# Fachdidaktische Facetten

*Elementeeiner auf den Mathematikunterricht bezogenen fachdidaktischen Analyse*

Prof. Dr. J. Ziegenbalg
Fakultät III (Mathematik / Informatik)
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Email: ziegenbalg.edu@gmail.com
Internet: https://jochen-ziegenbalg.github.io/materialien/

*Einige Hinweise zum Charakter des Manuskripts „Fachdidaktische Facetten“*

Das Manuskript ist im Laufe der Jahre entstanden aus einer sammelsuriumsartigen Zusammenstellung von Hinweisen zur Unterrichtsplanung im Zusammenhang mit dem von der Hochschule betreuten Schulpraktikum. Zielgruppe sind die Studierenden dieses Praktikums – nicht die Kollegenschaft oder die „scientific community“.

Systematik und Vollständigkeit, so sehr ich diese Aspekte ansonsten durchaus schätze, waren nicht die vorrangigen Leitlinien bei der Zusammenstellung des Materials.

Das Manuskript ist bewußt auch mit einer „persönlichen Note“ versehen. Da dies ein informelles Manuskript ist, habe ich mir den Luxus einiger persönlich gefärbter Formulierungen erlaubt.

Einige der Abbildungen sind im Original farbig (so insbesondere die eigentlich „dynamisch“ gedachten Abbildungen zu den figurierten Zahlen) – falls daran Bedarf besteht, bitte ggf. kurze Rückmeldung an mich am besten unter ziegenbalg.edu@gmail.com .

Für Bemerkungen, Kommentare und Hinweise aller Art bin ich stets dankbar.

# Inhalt

## Bemerkungen zu Zielsetzung und Gliederung des Manuskripts

Das Manuskript hat insbesondere die Funktion, als Hintergrundmaterial für das schulpraxisbegleitende Fachdidaktische Seminar zu dienen; es ist im Hinblick auf diese Zielvorstellung entstanden und weiterentwickelt worden. Entsprechend dieser Zielsetzung stehen konkrete unterrichtspraktische Elemente im Vordergrund und Theoretisches bzw. Theoretisierendes eher im Hintergrund. Erfahrungsgemäß haben die Studierenden (trotz der vorangegangenen pädagogischen Einführungsveranstaltungen) nur wenig Vorstellungen, Übung und Grundwissen im Hinblick auf die konkrete Unterrichtsvorbereitung im Mathematikunterricht. Deshalb war es notwendig, fachspezifische „Handreichungen“ für die Unterrichtsvorbereitung zu entwickeln; dies allerdings nicht kurzsichtig nur aus der Sicht auf die nächste Unterrichtsstunde sondern entsprechend allgemeiner Zielvorstellungen und Grundprinzipien, die für den Mathematikunterricht weitgehend allgemein anerkannt sind.

Das Manuskript ist von Themenauswahl, Schwerpunktbildung und vom Stil der Darbietung her durchaus persönlich gefärbt. Eine enzyklopädische Vollständigkeit war weder angestrebt noch möglich. Jedermann ist eingeladen, Kommentare, Hinweise oder Ergänzungsvorschläge zum Manuskript abzugeben (elektronische Adressen: s.o.).

## Bemerkungen zur Frage: Was ist Didaktik der Mathematik?

Die Anzahl der unterschiedlichen Antworten auf diese Frage wird nur geringfügig niedriger sein als die Anzahl der Fachleute, die man befragt. Aus der Fülle der möglichen Antworten seien im folgenden, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, exemplarisch einige herausgegriffen.

Natürlich haben sich auch andere Wissenschaften die Frage nach der Definition ihres Gegenstandsbereiches gestellt, und auch da gibt es die unterschiedlichsten Antworten. Der folgende lakonische Antwort-Typus macht es sich etwas einfach und scheint die Möglichkeit einer Realdefinition in Frage zu stellen: „Geometrie ist, was Geometer tun“; „Kombinatorik ist, was Kombinatoriker tun“, „Psychologie ist, was Psychologen tun“, ... , „Fachdidaktik ist, was Fachdidaktiker tun“. Dies ist zwar korrekt, aber nicht sehr hilfreich.

Nicht sehr viel besser sind die Beschreibungen:

- Fachdidaktik ist, was in den Vorlesungsverzeichnissen unter „Fachdidaktik“ aufgeführt ist.
- Fachdidaktik ist die Gesamtheit des Wissens, das unter der Rubrik „fachdidaktische Literatur“ abgedruckt ist.

Außerdem stehen alle der obigen Definitionsversuche sehr stark in der Nähe der Zirkularität. Woher weiß der Leser zum Beispiel, ob ein bestimmtes Buch zur fachdidaktischen Literatur gehört? Etwa, weil es in einer fachdidaktischen Reihe erscheint, oder weil es den Begriff der Fachdidaktik plakativ im Titel trägt? Was ist dann mit Büchern, bei denen das nicht der Fall ist – sind die dann automatisch nicht fachdidaktisch? Dann würde z.B. ein Buch wie Polyas „How to solve it“ nicht zur Fachdidaktik zählen. Dies wäre unbefriedigend.

In bezug auf die Fachdidaktik der Mathematik scheint sich (warum, das ist eine interessante Frage) bei manchen Studenten die Auffassung verbreitet zu haben: „Fachdidaktik ist es, wenn man keine Beweise können muß“, denn in Prüfungsberatungen wird erstaunlich oft die Frage gestellt „Müssen wir im fachdidaktischen Teil auch Beweise können?“. Die Antwort auf diese Frage kann jedoch nur lauten: Im fachlichen Prüfungsteil reicht es im allgemeinen, für jeden diskutierten Satz einen Beweis zu kennen; im fachdidaktischen Prüfungsteil muß man in der Regel mehrere Beweise kennen, z.B. um sie nach fachdidaktischen Kriterien auf ihre Tauglichkeit in bestimmten Lernsituationen bewerten zu können. So können unterschiedliche Beweise auf unterschiedlichen Lernvoraussetzungen beruhen, Bestandteil unterschiedlicher Lernsequenzen sein, sie können unterschiedlich abstrakt oder konkret, unterschiedlich anschaulich sein, u.s.w. „Korrektes Argumentieren lernen“ ist ein wichtiges allgemeines Ziel des Mathematikunterrichts und jeglicher fachdidaktischer Bemühungen (vgl. Abschnitt 3). Also gehören Argumentationen, Begründungen und Beweise *auch* zur Fachdidaktik. (Natürlich ist der Gegenstandsbereich der Fachdidaktik damit noch nicht ausgeschöpft.)

Einen immerhin zirkelfreien Definitionsversuch unternahm vor Jahren H. Griesel mit der Formulierung: „Didaktik der Mathematik ist die Wissenschaft vom Berufswissen des zukünftigen Mathematiklehrers“. Ein Problem mit dieser Definition besteht jedoch darin, daß sie ausschließlich auf die Lehrertätigkeit beschränkt ist. Natürlich ist eine solche Definition auf einer hohen Ebene noch zu konkretisieren; dies ist immer wieder Ziel und Gegenstand fachdidaktischer Bemühungen.

Eine recht brauchbare Beschreibung des Feldes der Fachdidaktik der Mathematik gibt E. Wittmann in seinem Buch „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ auf den Seiten 1-4.

Zusammenfassend und in sehr kompakter Formulierung möchte ich die folgende Arbeitsdefinition verwenden:

> *Didaktik der Mathematik* ist die Wissenschaft, die sich mit den Bedingungen, Inhalten und Methoden des Lehrens und Lernens von Mathematik beschäftigt. Zur Didaktik der Mathematik gehört insbesondere auch die Frage, welche mathematischen Inhalte und Methoden der Allgemeinbildung zuzurechnen sind.

Didaktik der Mathematik ist also vielgestaltig. Im folgenden werden, aus der spezifischen Situation der *schulpraktischen Betreuung*, einige ihrer Facetten aufgezeigt. Diese Ausführungen gehören zwar zur Fachdidaktik, das gesamte Feld der Fachdidaktik ist damit jedoch keinesfalls erschöpft.

Mindestens ebenso wichtig wie die Klärung der Frage „Was ist Fachdidaktik“ ist die konkrete Begleitung unterrichtspraktischer Bemühungen aus einer übergeordneten fachdidaktischen Perspektive. Dieses Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis kommt besonders klar im folgen Zitat zur Geltung:

> BUDDHA: *In the search for truth there are certain questions that are not important. Of what is the universe constructed? Is the universe eternal? Are there limits or not to the universe? What is the ideal form of organization for human society?*
> *If a man were to postpone his search and practice for Enlightenment until such questions were solved, he would die before he found the path.*
> (Zitat nach: M. Minsky, The Society of Mind, S. 45)

# 1. Unterrichtspraxis

Hinweise für die Unterrichtsplanung
und die Erstellung von Unterrichtsentwürfen
zum Mathematikunterricht

Machen Sie es so einfach wie möglich
– aber nicht einfacher
*Albert Einstein*

## 1.1 Vorbemerkungen zur Unterrichtsplanung

Die Basis der Unterrichtsplanung ist eine *fachdidaktische Analyse*, etwa entsprechend den Grundfragen der „Didaktischen Analyse“ von W. Klafki (vgl. Abschnitt 3.4). Die von Klafki genannten Grundfragen sind jedoch allgemeiner, nicht fachspezifischer Natur. Sie sind im gegebenen Zusammenhang mit den Besonderheiten des Mathematikunterrichts in Einklang zu bringen.

