausgestattete) Computer ein unverzichtbares Werkzeug zum Experimentieren.
- Anwendung *operativer* Vorgehensweisen[1]: Die Anwendung des operativen Prinzips bedeutet eine Vorgehensweise entsprechend der Grundfrage

„ ... was passiert, wenn ...“

Operatives Vorgehen ist fundamental für jede forschende und entdeckende Tätigkeit in Mathematik und Naturwissenschaften; auch das systematische Variieren von Parametern und Einflussfaktoren gehört zu einer operativen Vorgehensweise. Am Beispiel der Computersimulationen wird die Bedeutung der operativen Vorgehensweise besonders deutlich. Erich Wittmann (1981), Hans Schupp (2002) und Horst Hischer (2015) haben sich in ihrer wissenschaftlichen Arbeit intensiv mit dem operativen Prinzip beschäftigt − die beiden letztgenannten sprechen in diesem Zusammenhang vom „Prinzip der Variation“.

---

[1] zum Begriff des *operativen Prinzips* siehe: E. Wittmann, 1981

- *Konstruktive* Vorgehensweisen und Begriffsbildungen: Jeder Algorithmus ist eine „Konstruktionsvorschrift“ zur Lösung eines bestimmten Problems. Algorithmisch zu arbeiten heißt, sich den jeweiligen Lern- und Forschungsgegenstand handelnd zu erschließen; algorithmisches Arbeiten kommt in ganz natürlicher Weise der Forderung nach Eigentätigkeit und aktiver Eigengestaltung des Lernprozesses entgegen.
- *Elementarisierung*: Algorithmisch vorzugehen heißt, sich die Lösung eines Problems schrittweise aus Elementarbausteinen aufzubauen. Der Begriff des Elementaren ist tief mit dem des Algorithmus verbunden. Algorithmische Lösungen vermeiden oft technisch und begrifflich aufwendige Methoden der formel-orientierten Mathematik zugunsten wesentlich elementarerer iterativer bzw. rekursiver Vorgehensweisen.

Hierzu eine **erste Fallstudie** (*Formel versus Algorithmus* – Beispiel 1):

Traditionell erwartete man in der Mathematik der vergangenen Jahrhunderte als idealtypische Lösung eines Problems die Angabe einer „Lösungsformel“. So galt z.B. das Problem der Berechnung der Fibonaccischen Zahlen[2] (zur Definition der Fibonacci-Zahlen: siehe Abschnitt 4.2.2) aus dem Jahre 1204 so lange als ungelöst, bis Binet[3] im Jahre 1843 seine heute nach ihm benannte Formellösung präsentierte:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

So interessant diese Formel an sich auch sein mag (sie war im Wesentlichen auch bereits de Moivre[4] bekannt); heute wäre es hochgradig unvernünftig, die Fibonacci Zahlen mit dieser Formel zu berechnen. Ein einfacher, iterativer, auf der ursprünglichen rekursiven Beschreibung der Fibonacci Zahlen beruhender Algorithmus (vgl. dazu auch Abschnitt 5.1) ist z.B.

[2] Leonardo von Pisa, „Fibonacci“ (ca. 1170−1240) in seinem epochemachenden Buch *Liber Abaci* (1202)

[3] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom

[4] Abraham de Moivre (1667−1754), französischer Mathematiker

in Verbindung mit einem Computeralgebrasystem sehr viel besser zur Berechnung der Fibonacci Zahlen geeignet. Eine umgangssprachliche informelle Fassung eines solchen Algorithmus zur Berechnung der n-ten Fibonacci-Zahl lautet etwa folgendermaßen:

1. Starte mit den Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und weise dem Zähler i den Wert 1 zu.
2. Solange der Zähler i den Wert n noch nicht erreicht hat, tue folgendes:

   Berechne die Summe F_i der beiden zuletzt berechneten Zahlen F_{i-1} und F_{i-2}.
   Erhöhe den Zähler i um 1.
3. Die letzte so berechnete Zahl ist die gesuchte Fibonacci-Zahl.

