Algorithmisches Arbeiten
Jochen Ziegenbalg

Ergänzungen zum
Handbuch der Mathematikdidaktik
Verlag Springer Spektrum
Abschnitt 5

5 Algorithmik und mathematische Bildungsinhalte im Bereich der Schulbildung

Im Mathematikunterricht sind Algorithmen in mehrfacher Weise von Bedeutung: einerseits auf der *Objekt-* und andererseits auf der *Metaebene*. Auf der Metaebene gehören im Hinblick auf den Schulunterricht besonders die methodologischen Aspekte der Algorithmik.

Auf der Objektebene sind Algorithmen *Lernstoff*: Eine Fülle von Algorithmen ist im Mathematikunterricht zu erlernen, zu praktizieren, zu verstehen, zu beherrschen, zu analysieren, zu modifizieren. Dies beginnt mit den Verfahren (Algorithmen) des schriftlichen Rechnens und zieht sich durch den gesamten Mathematikunterricht. Eine genauere Analyse zeigt, dass es im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe praktisch kein Thema gibt, das nicht einen zentralen algorithmischen Kern hat. Im Folgenden sind stichwortartig Beispiele (mit dem Schwerpunkt im Mittelstufenunterricht) aufgeführt. Die Auflistung ist eine langzeit-orientierte Zusammenstellung dessen, was in den letzten Jahrzehnten *inhaltlich* aus der Perspektive der Algorithmik im Mathematikunterricht diskutiert wurde und wird.

Primarstufe: Erste Erfahrungen mit Algorithmen – zuallererst im Bereich der Grundrechenarten

- Mustererkennung in der elementaren Arithmetik: einfache Iterierungs- und Reihungsverfahren (insbesondere im Zusammenhang mit den arithmetischen Grundoperationen, z.B. Multiplikation als iterierte Addition, Division als iterierte Subtraktion, „Achter-Reihe“ und ungerade Quadratzahlen, Muster in der „Neuner-Reihe“, …), unkonventionelle arithmetische Verfahren (das Rechnen mit ägyptischen, babylonischen oder römischen Zahlen; die „russische Bauernmultiplikation“), wiederholtes Verdoppeln und Halbieren, nichtdekadische Zahlen- und Stellenwertsysteme
- erste Elemente der Teilbarkeitslehre: Teiler, Vielfache, Division mit und ohne Rest, Primzahlen, Sieb des Eratosthenes
- figurierte Zahlen und rekursive Zahlen- und Punktmuster, iterative und rekursive geometrische Konstruktionsverfahren (z.B. Polyominos, vgl. Golomb 1994, Barequet et al 2017)
- einfache Spiele mit rekursiven Strategien (z.B. NIM)

- erste stochastische Grunderfahrungen (Zählen, Sortieren, Klassifizieren, Ordnen)
- einfache Beispiele zum Thema Geheimschriften und Codierung

Bemerkungen: In der Grundschule geht es zunächst um die praktische Begegnung mit Algorithmen anhand konkreter Beispiele. Der Algorithmus-Begriff selber und erst recht seine formale Definition stehen dabei nicht im Vordergrund. In dieser Schulstufe reicht es zu wissen (und an einigen altersgemäßen Beispielen zu erfahren), dass ein Algorithmus eine sehr genau beschriebene Handlungsanweisung ist.

Besonders im Grundschul-Unterricht besteht die Gefahr, dass bei der Vermittlung der Grundrechenarten eher das „Abspulen können" der Algorithmen im Vordergrund steht und das Verständnis dafür, warum dies zum richtigen Ergebnis führt (warum man dies so „tun darf") eher vernachlässigt wird. So wird z.B. das Verständnis der Verfahrensformen beim Zehner-Übergang erst durch das Verständnis von Stellenwertsystem und Bündelungsprinzip möglich. Dieser *verstehensorientierte* Aspekt des Mathematikunterrichts ist gleichberechtigt zum *verfahrensorientierten* (rechentechnischen) Aspekt, sie bedingen und ergänzen sich beide gegenseitig.

Das Verständnis für unser Zehnersystem wird besonders durch die Kontrastierung mit alternativen Rechenverfahren gefördert. In Deutschland gilt die Redeweise „das macht nach Adam Ries" als besonderer Qualitätsnachweis für die Korrektheit einer Rechnung. Interessant ist, dass Adam Ries in seinen jungen Jahren (mit Rechenpfennigen auf dem Rechentisch) ganz anders gerechnet hat als später, wo er schriftlich im Zehnersystem rechnete.

Mittelstufe / Sekundarstufe I: Ausbau und Vertiefung der Primarstufen-Themen (im Sinne des Spiralprinzips)

- Teilbarkeitslehre (aufbauend auf den Grundrechenarten): Division mit Rest, Ermittlung von Primzahlen (Sieb des Eratosthenes), größter gemeinsamer Teiler (Euklidischer Algorithmus), kleinstes gemeinsames Vielfaches, Stellenwertsysteme und andere Zahlsysteme mit den entsprechenden Umwandlungsalgorithmen (babylonisches, ägyptisches, römisches Zahlsystem), Pythagoreische Zahlen und ihre Erzeugung, Fibonacci-Zahlen
- Bruchrechnen: Grundrechenarten mit Brüchen (Hauptnenner – KGV, Kürzen – GGT), Umwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche, Vorperiode, Periodenlänge, erste Einblicke in unkonventionelle Formen des Bruchrechnens („ägyptisches" Bruchrechnen, Kettenbrüche)
- Folgen und Funktionen: Folgen und Reihen als Iterationsstrukturen, Funktionen als Rechenausdrücke / Funktionen als Zuordnungsvorschriften, Darstellung von Zuordnungen durch Wertetafeln, Schrittverfahren zur Darstellung von Histogrammen, Funktionsschaubildern und Kurven
- Terme, Termauswertung, Gleichungslehre: Transformationen von Termen und Gleichungen, Verfahren zur Lösung linearer und quadratischer Gleichungen

und einfacher linearer Gleichungssysteme (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren)