*Grundelemente* der Unterrichtsplanung für den Mathematikunterricht sind:

- Lern- bzw. Unterrichtsziele – in Verbindung mit einer kognitiven Analyse
- Sachanalyse
- Überlegungen zur Unterrichtsmethodologie
- Verlaufsplanung (unter Einbezug von Materialien / Medien / Werkzeugen)

Eine notwendige Grundvoraussetzung für die Unterrichtsplanung ist die Analyse bzw. Kenntnis der *kognitiven Situation* der Lernenden: über welches Vorwissen verfügen sie, wie sind verwandte Unterrichtsthemen bisher behandelt worden, welche Begriffe, Notationen und Bezeichnungen wurden verwendet, wo gab es besondere Schwierigkeiten und Probleme, welche Unterrichtsmethodik hat sich als besonders fruchtbar erwiesen?

Eine Grundprämisse für die Planung auch einzelner Unterrichtsstunden ist, daß die jeweilige Unterrichtsstunde nie isoliert sondern immer im Zusammenhang mit dem zeitlichen und inhaltlichen Kontext des Gesamtunterrichts zu sehen ist. Dabei spielt besonders die Einbettung der konkret zu planenden *Unterrichtsstunde* in die sie umgebende *Unterrichtseinheit* eine entscheidende Rolle.

## 1.2 Allgemeine Rahmenbedingungen des Unterrichts

(gelegentlich auch als „soziokulturelle“ bzw. „anthropogene“ Voraussetzungen bezeichnet)

Zu den allgemeinen Rahmenbedingungen des Unterrichts gehören insbesondere

- die Beschreibung des Schulorts und der Schule (Schüler, Eltern, Lehrer, Ausstattung, Räumlichkeiten, Schulhof, Angebote, besondere Ereignisse, ...)
- die Beschreibung der Klasse (Klassenstruktur, Klassenzimmer, die pädagogische Situation, soziologische Aspekte, Charakterisierung einzelner Schüler, pädagogische Konsequenzen, ...)

Diese Aspekte sind grundsätzlich von Bedeutung. Ihnen ist im „Normalunterricht“ und besonders auch im *Blockpraktikum* Rechnung zu tragen. Im Wochentagspraktikum wird die Schulpraxisgruppe vom Ausbildungslehrer über die soziokulturellen und anthropogenen Voraussetzungen des Unterrichts informiert; es ist i.a. dann nicht mehr nötig, diese Ausführungen dann jeweils nochmals in die einzelnen Unterrichtsentwürfe aufzunehmen, es sein denn, es ergeben sich daraus konkrete Konsequenzen für die Planung der einzelnen Unterrichtsstunde.

## 1.3 Zu den Lern- bzw. Unterrichtszielen

(im folgenden kurz: *Lernzielen*)

Zunächst eine Vorbemerkung (die sich leider aus den Erfahrungen der Vergangenheit als notwendig herausgestellt hat): Man kann es, bei aller Wertschätzung für „affektive“ Lernziele, drehen und wenden wie man will – das Schulfach Mathematik ist ein stark „kognitiv" geprägtes Fach. Dementsprechend ist bei den Lernzielen und bei der Unterrichtsvorbereitung große Sorgfalt auf die Planung der kognitiven und inhaltlichen Ziele zu legen. Dazu gehört die Berücksichtigung von Fragen der Art:

- Was sollen die Schüler lernen?
- Warum sollen sie es lernen?
  (Hier reicht die Begründung: „Weil es im Lehrplan steht“ nicht aus.)
- Welches Vorwissen, welche Vorerfahrungen zum Thema besitzen die Schüler?
- Wie sieht, auf der Basis von Praktikabilität und intellektueller Ehrlichkeit, ein Weg (bzw. wie sehen mögliche alternative Wege) von diesen Vorerfahrungen zu den angestrebten Lernzielen aus?

Natürlich sind auch Fragen der Unterrichtsorganisation nicht zu vernachlässigen; sie stehen aber in der Regel beim Mathematikunterricht nicht im Vordergrund.

Keinesfalls sollte der Unterrichtende den Fehler begehen, sich aus Angst vor und Unsicherheit bei den inhaltlichen Lernzielen in die affektiven Lernziele zu flüchten. Das insbesondere in der Nachbesprechung oft zu hörende Argument: „... aber es hat doch Spaß gemacht ...“ ist als Kriterium für die Bewertung von Mathematikunterricht absolut unangebracht. „Spaß machen“, das können das Fernsehen und sonstige Medien besser; dazu bräuchte man keinen Unterricht. Wenn es nur das gewesen sein sollte, dann war es nicht genug.

Ein Hinweis, um Mißverständnissen vorzubeugen: Mit diesen Bemerkungen ist nicht gemeint, daß Mathematikunterricht nicht auch Spaß machen oder Freude und Befriedigung vermitteln sollte. Ganz im Gegenteil: Die Kraft des eigenen Denkens kennen zu lernen, die Erfahrung, ein schwieriges mathematisches Problem mit Geduld und Energie gelöst zu haben, kann eine große Befriedigung, ja sogar ein Glücksgefühl hervorrufen. In diesem Sinne sind Freude, Befriedigung und auch „Spaß“

nicht nur nicht unerwünscht sondern hoch willkommen. Spaß, der sich aber nur aus unverbindlicher Situationskomik oder aus gewissen Techniken der Unterrichtsorganisation heraus oder weil es „super in die Medienlandschaft passt“ ergibt, ist i.a. nicht das Ziel von Mathematikunterricht.

Die Lernziele beschreiben den angestrebten *Ertrag* einer Unterrichtseinheit oder -Stunde. Im folgenden sind einige konkrete Empfehlungen für die Formulierung der Lernziele gegeben.

- Gliederung und Gewichtung der Lernziele:

  Die Lernziele sollten in angemessener Weise gegliedert, strukturiert und gewichtet werden. Zu unterscheiden sind insbesondere

  * zentrale Ziele (Hauptlernziele, globale Lernziele, „Grobziele“)
  * periphere Ziele (Nebenlernziele, „Feinziele“)
  * instrumentelle Ziele (Hilfslernziele)

  Dazu ein Beispiel:

  * „Die Addition natürlicher Zahlen kennenzulernen, sie ausführen und anwenden zu können“ ist ein globales Lernziel des Mathematikunterrichts in der Elementarstufe.
  * „Die Prinzipien der Zahlschreibweise im Zehnersystem kennenzulernen und mit ihr umgehen zu können“ ist ebenfalls ein globales Lernziel.
  * „Die Addition einstelliger Zahlen (im Zehnersystem)“ ist ein Feinlernziel; ebenso (etwas später) „Die Addition zweistelliger Zahlen“.
  * „Die Technik des Zehnerüberschreitens bei der Addition kennenzulernen und zu beherrschen“ ist ein Hilfslernziel, das seine Rechtfertigung nur in Verbindung mit den obigen globalen Lernzielen (bzw. Feinzielen) bezieht.

  Hinweis: Es sollten *nicht zu viele Hauptlernziele* pro Unterrichtsstunde aufgestellt werden (im Normalfall *ein* Hauptlernziel pro Unterrichtsstunde).

- Transparenz der Lernziele:

  Die Lernziele der Unterrichtsstunde bzw. Unterrichtseinheit sollten auch für die Schüler erkennbar sein. Dies muß jedoch nicht bedeuten, daß der Lehrer zu Beginn der Stunde „mit der Tür ins Haus zu fällt“, z.B. in der Weise, daß er als erstes das Stundenthema als Überschrift an die Tafel schreibt.

- Genetische Entwicklung bzw. kognitive „Passung“ der Lernziele:

  Mathematikunterricht ist auch von seinen Zielsetzungen her *genetisch* zu entwickeln. Kurzformulierung: genetisch = entwicklungsgemäß (nähere Ausführungen zum genetischen Prinzip folgen später). Dazu gehört insbesondere:

  Lern*ziele* und Lern*voraussetzungen* sind sorgfältig zu unterscheiden! Lernvoraussetzungen sind i.a. keine Lernziele der zu planenden Stunde (sie waren in der Regel die Lernziele früherer Unterrichtsstunden). Es kann jedoch sinnvoll sein, wichtige Lernvoraussetzungen zu Beginn des Unterrichts nochmals in Erinnerung zu rufen.

  Wichtige Lernvoraussetzungen und (u.U. auch nichtschulische) Vorerfahrungen der Schüler sollten bei der Formulierung der Lernziele berücksichtigt werden.

- Festigung des Gelernten, Lernzielkontrollen:

  Die Erarbeitung der Lernziele ist durch von den Schülern eigenständig zu bearbeitende Aufgaben zu festigen. Das Erreichen der Lernziele ist durch geeignete Lernzielkontrollen sicherzustellen.