Man beachte: Die „schwierigste" mathematische Operation in diesem Verfahren ist, die Summe zweier natürlicher Zahlen zu bilden; man vergleiche dies mit den kognitiven Voraussetzungen für den Umgang mit der Formel von Binet. In ähnlicher Weise ist es heute sinnvoll, auch für andere Probleme algorithmische Beschreibungen als Lösung zu akzeptieren, denn viele komplexe Probleme der realen Welt sind gar nicht durch (geschlossene) Formeln lösbar oder solche Lösungen werden sehr schnell maßlos kompliziert und nicht mehr gut beherrschbar.

Besonders die Methode der Computersimulation (vgl. Abschnitt 4.5) macht heute hochgradig effiziente, elementare und in der Regel auch hinreichend genaue Problemlösungen möglich und praktikabel. Mit Computersimulationen lassen sich oft sehr brauchbare Lösungen erzielen – häufig auf der Basis extrem elementarer Zähl-Strategien.

- *Beziehungshaltigkeit* bedeutet das Herstellen eines Beziehungsnetzes sowohl fachintern als auch fächerübergreifend. Algorithmisches Arbeiten kann sehr unterschiedliche Wissensfelder miteinander verbinden. So verbindet z.B. der Euklidische Algorithmus Algebra und Geometrie. Die Fraktal-Algorithmen verbinden Analysis und Geometrie. Ähnliche Verbindungen gibt es auch über das Fach Mathematik hinaus. Einige Beispiele:
  - Algorithmen sind in den *Technik-*, *Ingenieur-* und *Naturwissenschaften* durch Diskretisierung sowie durch die Anwendung iterativer Verfahren und Simulationsverfahren von Bedeutung.

- Algorithmen spielen in den *Sprachwissenschaften* eine Rolle, z.B. in der Form von Transformationsgrammatiken oder generativen Grammatiken (vgl. Chomsky 1957).
- Im Bereich der *Kunst* treten Algorithmen z.B. in der seriellen Kunst, der Aleatorik, oder in der Form rekursiver und fraktaler Themen und Arbeitstechniken auf (vgl. Rödiger 2003, Könches / Weibel 2005).
- Algorithmen spielen in den *Sozialwissenschaften* eine Rolle z.B. im Zusammenhang mit dem d'Hondtschen (und anderen) Verfahren zur Ermittlung der Sitzverteilung in Parlamenten (vgl. Stellfeldt 2006).
- In der (schriftlich tradierten) *Kultur*-, *Rechts-* und *Wissenschaftsgeschichte* der Menschheit spielen Algorithmen als gesetzliche Vorschriften und Handlungsanweisungen aller Art eine wichtige Rolle. Eines der frühesten dokumentierten Beispiele dafür ist der Codex Hammurapi aus der Zeit um etwa 1800 v. Chr. In ihm werden, auch wenn sie nach unserem heutigen Rechtsverständnis sehr fremd wirken, gesetzliche Verfahrensformen, Bedingungen und Regeln formuliert, die ganz klar algorithmischer Natur sind. Ein Zitat (Gesetz 2 – sinngemäß):

  Wenn jemand einen Mann der Zauberei beschuldigt und der Angeklagte zum Fluss geht und in den Fluss springt, und wenn er dann untergeht, so soll der Ankläger sein Haus in Besitz nehmen. Aber wenn der Fluss beweist, dass der Angeklagte unschuldig ist und wenn dieser unverletzt entkommt, dann werde der Ankläger zum Tode verurteilt, während derjenige, der in den Fluss gesprungen ist, vom Hause des Anklägers Besitz ergreifen soll.

Abbildung 1.2
Codex Hammurapi
(Oberteil der Stele)

- Algorithmen spielen natürlich in der *Informatik* eine zentrale Rolle. Nach Ansicht mancher Informatiker (und besonders solcher, die diese Wissenschaft in ihrer Entstehungsphase geprägt haben) ist die Informatik geradezu die Wissenschaft von den Algorithmen. Da die Algorithmik seit jeher ein Kerngebiet der Mathematik ist, liegt sie somit im Zentrum des Bereichs, wo sich Mathematik und Informatik überschneiden und gegenseitig befruchten.

− In der *Philosophie* und insbesondere der *Wissenschaftstheorie* ist die Algorithmik ein zentrales Thema im Zusammenhang mit der Untersuchung der Grenzen der Berechenbarkeit, also der eigentlichen, unumstößlichen *Grenzen des Computers*. Im Hintergrund dieser Untersuchungen steht die in der Geschichte der Menschheit immer wieder gestellte Frage "Was können Maschinen (was können Computer) und was können sie nicht?"