- Näherungsverfahren: Approximation irrationaler Zahlen ($\sqrt{2}$, e, π, …), approximative Bestimmung von Funktionswerten (Quadratwurzelfunktion – Heron-Verfahren, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen), iteratives Lösen von Gleichungen
- Geometrie (besonders konstruktive synthetische Geometrie, Abbildungslehre und darstellende Geometrie): geometrische Abbildungen (Verkettung von Spiegelungen), Iterated Function Systems (IFS) in der fraktalen Geometrie, Abbildung von realen Objekten auf dem Computerbildschirm und Plotter, Projektionsarten; Konstruktion von Strecken bzw. Streckenlängen (historisches Beispiel: die „Wurzelschnecke" von Theodorus); *Konstruktionstexte* als Algorithmen in der Geometrie
- Mathematik in Anwendungssituationen: Prozent- und Zinsrechnung: mehrstufige unterjährige Verzinsungsprozesse, Zinseszinsen, Ratenkauf (und effektiver Zinssatz), Tilgungsprozesse; erste Ansätze zur mathematischen Modellbildung und Simulation (lineares und exponentielles Wachstum, Halbwertszeit); im gesamten Bereich der Naturwissenschaften: das Prinzip der Diskretisierung d.h. die schrittweise Generierung einschlägiger Größen (Populationsgrößen, Bahnkurven, u.v.m.); in der Staatsbürgerkunde: Sitzverteilung nach Wahlen (Verfahren von d'Hondt und Hare-Niemeyer)
- explizite Formulierung einfacher Algorithmen und deren Umsetzung in eine altersgemäße Programmiersprache

Bemerkung: Bei den Themen des Mittelstufenunterrichts entfalten Algorithmen ihre eigentliche Kraft. Hier wird die Bearbeitung von Anwendungsbeispielen, die sonst oft nur im Zusammenhang mit der Integral- und Differentialrechnung bzw. der „Maschinerie" der Differentialgleichungen behandelt werden, mit elementarsten Mitteln möglich. Dazu müssen erste, in der Regel sehr einfache Algorithmen explizit (zunächst umgangssprachlich) formuliert und dann in ein konkretes, lauffähiges Programm umgesetzt werden. Als „Programmiersprachen" bieten sich z.B. Tabellenkalkulationssysteme oder aus einer Vielzahl von Gründen, aber insbesondere wegen ihrer exakten Numerik, die Computeralgebra Systeme an, von denen es auch sehr gute Exemplare im kostenfreien „open source" Bereich gibt. Viele der Themen des Mittelstufenunterrichts reichen auch in die Oberstufe hinein und können dort wieder aufgegriffen und vertieft werden.

Oberstufe / Sekundarstufe II: Als Leitlinie für den Übergang von der Mittelstufe zur Oberstufe bietet sich das Motto an: Vom Diskreten zum Kontinuierlichen und zurück. Denn sehr oft müssen viele zunächst kontinuierlich erarbeitete Lösungen zur numerischen Auswertung wieder diskretisiert werden. Im Zusammenhang mit der Integral- und Differentialrechnung kommen durch die Symbolverarbeitung Fähigkeiten der Computeralgebra Systeme zur Geltung, die im Bereiche der klassischen Programmiersprachen völlig unbekannt sind.

Möglichkeiten zur Vertiefung und Analyse der bereits in der Mittelstufe behandelten Themen gibt es in praktisch allen Bereichen; einige Beispiele dazu sind:

- Analysis: von den Folgen und Reihen über das Newton-Verfahren bis zur Fixpunkt-Thematik
- Numerische und Praktische Mathematik: Iterations- und Fixpunktverfahren
- Rekursion und Selbstähnlichkeit: Fraktale, Kettenbrüche
- Lineare Algebra / Algebra: Gaußscher Algorithmus, Simplex-Algorithmus, Iterated Function Systems (IFS), Polynom- und Matrizen-Algebra, erzeugende Funktionen
- Stochastik: Markoffsche Ketten, Warteschlangen, Simulationen
- Mathematische Modellbildung: Die anwendungsorientierten Beispiele des Mittelstufenunterrichts werden unter dem Aspekt der Modellbildung und Simulation aufgegriffen und ausgebaut. Dies betrifft: diskrete Modelle und Verfahren in Wirtschaft, Technik, Naturwissenschaften, Sozialwissenschaften, Sprachwissenschaften
- Vertiefung der Informatik- und Programmierkenntnisse

Im Grunde genommen umfasst die obige Aufzählung den gesamten Inhaltskanon des Mathematikunterrichts der allgemeinbildenden Schulen. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, denn die im Schulunterricht behandelte Mathematik ist (aus gutem Grund) weitestgehend konstruktiver, also algorithmischer Natur. Nichtkonstruktive Inhalte kommen in der Mathematik, wenn überhaupt, dann erst sehr spät mit dem von E. Zermelo formulierten Auswahlaxiom ins Spiel. Sie spielen im Schulunterricht praktisch keine Rolle.