- Differenzierung:

  In Verbindung mit der Festigung der Unterrichtsinhalte ist auf eine *differenzierte* Ausgestaltung des Übungsmaterials zu achten. Es müssen neben den „Normal"-Aufgaben auch Aufgaben für besonders leistungsschwache oder auch leistungsstarke Schüler vergeben werden. Den Schülern ist die Gelegenheit zu geben, zu erfahren, daß es sehr befriedigend sein kann, neues Wissen, neue Kenntnisse sicher zu beherrschen und in Standardsituationen anwenden zu können – und darüber hinaus, die Kraft des eigenen Denkens bei der Lösung (altersgemäßer) schwieriger Probleme zu erleben. Auch das Kennenlernen der eigenen Grenzen gehört zu einer ausgewogenen Bildung und Erziehung. Zum Kennenlernen der Grenzen kann auch gehören, dass man diese Grenzen im konkreten Fall auch einmal nicht erreicht. Bei permanenter Unterforderung der Schüler würde man ihnen diese Erfahrung vorenthalten.

- Anspruchsniveau:

  Kaum ein Lernziel wird im konkreten Unterricht zu 100 % erreicht. Dies heißt jedoch nicht automatisch, daß man das Anspruchsniveau das nächste mal reduzieren muß, denn auch das „ausgedünnte" Lernziel wird dann wieder nicht voll erreicht. Eine solche Strategie würde nur zu einer gegen Null konvergierenden Zielsetzung führen.

Die Formulierung der Lernziele sollte stets mit einer kritisch-konstruktiven Würdigung der jeweiligen Lehrplanvorgaben einhergehen. Man sollte (vermeintlich) vorgegebene Lernziele zur Kenntnis, aber nicht einfach unkritisch übernehmen sondern sie im Hinblick auf ihren Bildungsgehalt analysieren. Dazu gehört insbesondere die Reflexion möglicher Begründungen für das jeweilige Unterrichtsthema. Die Begründung „es wurde mir ja vorgeschrieben" oder „es steht ja im Lehrplan" reicht nicht aus. Es ist unabdingbar, daß sich der Unterrichtende ein eigenes Urteil bildet.

## 1.4 Die Sachanalyse: Überlegungen zu Stoff / Thema / Unterrichtsgegenstand

Es gibt kein Stricken ohne Wolle. (H. Winter)

Schwimmlehrer gesucht, der selber schwimmen kann. (H. Freudenthal)

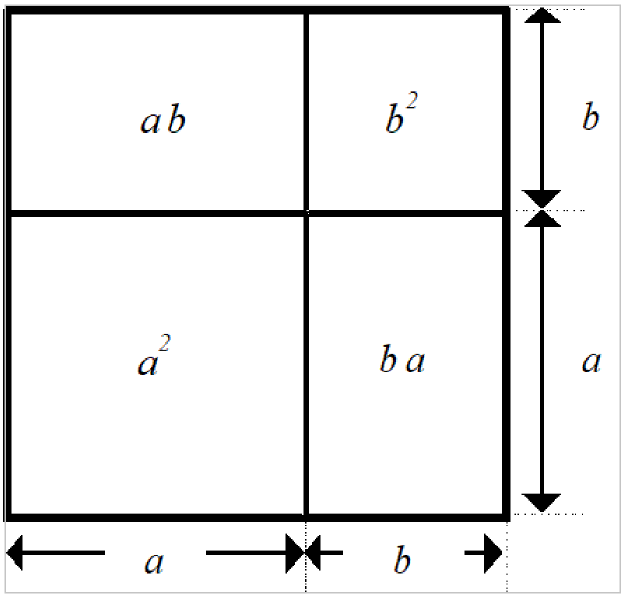
Die Sachanalyse dient der Klärung der Fragen: *„Was ist zu unterrichten?“* ... und *„Warum ist es zu unterrichten?“* – m.a.W. die Frage nach Gegenstand, Struktur und Bildungsrelevanz des Themas. Man könnte es auch so ausdrücken: Bei der Sachanalyse handelt es sich um die „Logik“ des Themas aus der Bildungsperspektive.

Dazu gehört insbesondere die Reflexion der folgenden Aspekte:

- Was sind die fundamentalen Ideen des Unterrichtsthemas?
- Gibt es bzw. welches sind paradigmatische[1] Beispiele, Veranschaulichungen oder Darstellungsformen? Welche eignen sich besonders für den zu planenden Unterricht?

  *Ein Beispiel*: Die geometrische Deutung der binomischen Formel

  $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$




- Welche *genetischen* Erschließungsmöglichkeiten gibt es für die zu behandelnden Inhalte? Wie kann auf Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Schüler zurückgegriffen werden?

  Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt *genetisch*, wenn sie an den *natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik* ausgerichtet ist (E. Wittmann, „Grundfragen ...“).
- Was ist der Stellenwert des Themas im *spiralförmigen Aufbau* des Mathematikunterrichts im allgemeinen und der behandelten Unterrichtseinheit im besonderen? (Jede Unterrichtsstunde steht im Brennpunkt zwischen vergangenem und zukünftigem Unterricht; zwischen Lernvoraussetzungen und Lernzielen.)

---

[1] *Paradigma* (griechisch): Beispiel, Muster
*paradigmatisch*: von modellhaftem Charakter

- Ist das Thema aus einer *historischen* oder *kulturgeschichtlichen* Perspektive von Bedeutung? Wie kann die historische Dimension des Themas für den Unterricht genutzt werden? Wie haben sich die zentralen Ideen, Begriffe und Verfahrenstechniken historisch entwickelt; wie wurden die zu behandelnden Themen (z.B. Rechenverfahren oder elementargeometrische Konstruktionen) in anderen Kulturkreisen bewältigt.

  An dieser Stelle kann das Einbringen kulturhistorisch bedeutsamer Dokumente und Abbildungen eine sinnvolle Ergänzung des Unterrichts darstellen.

  Das nebenstehende Bild von Gregor Reisch aus dem Jahre 1504 symbolisiert die Probleme beim Übergang vom Abakus-Rechnen zum Ziffernrechnen.

  Eine kleine Auswahl weiterer historische bedeutsamer Bilddokumente mit Bezug zur Mathematik wird später gegeben.

- Besitzt das Unterrichtsthema ein reichhaltiges Spektrum von *Anwendungen* (im Alltagsleben, im Zusammenhang mit anderen Fächern, ...)? Können solche Anwendungen für den Unterricht genutzt werden (z.B. als Einstiegsmotivation, für Übungen und Hausaufgaben, für Projekte)?

- Verfügt das Thema über einen hohen Grad an *Beziehungshaltigkeit*? Wie fügen sich die Inhalte der Stunde in ein Beziehungsnetz mit anderen Unterrichtsinhalten ein? Welche inhaltlichen und methodologischen Verflechtungen des Unterrichtsthemas zu anderen (fachinternen oder fächerübergreifenden) Unterrichtsinhalten gibt es?

- Was sind die zum Unterrichtsthema gehörenden *Grundaufgaben*? Gibt es zu jeder Grundaufgabe eine „griffige“ (paradigmatische) Anwendungssituation? Werden die Grundaufgaben und ihre Anwendungen in den Übungen oder den benachbarten Unterrichtsstunden vollständig (systematisch) behandelt? Werden die Grundaufgaben in den Übungen und den gestellten (Haus-) Aufgaben entsprechend dem *operativen Prinzip* angemessen variiert?

  Ein Hinweis: in [Dürr/Ziegenbalg, S. 302] sind die Grundaufgaben der Prozentrechnung mit exemplarischen Anwendungen in systematischer Weise beschrieben: die Variation der Gleichung

  $$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert}$$

  führt bei funktionaler Betrachtungsweise zu sechs – und nicht etwa, wie sonst oft behauptet, zu drei – Grundaufgaben!)

  Eine vertiefte Diskussion dieses Beispiels und des operativen Prinzips ist in Abschnitt 4.2 zu finden.

## 1.5 Überlegungen zur Unterrichtsmethodologie insbesondere zur Lehrer-Schüler-Interaktion

> Die Methodologie verhält sich zum Methodischen
> wie die Kriminologie zum Kriminellen.
> So sind die Ausführungen eines Juristen zu Fragen der Verbrechensbekämpfung sicher kriminologisch, ob sie auch kriminell sind, ist eine ganz andere Frage.

Die Überlegungen zu Unterrichtsmethodologie dienen vor allem der Frage: *Wie* (*nach welchen Grundprämissen*) *ist das gewählte Thema zu unterrichten?* Dabei stehen, im Gegensatz zur Verlaufsplanung, bei der Planung der Unterrichtsmethodologie globale Aspekte, die meist die gesamte Unterrichtseinheit (oft ein ganzes Schuljahr oder mehr) betreffen, im Vordergrund. Hierzu gehören die folgenden Überlegungen.