Die algorithmische Methode ist ein Band, das viele Fächer und Wissensbereiche miteinander verbindet. Algorithmische Verfahren (wie z.B. Suchstrategien, Klassifizierungsschemata und vieles mehr), die der Lernende in *einem* Bereich kennengelernt hat, lassen sich oft sehr gut in *andere* Bereiche übertragen. Seiner Bedeutung entsprechend ist es nur angemessen, wenn das Thema *Algorithmik* als Grundlagenveranstaltung an zentraler Stelle in den Studienplänen der Fächer Mathematik und Informatik verankert ist. Dies gilt aus den oben angeführten Gründen in ganz besonderem Maße für das Lehramtsstudium.

Algorithmisches Problemlösen / algorithmische Begriffsbildung

Schließlich sei an dieser Stelle noch auf einen weiteren entscheidenden Vorteil des algorithmischen Problemlösens hingewiesen: seine hervorragende *Skalierbarkeit*. Es ist auf allen Ebenen anwendbar − von der fast voraussetzungsfreien Beschäftigung mit zunächst sehr einfachen Beispielen bis hin zu den raffinierten Techniken, wie sie z.B. in modernen Computeralgebrasystemen umgesetzt sind. In der Übersicht („Heuristischer Zyklus“) sind die wichtigsten Stufen von Problemlöseprozessen in idealtypischer Weise zusammengestellt (man vergleiche hierzu z.B. auch Polya, 1945).

Es ist offensichtlich, dass das algorithmische, computerunterstützte Problemlösen bestens geeignet ist, diesen heuristischen Zyklus zu unterstützen. Dies beginnt schon in der empirischen Phase. Erste Beispiele sollten in der

Regel „mit Papier und Bleistift“ erarbeitet werden. Aber auf diese Weise ist nur die Betrachtung sehr einfacher Fälle in „Spielzeug-Welten“ möglich. Erst der Einsatz des Computers macht es möglich, auch komplexe, typische Fälle der realen Welt zu betrachten und zur Hypothesenbildung heranzuziehen. In Abschnitt 4.5 (Probabilistische Verfahren, Modellbildung und Simulation) finden sich Konkretisierungen dieses „heuristischen Zyklus“.

Über die bereits sehr effiziente Nutzung einfachster Programme auf der Basis elementarer algorithmischer Grundbefehle hinaus bieten die modernen Computeralgebrasysteme exzellente Unterstützungsmöglichkeiten auf praktisch allen Ebenen des mathematischen Arbeitens.

Heuristischer Zyklus

1. *Ausgangssituation*: Gegeben ist ein Problem, eine zunächst unübersichtliche, undurchsichtige Situation.
2. *Empirische Phase, erste Bestandsaufnahme*: Durch Betrachten zunächst einfacher und danach unter Umständen komplexerer typischer Beispiele verschafft man sich einen ersten Überblick über die Situation.
3. *Präzisierung und Hypothesenbildung*: Die Behandlung hinreichend vieler gut variierter, typischer Beispiele führt zur Ausdifferenzierung und Präzisierung der Fragestellung (oft auch in Verbindung mit der Entwicklung einschlägiger Begriffe und Terminologien) und zu ersten konkreten Vermutungen, die dann durch die Analyse weiterer Beispiele erhärtet oder falsifiziert werden.
4. *Formalisierung*: Die so erzielte höhere Vertrautheit mit der Situation ermöglicht die Entwicklung von Theorien, von mathematischen oder anderen Modellen und von formalen Beschreibungen, z.B. durch Algorithmen, durch Gleichungen bzw. Gleichungssysteme, durch Graphen, Diagramme und Ähnliches mehr.
5. *Lösung*: Auf der Basis der formalen Beschreibungen werden (oft unter Einsatz mathematischer Standardverfahren) erste Lösungen für das ursprüngliche Problem erarbeitet.
6. *Festigung, Plausibilitätsbetrachtungen* („Proben“): Ausdehnung dieser ersten Lösungen auch auf Rand- und Sonderfälle führt zu einer Stabilisierung des Modells.
7. *Modifikation, Verallgemeinerung*: Diese Stabilisierung führt dann sehr oft zu Fragen der Verallgemeinerung oder zu sonstigen Modifizierungen der ursprünglichen Situation; man ist damit wieder auf einer neuen ersten Stufe des Problemlöseprozesses angelangt und der „heuristische Zyklus“ kann beginnen, sich ein weiteres Mal zu drehen.