- Auf welchen globalen Argumentationslinien, welchen Grundprämissen, welchen methodologischen Leitlinien soll die Stunde (bzw. die *Unterrichtseinheit*) aufgebaut werden? Wie sieht die globale „Dramaturgie" für die Unterrichtseinheit aus?

  *Ein Beispiel:* Sollte man die Argumentation (den Beweis) bei einer geometrischen Fragestellung lieber „euklidisch" (kongruenzgeometrisch) oder abbildungsgeometrisch führen?

  Derartige Fragen sind selten isoliert für eine Einzelstunde sondern i.a. immer nur im Gesamtzusammenhang der jeweiligen Unterrichtseinheit zu klären.

- Analyse der kognitiven Situation: Ist der geplante Argumentationsgang sowohl global als auch im Detail praktikabel?
  - Ist die *Einstiegsmotivation* für die Schüler verständlich und plausibel?
  - Gibt es bestimmte *kritische Lernvoraussetzungen*, die u.U. noch einmal wiederholt werden sollten? Was sind dafür die geeigneten Unterrichtsphasen?
  - An welchen Stellen werden die Schüler vermutlich *besondere Schwierigkeiten* haben?

    Ein typischer Fall: $a^0 = 1$ ... *Permanenzprinzip*

    Beispiel für die Argumentation auf der Basis einer *Permanenzreihe*:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000000 | 100000 | 10000 | 1000 | 100 | 10 | 1 | ? | ... |
| $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^?$ | ? | ... |

  Eine vertiefte Diskussion des Permanenzprinzips findet sich in Abschnitt 4.4.

- Ist der geplante Argumentationsgang auch aus der Sicht der Schüler „*intellektuell ehrlich*"; d.h. werden im Verlauf der Argumentation nur Kenntnisse und Fähigkeiten verwendet, über die die Schüler schon verfügen oder die in der geplanten Stunde als Hilfsziele explizit entwickelt werden?

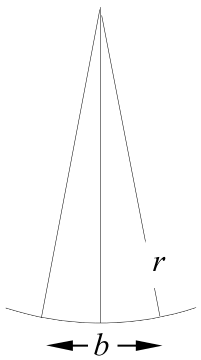
  Eine strikte Beachtung dieses Prinzips macht den einzigartigen *demokratischen* Charakter der Mathematik und des Mathematikunterrichts aus. Bei Beachtung dieses Prinzips argumentieren alle Diskutanten auf derselben Basis. Mathematisches Argumentieren hat völlig transparent zu sein. Es gibt kein Geheimwissen, kein „höheres" Lehrerwissen, keinen „Königsweg" zur Mathematik. Eine Argumentation der Art: „Um das zu verstehen, fehlt Dir noch sehr viel Lebens-erfahrung; wart nur ab, bis Du älter bist, dann wirst Du das schon verstehen“ ist im Mathematikunterricht nicht zulässig.

- Ist der geplante Argumentationsgang angemessen elementar? Wird unnötige Kompliziertheit, wird unnötiger technischer und terminologischer Ballast vermieden? Werden geeignete, überzeugende Beispiele von *paradigmatischem* Charakter verwendet?

  Ein wichtiges Charakteristikum (jedoch beileibe nicht das einzige) des algorithmischen Arbeitens ist, daß es geeignet ist, Problemlöseprozesse enorm zu elementarisieren (vgl. Ziegenbalg 1988 und 1996).

  Das Bemühen um Elementarität hat aber nichts mit verniedlichender Kindertümelei zu tun – und erst recht nichts mit verfälschender Oberflächlichkeit!

  *Ein Beispiel*: Formel für den Flächeninhalt des Kreisausschnitts!




  In einem Schulbuch findet sich die folgende Argumentation:

  *Der Kreisausschnitt mit Bogen b und Radius r ähnelt einem Dreieck mit Basis b und Höhe r. Als Flächeninhalt $F_A$ des Kreisausschnitts verwenden wir deshalb näherungsweise den Flächeninhalt des Dreiecks:*

  $$F_A = \frac{1}{2} b \cdot r$$

  *Aufgabe*: Analysieren Sie diese Begründung.

  Die Methode des paradigmatischen Vorgehens wird in Abschnitt 4.3 näher beschrieben.

- Ist die Unterrichtsplanung hinreichend flexibel – trägt sie auch unterschiedlichen Schülerreaktionen Rechnung? Wie werden die Schüler möglicherweise auf die geplanten Impulse, Fragen oder Anregungen an den *Gelenkstellen* des Unterrichts reagieren? Ist im wesentlichen nur eine „vernünftige“ Reaktion der Schüler zu erwarten oder muß man sich auf unterschiedliche sinnvolle Antworten einstellen?

  Auf welchen Argumentationspfaden kann das Unterrichtsziel erreicht werden? Welche davon sind voraussichtlich besonders geeignet – dies vor allem im Hinblick auf die Schüler und ihre „kognitive Disposition“, also ihr Vorwissen und ihre Art zu Argumentieren.

  *Konsequenz:* Sollen die Schüler nicht vom Lehrer gegängelt werden, so sind u.U. mehrere Pfade parallel zu planen – im Geometrieunterricht (aber nicht nur dort) z.B. verschiedene Beweisvarianten (etwa „kongruenzgeometrisch“ versus „abbildungsgeometrisch“) eines zu behandelnden Satzes oder Sachverhalts.

# 1.6 Verlaufsplanung, Einsatz von Medien, Materialien und Werkzeugen, Unterrichtssprache

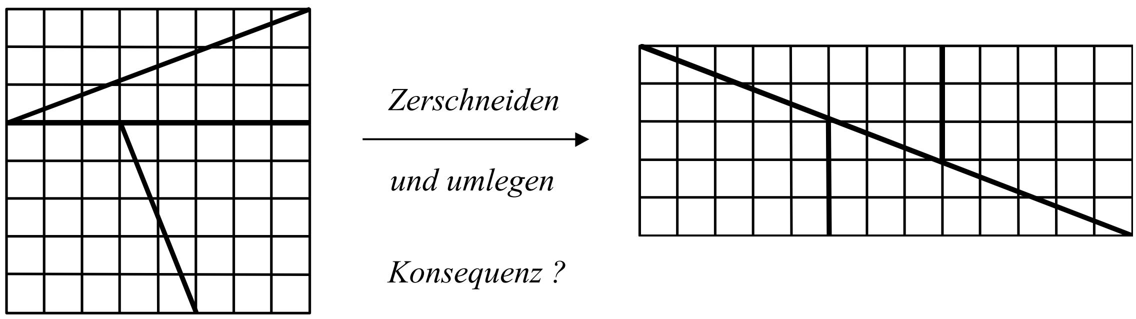
Die Überlegungen zur *Verlaufsplanung* und *Unterrichtsmethodik* dienen der Detailplanung des Unterrichts. Sie sind in enger Verbindung mit den vorigen Abschnitten zu sehen. Der konkrete Unterricht basiert ganz entscheidend auf seiner Detailplanung. Eine große Sorgfalt bei der Planung der „Unterrichtsdramaturgie" – auch und insbesondere im Detail ist unverzichtbar.

- Der Unterricht steht und fällt meist schon mit der Wahl der *Einstiegsmotivation* (gelegentlich auch als „Aufhänger" bezeichnet). Eine gute Motivation trägt häufig über die gesamte Stunde und gelegentlich sogar weit darüber hinaus; eine unbrauchbare Motivation ist die Wurzel für Desinteresse, Mißverständnisse und allgemein für Verständnisschwierigkeiten, die sich zunächst als kleine Brüche in der Lehrer-Schüler-Kommunikation andeuten und im ungünstigen Falle das Abgleiten des Unterrichts ins kommunikative Chaos zur Folge haben können.

  Nach Möglichkeit ist die Einstiegsmotivation mit einer *paradigmatischen* Situation zu verbinden – vorzugsweise aus der realen Umwelt, aus dem Alltagsleben oder aus der Geschichte. Dies ist anspruchsvoller, als das Heranziehen künstlicher Phantasiewelten, die oft nichts anderes darstellen als billige, leicht zu entlarvende Scheinmotivationen!

- *Paradoxien, Rätselhaftes, Widersprüchliches* und *Unmögliches* sind oft geeignet, das Interesse der Schüler zu wecken.

  *Ein Beispiel:*



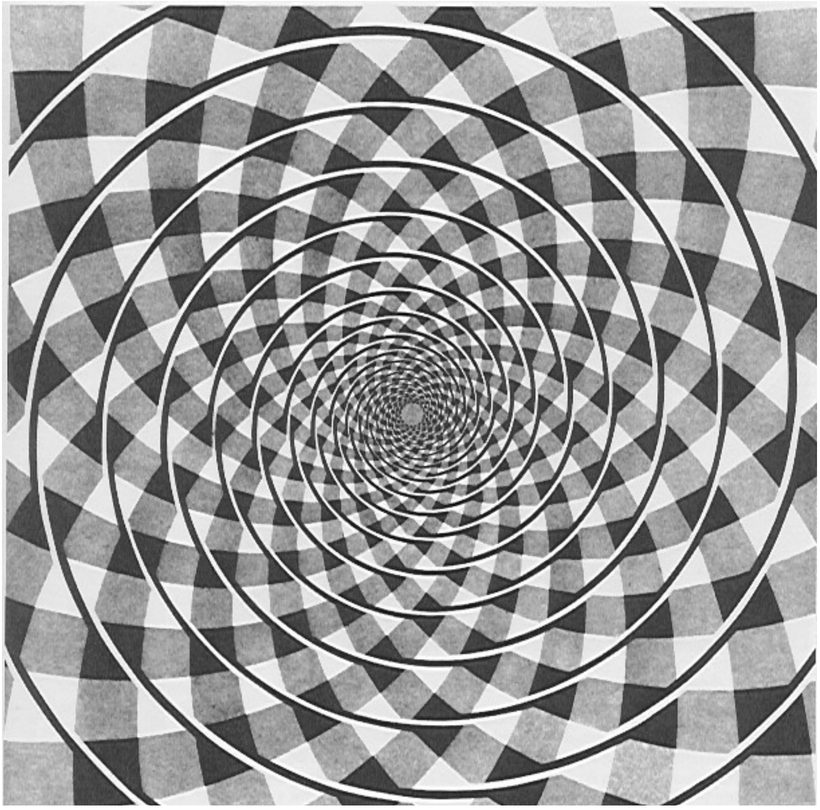

  Durch selbständiges Aufdecken von Scheinargumenten gewinnen die Schüler an Urteilsfähigkeit. Viele Paradoxien (insbesondere auch solche aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung) sind zudem von grundlegendem wissenschaftstheoretischem oder historischem Interesse.

  E. Wittmann spricht in diesem Zusammenhang auch vom *kognitiven Konflikt* und seiner Wandlung ins Produktive.

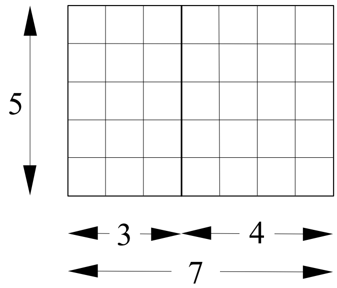
  Der Mathematik kommt als Fach grundsätzlich eine *aufklärerische* Aufgabe zu. Dazu gehört traditionell die Schulung des Denkens, aber auch die Sinnes- und Wahrnehmensschulung. Mathematisches Denken und mathematische Methoden können viel dazu beitragen, nicht nur Scheinargumente zu entlarven sondern auch Scheinwelten zu erkennen und von der realen Welt unterscheiden zu lernen.

  In der letzten Zeit gewinnt diese Aufgabe im Zusammenhang mit der Überflutung der Sinne durch Umwelteinflüsse und besonders durch die Medien eine immer größere Bedeutung. Künstliche Video- und „multi-media" Welten drängen sich zunehmend ins Bewußtsein der Kinder.

Das Wissen darüber, daß manche Bilder (z.B. optische Täuschungen – aber nicht nur diese) geeignet sind, absichtlich oder unabsichtlich falsche Sachverhalte zu vermitteln (suggerieren) gehört auch zur Allgemeinbildung. Hierzu an dieser Stelle nur ein Beispiel (weitere Ausführungen und Beispiele dazu finden sich im Abschnitt 6).



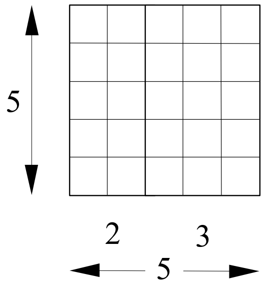
- Die Kunst des *„guten“ Beispiels*: Die zur Erreichung des Unterrichtsziels jeweils richtigen Beispiele und Anwendungssituationen herauszuarbeiten, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Unterrichtsplanung. Ein gutes Beispiel soll das Typische an der Situation verdeutlichen, es sollte von *paradigmatischem* Charakter sein, es darf nicht trivial und nicht zu komplex sein. Obwohl jedes Beispiel, formal genommen, nur einen Einzelfall darstellt, sollte das Allgemeine an dem Beispiel erkennbar sein.
  - Spezialfall *Arithmetik*: Arithmetische Gesetzmäßigkeiten werden im Unterricht oft schon zu einem Zeitpunkt behandelt, wo noch gar keine Variablen und Quantoren (die streng genommen zur Formulierung allgemeiner Aussagen notwendig wären) zur Verfügung stehen. In solchen Fällen sind geeignete Zahlenbeispiele mit dem Charakter der Allgemeinheit (*paradigmatische* Zahlenbeispiele) zu verwenden. Zur Darstellung des Distributivgesetzes $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ eignen sich z. B. – in Verbindung mit der geometrischen Veranschaulichung anhand der Flächenbetrachtung – die konkreten Zahlen 5, 3 und 4 für $a$, $b$ und $c$.




$$5 * 3 = 15$$
$$5 * 4 = 20$$
$$3 + 4 = 7$$
$$5 * 7 = 35$$
$$= 5 * 3 + 5 * 4$$
$$5 * (3 + 4) = 5 * 3 + 5 * 4$$

Die Zahlen 5, 3 und 4 (für $a$, $b$ und $c$) weisen in diesem Beispiel einen „allgemeinen" Charakter auf. Jede von ihnen ist eindeutig identifizierbar und spielt im präformalen Stadium die Rolle einer Variablen.

*Zufällige Koinzidenzen* wie z.B. 5, 7 und 5 oder 5, 2 und 3 (letzteres wegen 2+3=5) u.s.w. sind zu vermeiden.




$$5 * 2 = 10$$
$$5 * 3 = 15$$
$$2 + 3 = 5$$
$$5 * 5 = 25$$
$$= ???$$

Welche 5 ist hier durch 2+3 zu ersetzen?

Die Veranschaulichung des Distributivgesetzes durch ein Quadrat stellt darüber hinaus eine unangemessene Spezialisierung dar.

Ein philosophisch-erkenntnistheoretisches Spezialproblem: Zur Formulierung allgemeiner Sachverhalte, wie z.B. des Distributivgesetzes, benötigt man *Variable* und *Quantoren*. Häufig stehen zu einem bestimmten Zeitpunkt (z.B. aus Altersgründen) aber noch keine Variablen zur Verfügung. Dann tritt die Erhellung des Sachverhalts durch ein paradigmatisches Beispiel an die Stelle einer allgemeinen, abstrakten Formulierung mit Variablen. Die in derartigen Beispielen auftretenden konkreten mathematischen Objekte (Zahlen, Geraden, Kreise, ...) stehen dann für das in der allgemeinen Aussage mit Hilfe von Variablen bezeichnete Objekt. In der allgemeinen Formulierung bezeichnen unterschiedliche Variable in der Regel auch unterschiedliche Objekte (z.B. unterschiedliche Zahlen). Deshalb ist es unverzichtbar, daß auch in der beispielsgebundenen Formulierung unterschiedlichen Größen unterschiedliche Zahlenwerte zugeordnet werden, denn sonst ist eine Identifizierung der gegebenen Größen anhand ihrer Werte nicht mehr möglich.

Die *Quintessenz*: Auch in einer beispielsgebundenen Darstellung sind unterschiedlichen Objekten und unterschiedlichen Größen in der Regel stets unterschiedliche Zahlenwerte bzw. objektbezogene Daten zuzuordnen. Die Beachtung dieses Prinzips ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß dem gewählten Beispiel das Prädikat „paradigmatisch" zugesprochen werden kann.

Die oben gewählten Beispiele waren extrem einfach und durchsichtig; häufig treten zufällige Koinzidenzen in weniger offensichtlicher Form auf.

Nicht jedes Detail einer zu haltenden Unterrichtsstunde läßt sich vorhersehen und vorausplanen. Ob in den vom Lehrer verwendeten Beispielen jedoch zufällige Koinzidenzen auftreten oder nicht, das läßt sich sehr gut planen bzw. durch eine vorausschauende Planung vermeiden.

*Das Auftreten zufälliger Koinzidenzen ist oft ein Indiz für eine unzureichende, gedankenlose Unterrichtsvorbereitung.*

* Spezialfall *Geometrie*: Im Geometrieunterricht arbeitet man in der Regel mit konkreten Figuren (z.B. Dreiecken, Parallelogrammen, ...). Jede solche Figur und die an und mit ihr vollzogenen Argumentationen stellen, streng genommen, einen Spezialfall dar. Dennoch wird eine allgemeine Aussage an diesem Spezialfall erarbeitet. Voraussetzung dafür, daß dies in angemessener Weise ermöglicht wird, ist die Vermeidung von unangemessenen Sonderfällen (z.B. kein gleichseitiges oder gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck, wenn von einem nicht-speziellen „allgemeinen" Dreieck die Rede ist). Oft sind zur Wahrung der Allgemeinheit bei der Verwendung konkreter Konfigurationen Fallunterscheidungen durchzuführen (z.B.: 1. Fall: spitzwinkliges Dreieck; 2. Fall: stumpfwinkliges Dreieck).