In einer **zweiten Fallstudie** (*Formel versus Algorithmus* – Beispiel 2) soll nun gezeigt werden, dass und wie das algorithmische Arbeiten neben der Elementarisierung auch dem Ziel der *Begriffsbildung* dienen kann. Dies sei im Folgenden am Beispiel des Begriffs des *effektiven Zinssatzes von Ratenkrediten* skizziert.

Bei einem *Ratenkredit* leiht ein Kreditgeber einem Kreditnehmer einen bestimmten Geldbetrag unter der Bedingung, dass ihm der Kreditnehmer eine feste Anzahl von Zahlungen in gleicher Höhe und in gleichbleibenden Zeitabständen zurückzahlt. Daraus ergibt sich in natürlicher Weise die Frage, welches der „richtige“ Zinssatz ist, der diesem Geldfluss (unter Verzinsungsaspekten) entspricht. Der folgende Algorithmus gibt den Geldfluss eines Ratenkredits (mit der Kredithöhe K, der Rate r und der Laufzeit L) wieder:

```
Geldfluss_Ratenkredit(K, r, L) :=
  Wiederhole L mal:
    Ueberweise die Rate r an den Kreditgeber.
```

Der deutsche Gesetzgeber nennt den gesuchten Zinssatz den *effektiven Zinssatz* und hat seine Berechnung in seiner Preisangabenverordnung (PAngV) explizit geregelt. Bis zum Jahre 1981 galt die sogenannte *Uniformmethode*, bei der Zinseszinsaspekte jedoch unberücksichtigt blieben und die somit keine akzeptablen Werte lieferte.

In der Preisangabenverordnung von 1981 formulierte dann der Gesetzgeber (sinngemäß):

> Es seien K die Höhe des Kredits, r die monatliche Rate, J die Anzahl der vollen Laufzeitjahre, m die Zahl der Restmonate, i eine formale Variable und $q := 1 + i$. Man suche eine Lösung i der Gleichung
>
> $$\left(K \cdot q^J - r \cdot \left(\frac{11}{2} + \frac{12}{i}\right) \cdot (q^J - 1)\right) \cdot \left(1 + \frac{m}{12} \cdot i\right) - r \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{24} \cdot i\right) = 0 \qquad \text{(P)}$$
>
> Dann ist $e := 100 \cdot i$ der *effektive Zinssatz* des Ratenkredits.

Die Formel (P) ist nicht nur sehr kompliziert und schwer zu verstehen; sie lässt sich auch nicht (außer in trivialen Fällen) nach der gesuchten Größe auflösen. Und sie ist schließlich, auch von der Sachsituation her gesehen, kein wirklich guter Kandidat für den effektiven Zinssatz (obwohl sie natürlich eine Verbesserung im Vergleich zur Uniformmethode darstellt).

Eine weniger formel-fixierte, algorithmische Denkweise legt dagegen die folgende Definition und Berechnung des effektiven Zinssatzes nahe:

1. *Vorbetrachtung*: Eine andere gebräuchliche Kreditform ist der Annuitätentilgungskredit. Er basiert (bei monatlicher Ratenzahlung) auf den Aus-

gangsparametern K (Kredithöhe), p (Monats-Zinssatz) und r (Rückzahlungsbetrag, auch als *Rate* oder *Annuität* bezeichnet). Beim Annuitätentilgungskredit werden die angefallenen Zinsen stets auf der Basis der aktuellen Höhe der Restschuld, des verstrichenen Zinszeitraums und des vereinbarten Zinssatzes berechnet. Nach jeder Ratenzahlung wird die Höhe der Restschuld sofort aktualisiert.

Der Geldfluss des Annuitätendarlehens wird durch den folgenden Algorithmus beschrieben:

```
Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p) :=
  Solange die Restschuld groesser als 0 ist, tue folgendes:
    [Ueberweise die Annuitaet (Rate) r an den Kreditgeber.
     Berechne die neue Restschuld wie folgt
       Restschuld(neu) = Restschuld(alt) + Zinsen – Rate.
     Ersetze die alte Restschuld durch die neue Restschuld.]
```

Unbekannt ist beim Annuitätentilgungskredit zunächst die Anzahl der Zahlungen, die nötig sind, bis der gesamte Kredit (nebst zwischenzeitlich angefallener Zinsen) getilgt ist. Mit anderen Worten: Die Laufzeit des Kredits ist unbekannt.

Aufgabe (für Leser mit entsprechenden Vorkenntnissen): Setzen Sie den Algorithmus `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` in ein lauffähiges Computerprogramm um. Oder erstellen Sie ggf. ein Tabellenkalkulationsblatt, um dieses Ziel zu verfolgen.

2. *Verlagerung der Sichtweise*: Man vergesse nun, dass der ursprünglich gegebene Kredit ein Ratenkredit war und stelle sich vor, es sei ein Annuitätentilgungskredit. Von ihm sind die Parameter K (Kredithöhe), r (Annuität) und die Laufzeit (= Anzahl der Ratenzahlungen) bekannt. Unbekannt ist jedoch der Zinssatz p.

3. *Lösungsstrategie*: Man formuliere einen kleinen Suchalgorithmus (ein Standard-Halbierungsverfahren reicht z.B. völlig aus), der in Verbindung mit dem obigen Programm `Geldfluss_Annuitaetenkredit(K, r, p)` durch systematisches Variieren der Werte von p (unter Beibehaltung der Werte aller anderer Parameter) denjenigen Zinssatz p ermittelt, für den die Laufzeit des (simulierten) Annuitätentilgungskredits mit der des ursprünglich gegebenen Ratenkredits übereinstimmt. *Dies ist, mit anderen Worten, derjenige Zinssatz, bei dem der Geldfluss des Annuitätentilgungskredits genau mit dem Geldfluss des Ratenkredits übereinstimmt.*

Der so gefundene Zinssatz p ist der natürliche Kandidat für den effektiven Zinssatz des Ratenkredits.

Das hier skizzierte alternative Verfahren ist an Elementarität kaum zu übertreffen. Man kommt in mathematischer Hinsicht völlig mit den Grundrechenarten und etwas Basislogik aus. Dem Leser mit etwas Programmiererfahrung sei empfohlen, das skizzierte Suchverfahren in ein Programm umzusetzen.

Das Beispiel zeigt weiterhin: Die algorithmische Denkweise ist nicht nur geeignet, um vorgegebene Probleme zu lösen; sie kann auch im Prozess der Begriffsbildung eine wichtige Rolle spielen. Die Gleichung (P) haben nur sehr wenige Experten verstanden; das algorithmische Verfahren verwendet dagegen keine kognitiven Voraussetzungen, die über Mittelstufenkenntnisse hinausgehen. Das algorithmische Verfahren ist also wesentlich besser verstehbar, berechnungstechnisch effizienter und es liefert auch von der Sache her angemessenere Werte für den effektiven Zinssatz als das auf der Formel (P) beruhende Verfahren. Es ist schlichtweg die bessere Fassung für den Begriff des effektiven Zinssatzes.

Inzwischen hat sich übrigens auch der Gesetzgeber davon überzeugen lassen, dass eine auf den Prinzipien dieser algorithmischen Beschreibung beruhende Vorgehensweise das bessere Verfahren zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes ist.

Abschließend noch eine Bemerkung zu dem bisher nicht weiter erläuterten Begriffspaar Algorithmen / Algorithmik: In dieser Beziehung ist der Begriff der Algorithmik der umfassendere, denn neben der rein inhaltlichen Seite, eben den Algorithmen (auf der Objektebene), umfasst er (auf der Metaebene) alles, was das Arbeiten mit Algorithmen betrifft, also insbesondere auch die *Methode* des algorithmischen Arbeitens. Dazu gehören: das algorithmisches Problemlösen, die algorithmische Konzeptualisierung, das algorithmisches Denken, und wie wir in Kapitel 3 (Abschnitt 3.3) sehen werden, auch das algorithmische Definieren und Beweisen. Der Begriff der Algorithmik signalisiert, dass es beim algorithmischen Arbeiten um eine bestimmte methodologische und philosophische Grundeinstellung geht, die in einem engen Zusammenhang mit der konstruktivistischen Seite der Mathematik steht.