* Hier noch eine *Warnung* vor einer immer wieder zu beobachtenden Fehleinschätzung der motivationalen Situation. Der Unterrichtende vermeide die Motivation durch esoterische, künstliche oder an den Haaren herbeigezogene Beispiele – die Motivation sollte plausibel sein und muß i.a. über die ganze Stunde hinweg tragen; eingangs gestellte Probleme sind im Laufe der Stunde auch zu beantworten.

An dieser Stelle ist noch eine Bemerkung zu den Motivationen aus dem Bereich Esoterik/Mystik/Indianer-, Piraten- und sonstige Abenteuergeschichten angebracht. Studierende (aber nicht nur sie) verfallen immer wieder dem Irrtum, daß Motivationen aus diesen Bereichen besonders geeignet sind, die Schüler zu fesseln und ihre Aufmerksamkeit zu gewinnen. Meist werden die Schüler durch solche Motivationen schlicht hereingelegt. Ihre arglose Offenheit, ihre Neugier wird auf unsensible und meist unreflektierte Weise ausgebeutet. Diese Art von Geschichten leben von der Erwartung, daß es spannend wird, daß etwas Aufregendes, etwas Phantastisches passiert. Meist müssen die Indianer oder Piraten aber nur dazu herhalten, um anschließend eine billige, langweilige Sachrechenaufgabe durchzurechnen. Zudem sind diese Geschichten meist in primitiver Form verlogen. Das Leben der Indianer war eben nicht von der Art, daß es als Motivation für die Einführung von Längen- und Flächeninhalten besonders geeignet ist; ihre Lebensweise hat sich nicht vorrangig an der Frage des Meters als Grundeinheit der Längenmessung und seiner Unterteilungen orientiert. Und bei der Verteilung der Beute eines Piratenraubzugs dürfte selten die Lehre von den proportionalen bzw. antiproportionalen Zuordnungen im Vordergrund gestanden sein.

In den allermeisten Fällen sind derartige Abenteuergeschichten primitiv, billig und verlogen. Meine Empfehlung lautet: Man lasse die Finger davon. Die Suche nach echten Anwendungen aus dem wirklichen Leben ist erheblich anspruchsvoller. Hier wird sehr viel schneller deutlich, ob es sich um einen stimmigen Kontext, eine echte oder nur eine Scheinmotivation handelt. Wenn einem gar keine sonstige Motivation einfällt, orientiere man sich am (kultur-) geschichtlichen Hintergrund des Unterrichtsthemas (wie haben die Ägypter, die Babylonier, die Griechen oder die Römer das gemacht; was hat Adam Ries dazu geschrieben, ... ?). Die wirkliche Geschichte dient allemal besser als Motivation als diese aus den Fingern gesogenen Geschichtchen und zugleich ist dies dann noch ein Beitrag für einen ganzheitlichen, fächerverbindenden Unterricht.

- Eigentlich eine Selbstverständlichkeit: Anknüpfungsmöglichkeiten an den bisherigen Unterricht oder sonstige Erfahrungen der Schüler (Kontinuität des Unterrichts / genetisches Prinzip) sind nach Möglichkeit zu nutzen. Eine wichtige Eigenschaft paradigmatischer Beispiele ist, daß man immer wieder auf sie zurückgreifen kann.
- Der Unterrichtende muß sich auf *besondere Schwierigkeiten* und Probleme im Lernprozess einstellen und Lernschwierigkeiten durch eine flexible Planung begegnen. Dies ist eine an-

spruchsvolle Aufgabe, die ein erhebliches Einfühlungsvermögen in die Gefühls- und Gedankenwelt der Schüler voraussetzt.

- *Sprache / Artikulation*: Mathematikunterricht ist Kommunikation – wie jeder Unterricht. Die Basis für diese Kommunikation ist die deutsche (Umgangs-) Sprache.
  * Der Unterrichtende sollte bewußt eine klare, möglichst einfache, ungeschnörkelte, grammatikalisch korrekte Sprache (besonders bei Schlüsselfragen und Merksätzen) verwenden.
  * Ein spezieller Hinweis: Man vermeide Fragetechniken *ontologischen*[2] Typs zugunsten *operativer* Fragetechniken; also z.B.

    *nicht* (*ontologisch, d.h. Seins-orientiert*): „Was ist ein Bruch?"

    *sondern* (*operativ, d.h. handlungsorientiert*): „Wie kann man mit Brüchen rechnen, Brüche vergleichen, mit Brüchen umgehen, ... ?"
  * Im Unterricht hat die Lehrerin / der Lehrer im Hinblick auf die Sprachführung eine *Vorbildfunktion*; die Sprache darf landsmannschaftlich gefärbt, sie muß aber grammatikalisch korrekt sein (*Bildungsplan*: Unterrichtssprache ist die deutsche Hochsprache).
  * Die verwendeten Begriffe sollten korrekt sein, in geordneter Weise eingeführt und konsistent verwendet werden (Definition, Merksatz, ...).

    *Ein Spezialproblem*: Grundbegriffe sind in angemessener und zutreffender Form zu verwenden; also z.B. keine Dimensionsbezeichnungen an Stelle der jeweiligen Größen; man spreche z.B. nicht von den DM, den Volt, den km ... sondern von dem Preis, der Spannung, der Entfernung ... .
- Von zentraler Bedeutung ist das sorgfältige Einplanen von Impulsen und Schlüsselfragen für die *Gelenkstellen* Unterrichts – bis hin zur wörtlichen Formulierung der entsprechenden Fragen und Impulse. (Die Planung solcher Gelenkstellen kann – und sollte – auch z.B. mit Kommilitonen auf ihre Verständlichkeit, Plausibilität und Stimmigkeit hin getestet werden.)
- *Dokumentation*: Der Unterrichtende hat auf eine ausführliche, saubere, übersichtliche, klar gegliederte Dokumentation des Unterrichtsverlaufes sowohl an der Tafel bzw. am Overheadprojektor (OHP) und ggf. anderen Medien als auch im Heft der Schüler zu achten. Wichtige Begriffe und Definitionen sind stets auch schriftlich zu formulieren; dabei u.U. auftretende Fremdwörter sind zu erklären. Wichtige Ergebnisse sind stets in Form von Merksätzen festzuhalten (deren Formulierung durchaus auch mit den Schülern erarbeitet werden sollte).
- Die Verwendung von Medien, Materialien und Werkzeugen (Tafel, OHP,...) ist im Detail und mit großer Sorgfalt zu planen; insbesondere auch im zeitlich-dynamischen Verlauf. Dazu gehört insbesondere:
  * die *dynamische* Planung der Wandtafelverwendung (wo fange ich an, was bleibt stehen, was wird weggewischt, wo stehen zentrale Figuren oder Texte, wo Nebenrechnungen ...);
    zu Beginn der Stunde (bzw. vor der Benutzung) muß die Tafel *sauber* und *trocken* sein.
  * Vermeidung von Beispielen, Darstellungsformen und Materialien, durch die nur unangemessene Spezialfälle erfaßt werden
    – besonders im *Geometrieunterricht*: Beachtung der Proportionen von Zeichnungen (besonderes Problem: Verzerrungen am OHP!); Vermeidung von unangemessenen Sonderfällen – kein gleichseitiges oder gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck, wenn von einem nicht-speziellen („allgemeinen") Dreieck die Rede ist

[2] Ontologie: Lehre vom Sein, von den Ordnungs-, Begriffs- und Wesensbestimmungen des Seienden

* Die Verwendung von *Farben* sollte den folgenden Zielen dienen:
  – Hervorhebung von sachlichen Analogien, Gliederungsaspekten und Kontrasten durch die Farbgebung
  – Vermittlung eines *Bedeutungsgehaltes* durch konsequente Farbgebung über das gesamte Schuljahr hinweg. Im Geometrieunterricht z.B. konstante und konsistente Verwendung von Farben jeweils für die *gegebene Konfiguration*, für *Hilfslinien* und für die gesuchte *Lösungskonfiguration*.
  – aber i.a. keine Verwendung von Farben nur damit nach der Stunde die Tafel „schön bunt“ ist
  – Wahl deutlich erkennbarer, leuchtender Farben (dies ist u.U. vor der Stunde auszuprobieren)
  – an der Tafel sollten eher helle, am OHP und im Heft eher dunkle Farben verwendet werden (Hintergrundkontrast)
  – es sollten eindeutige und dauerhafte Farbentsprechungen zwischen Tafel und Schülerheft vereinbart werden, z.B.

| **Tafel** | **Heft** |
|---|---|
| weiß | schwarz |
| gelb | braun |
| hellblau | dunkelblau |
| ... | ... |

  – Vermeidung von Rot/Grün-Kontrasten (in Zivilisationsländern liegt Häufigkeit der Rot/Grün-Farbenblindheit von Männern bei knapp 10 %, vgl. [Lenz 1960, S.241])
* Verwendung sonstiger Materialien: z.B.: große faltbare Papierbögen bei der Behandlung des Themas „Achsenspiegelungen“ (Klecksbilder)

Der Einsatz von Medien und Materialien sollte *ökonomisch* und dem Unterrichtsziel angemessen sein. Es ist i.a. nicht das Ziel einer Mathematikstunde, einen „Medienfeuerwerk“ abbrennen zu lassen.

- Der Unterricht ist in Phasen mit unterschiedlichen und situationsspezifischen Interaktionsformen zwischen Lehrer und Schülern zu gliedern (Lehrervortrag, fragend–entwickelndes Unterrichtsgespräch, Schülerbeitrag, Einzelübungen, Gruppenarbeit, ...).
- *Übung / Festigung:* Phasen zur Stabilisierung und Lernzielkontrollen sind einzuplanen: Übungen, Festigung (insbesondere auch durch „Proben“ und Plausibilitätsbetrachtungen), Hausaufgaben. Hierbei gibt es vielfältige *Differenzierungsmöglichkeiten* und Anwendungsmöglichkeiten für das *operative Prinzip* (operatives Variieren).

  Das Ziel der Festigung läßt sich oft sehr gut mit weiteren methodologischen und inhaltlichen Zielen verbinden (Aufzeigen von alternativen Lösungen, Rechenvorteilen, ...).
- Arbeit und Leistung der Schüler sind angemessen zu würdigen durch differenziertes Lob und Bestätigung. Das Lob sollte der Leistung angemessen sein; grundsätzlich überschwengliches Loben (etwa ein stereotypes „Toll !“ auch für den allerbescheidensten Beitrag) entwertet sich selbst.
- An dieser Stelle sei noch die folgende *Empfehlung* gegeben: Der konkrete Unterricht läuft meist wesentlich langsamer ab als Studierende annehmen. Der Zeitpunkt, zu dem wesentliche

Ziele der Unterrichtsstunde erreicht werden, sollte also nicht zu spät eingeplant werden! Themen, die gegen Ende der Stunde eingeplant werden, können oft gar nicht mehr in Angriff genommen werden.

## 1.7 Formale Grundbestandteile des Unterrichtsentwurfs

* Lernziele (ca. 1/4 – 1/2 Seite)
* Sachanalyse (ca. 1 – 2 Seiten)
* Unterrichtsmethodologie (ca. 1 – 2 Seiten)
* Verlaufsplanung, insbesondere Planung der Argumentationspfade und „Gelenkstellen“, Einplanung von Alternativen (ca. 1 – 2 Seiten)
* Medienplanung, insbesondere Tafelplanung, Einsatz sonstiger Materialien: nach Bedarf (*Tafelplanung unerläßlich*!)
* Angabe der für den Unterrichtsentwurf verwendeten Literatur und Materialquellen (Schulbücher, Lehrerhandbücher, fachdidaktische Literatur, Lexika, Enzyklopädien, Presseerzeugnisse, Jahrbücher, Datensammlungen, Internet-Seiten und sonstige Quellen)

Der Unterrichtsentwurf sollte keine Sammlung von „fliegenden Blättern“ sondern eine „geordnete“ Dokumentation darstellen und alle für den Unterricht relevanten Planungselemente enthalten (also z.B. auch Schüler-Arbeitsblätter u.ä.).

Kopien des Unterrichtsentwurfs sollten stets *vor der jeweiligen Unterrichtsstunde* an die Ausbildungslehrerin bzw. den Ausbildungslehrer, den betreuenden Dozenten und die Kommilitonen verteilt werden.

Die wesentlichen Elemente des Unterrichtsentwurfs sollten in der Regel bereits für die Stunde ausgearbeitet haben, *die der zu haltenden Stunde vorausgeht*. Die Planung muß sich „gedanklich setzen“ können; Studierende müssen in der Lage sein, zu kritischen Fragen rechtzeitig Rücksprache zu nehmen (so z.B. zu wichtigen Lernvoraussetzungen, Begriffen, Bezeichnungen, u.s.w.).

## 1.8 Unterrichtsbeobachtung und -Analyse

Die Schulpraxis-Veranstaltung hat nicht nur das Ziel, eigenes selbständiges Unterrichten konkret zu üben, sondern auch (für die jeweils nicht Unterrichtenden), gehaltenen Unterricht kompetent beurteilen und analysieren zu lernen. Hierzu gehört insbesondere die Entwicklung einer spezifischen Sensibilität für „ungewöhnliche“ Schülerbeiträge im weitesten Sinne. Solche Beiträge sind oft hervorragend geeignet, den Unterricht zu befruchten und ihm eine spontane Wendung zu geben. Derartige „Chancen“ nutzen zu lernen, eine Sensibilität für solche Situationen zu entwickeln – dies ist auch ein wichtiges Ziel der Schulpraxis-Veranstaltung.

Aufgabe der nicht unterrichtenden Teilnehmer der Praxisgruppe ist es also, den Unterricht *aktiv* zu verfolgen durch das Führen schriftlicher Protokollnotizen, durch kritisch-konstruktive Analyse des Unterrichtsverlaufs, durch Bestandsaufnahme über den „Ertrag“ der Stunde. Dabei ist im Sinne des vorigen Abschnitts auf Besonderheiten (z.B. außergewöhnliche Schülerbeiträge) zu achten, die den Unterrichtsverlauf wesentlich geprägt haben.

Eine Bemerkung zu einer häufig zu beobachtenden Fehleinschätzung: Wenn einmal eine Stunde völlig scheitert, dann wird vom Unterrichtenden fast regelmäßig als Grund genannt „Es war für die Schüler zu schwer“. Erfahrungsgemäß trifft *diese* „Analyse“ jedoch fast nie zu. Die Ursachen liegen dagegen meist in der fehlenden Flexibilität des Unterrichtenden sowie in Kommunikationsproblemen.

# 2 Literaturhinweise


Bigalke, H.: Zur "gesellschaftlichen Relevanz" der Mathematik im Schulunterricht - Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), Heft 1, 1976, 25-34

Bußmann H. / Heymann H.W.: Computer und Allgemeinbildung; Neue Sammlung 27 (1987), 2-39

Christmann N.: Einführung in die Mathematik-Didaktik; Schöningh Verlag, Paderborn

Dopfer G. / Reimer R.: Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht; Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1995

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1984
2. Auflage: Mathematik für Computeranwendungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1989

Fricke A.: siehe Schwartze / Fricke

Freudenthal H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1 und 2, Klett Verlag, Stuttgart 1973

Führer L.: Pädagogik des Mathematikunterrichts; Vieweg Verlag, 1997

Hägele: Linie, Fläche, Körper; Westermann Verlag, Braunschweig 1973

*Handbuch der Schulmathematik, Band 1 bis 7; Schöningh Verlag, Paderborn und Schroedel Verlag, Hannover*

Heimann P. / Otto R. / Schulz W.: Unterricht, Analyse, Planung; Schroedel Verlag, Hannover

Heymann H. W.: Allgemeinbildender Mathematikunterricht - was könnte das sein?; mathematik lehren, Heft 33 (1988), S. 4-9

Hubwieser P.: Didaktik der Informatik; Springer-Verlag, Berlin 2000

Kirsch A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht; Didaktik der Mathematik, 4, 1976 (S. 257-284)

Kirsch A.: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht; Didaktik der Mathematik, 2, 1977 (87-101)

Kirsch A.: Beispiele für "prämathematische" Beweise; Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften, Klagenfurt, Band 2: Beweisen im Mathematikunterricht, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1979, (S. 261-274)

Klafki W.: Didaktische Analyse und Unterrichtsvorbereitung; in [Roth]

Klafki W.: Studien zur Bildungstheorie und Didaktik; Beltz Verlag, Weinheim 1963

Klafki W.: Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik; Beltz Verlag, Weinheim 1985

Klafki W.: Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung; Beltz Verlag, Weinheim 1959 ff

Klein, F.: Das Erlanger Programm, Nachdruck: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig 1974

*Kleine Enzyklopädie Mathematik; Leipzig 1977, Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch (komprimierte Ausgabe: Mathematik Ratgeber; Harri Deutsch)*

Lenné, H. / Jung W.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1969

Müller G.N. / Wittmann E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe; Vieweg Verlag, Braunschweig 1977

Müller G.N. / Wittmann E.: Mit Kindern rechnen; Arbeitskreis Grundschule 1995, ISBN 3-930024-54-3

Palzkill L. / W. Schwirtz: Die Raumlehrestunde; Henn Verlag, Wuppertal 1971

Polya G.: How to solve it; Princeton University Press, Princeton, New Jersey, second printing 1973

Popp W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht; Bayerischer Schulbuch Verlag, 1. Teil, München 1968; 2. Teil, München 1968

Reichel H. Chr. / Humenberger J.: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht; Band 31 in der Reihe "Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik", . BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich 1995

Roth H. / A. Blumenthal: Didaktische Analyse; Hermann Schroedel Verlag, Hannover 1964

Schwartze H. / A. Fricke: Grundriß des mathematischen Unterrichts; Verlag Ferdinand Kamp, Bochum 1967

Wagenschein M.: Verstehen lehren; Verlag Julius Beltz, Weinheim 1968

Weigand H.-G. / Weth Th.: Computer im Mathematikunterricht; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2002

Winter H.: Sachrechnen in der Grundschule; Cornelsen Verlag, Bielefeld 1985

Winter H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?; Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZdM), 3, 1975, 106-116

Winter H.: Üben; mathematik lehren, Heft 2, 1984, Friedrich Verlag, Velber

*Winter H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht; Vieweg Verlag, Braunschweig 1989*

Wittenberg A.I.: Bildung und Mathematik; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1963

*Wittmann E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts; Vieweg Verlag, Braunschweig 1976*

Wittmann E. et al: Handbuch produktiver Rechenübungen Teil 1 und 2, Klett Verlag, Stuttgart 1991

Zech F.: Grundkurs Mathematikdidaktik; Beltz Verlag, Weinheim 1977

Ziegenbalg J.: Anwendungsbereiche für Kleincomputer; Ferd. Schöningh Verlag, Paderborn 1982 (mit Programmbeispielen in BASIC und Pascal)

Ziegenbalg J.: Informatik und allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts; Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1983, 215-220

Ziegenbalg J.: Algorithmen als Hilfsmittel zur Elementarisierung mathematischer Lösungsverfahren und Begriffsbildungen, in: Computer in der Schule 2 (Hrsg. K.-D. Graf), Teubner Verlag, Stuttgart 1988, 149-174

Ziegenbalg J.: Algorithmen - von Hammurapi bis Gödel; Harri Deutsch verlag, Frankfurt am Main 2007
*insbesondere*: Kapitel 4: Heuristische Strategien des algorithmischen Problemlösens /
4.5: Probabilistische Verfahren / Simulation

Ziegenbalg J.: Algorithmen – fundamental für Mathematik, Mathematikunterricht und mathematische Anwendungen, Karlsruhe 2000 (online Manuskript )

Ziegenbalg J.: Zahlenfolgen und vollständige Induktion, in: Arithmetik als Prozess (Hrsg. E. Wittmann, G.N. Müller, H. Steinbring), Kallmeyer Verlag, 2004

# 3 Zitate ausgewählter Quellen zu den Themen: Allgemeine Lernziele, Bildungsziele, Didaktische Analyse

## 3.1 H. Winter: Allgemeine Lernziele („Bildungsziele“) für den Mathematikunterricht?

*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZdM), 3, 1975, 106-116*

(L1) Der Unterricht soll den Schülern Möglichkeiten geben, *schöpferisch tätig* zu sein.

Beteiligte kognitive und affektive Funktionen:

* Beobachten;
* bewußtes Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, Symmetrien, Gestalten, Invarianten in einer Vielerlei von Erscheinungen;
* Konstruieren (Herstellen) von Figuren oder Situationen;
* Schematisieren einer komplexen Situation;
* Klassifizieren;
* Anordnen;
* Aufsuchen von Entsprechungen (Analogisieren);
* Verallgemeinern;
* Spezialisieren;
* Umstrukturieren;
* Entwerfen und Verwerfen;
* Vermuten und Prüfen;
* Formulieren und Umformulieren;
* Variieren;
* Bedenken von Alternativen;
* Zerlegen und Zusammensetzen;
* Kombinieren und Trennen

(L2) Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, *rationale Argumentation* zu üben.

* Begriffe abgrenzen (Definieren) durch Realhinweise, durch Aufzählen von Beispielen und Gegenbeispielen, durch Angabe von Oberbegriffen (genus proximum) und charakteristische Eigenschaften (differentia specifica);
* Begriffe miteinander vergleichen (z.B. konstant – monoton – beschränkt – konvergent bei Zahlenfolgen);
* Lösungswege (Konstruktionswege) analysieren;
* Lösungen testen und kontrollieren;
* Kontext beachten;
* Behauptungen anzweifeln;
* Sätze analysieren (Existenzsätze, Allsätze, notwendige, hinreichende Kriterien, Diskussion der Voraussetzungen, ...);
* Beispiele für Sätze angeben und mit ihnen Sätze testen;
* logische Abhängigkeit zwischen Sätzen überprüfen;
* Sätze beweisen;

* Beweise zergliedern und auf Vollständigkeit überprüfen;
* Fallunterscheidungen treffen;
* Satzhierarchien zusammenstellen (lokales Ordnen), Systematisieren;
* Axiomatisieren;
* Scheinbeweise entlarven

(L3) Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, die *praktische Nutzbarkeit* der Mathematik zu erfahren (... Situationen der Wirklichkeit zu mathematisieren)

* Beobachten und Beschreiben von Wirklichkeitsausschnitten;
* Schematisieren;
* Idealisieren;
* Sammeln und Ordnen mathematisch relevanter Daten (Zählen, Messen, Schätzen, Tabellieren, Auflisten, Schaubilder herstellen, ...);
* Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Daten;
* Auffinden mathematisch sinnvoller Fragestellungen;
* Formulierung der Fragestellung in der mathematischen Sprache;
* Lösen der Fragestellung innerhalb mathematischer Begriffssysteme (Rechnen);
* Ausdeutung der Lösung;
* Typisieren von Wirklichkeitssituationen;
* Interpretieren innermathematischer Aussagen

(L4) Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, *formale Fertigkeiten* zu erwerben.

Es geht hier ... um die Förderung des *algorithmischen, kalkülhaften* Moments mathematischen Arbeitens ...

* Unterscheiden von Zeichen und Bezeichnetem, von „Wort“ und „Gegenstand“;
* Unterscheiden von Aussagen über das Zeichen, von Aussagen über das Bezeichnete (Metasprache, Objektsprache);
* Artikulation der Beziehung zwischen Gegenstandsbereich und Sprachbereich;
* Übertragen von Sachverhalten des Gegenstandsbereiches in den Zeichenbereich („Codieren“);
* Ausdeuten von sprachlichen Gebilden („Decodieren“);
* Handhaben von vorgegebenen Syntaxregeln (zum Erzeugen oder Transformieren von Zeichen oder Zeichenreihen), speziell Handhaben von Variablen, Termen, Gleichungen;
* Aufbau von Algorithmen zu geeigneten inhaltlich vorgegebenen Fragestellungen;
* Ausführen algorithmischer Prozesse und Rückinterpretation der Lösungen;
* formales Ableiten;
* Erfahrungen zur Grenze algorithmischer Vorgehensweisen

... Algorithmen sichern gewisse Gedankengänge ein für alle Male ab und entlasten den Geist zugunsten produktiven Denkens ...

## 3.2 H. Bigalke: Zur „gesellschaftlichen Relevanz“ der Mathematik im Schulunterricht

## – Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts –

*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), Heft 1, 1976, 25-34*

... Unter diesen Voraussetzungen und Aspekten können die Erziehungsziele, die Aufgaben und Ziele der Bildungsaktivitäten in unserer heutigen Gesellschaft etwa folgendermaßen formuliert werden:

1. Erziehung zur Fähigkeit, als unabhängiges Individuum mit sozialer Sensibilität in einer pluralistischen Gesellschaft mit pluralistischen Wertvorstellungen zu leben.
2. Erziehung zur Kommunikationsbereitschaft und Kooperationsfähigkeit und zur aktiven Förderung eines konstruktiven Kommunikationsstiles.
3. Erziehung zur Bereitschaft und Befähigung zur Mitbestimmung und Mitverantwortung in der Gesellschaft.
4. Erziehung für ein Leben, in dem eine einträgliche Stellung und Erholung (im alten Sinne) immer mehr an Bedeutung verlieren werden und in dem „Arbeit“ zunehmend den Charakter von Selbstverwirklichung annehmen wird.
5. Erziehung zur Innovationsbereitschaft und Bereitstellung der Grundlagen für die Fähigkeit zum Umlernen.
6. Erziehung zum Verständnis für die Bedeutung der Aufrechterhaltung des Gleichgewichts zwischen ökologischen Systemen und Technologie und zum entsprechenden Verantwortungsbewußtsein.
7. Erziehung zu wissenschaftlicher Intelligenz: Entwicklung von Fähigkeiten, sich der Wissenschaft zu bedienen und mit der Wissenschaftsexplosion und dem sich ständig ändernden Stand der Wissenschaften fertig zu werden.
8. Erziehung zu technologischer Intelligenz: Entwicklung von Fähigkeiten, Technologien bereitzustellen und unter Kontrolle zu halten und mit der ständigen Erweiterung des Anwendungsbereichs von Technologie und ihrem Einfluß auf soziale Institutionen und Wertsysteme fertig zu werden.
9. Entwicklung von Fähigkeiten zur Verarbeitung vielfältiger Informationen auf allen Gebieten des Medienangebots.

... Unter diesen Aspekten kann die Bedeutung der Mathematik für den Schulunterricht in folgender Hinsicht gesehen werden:

1. Mathematik als Inbegriff eines besonderen Typs von Wissenschaft und als Prototyp für viele moderne Wissenschaften.
2. Mathematik als Hilfswissenschaft für viele andere Wissenschaften und als Hilfe für den Alltag.
3. Mathematik als Lieferant von transferierbaren Methoden, Denkweisen und Erkenntnissen für das „tägliche Leben“.
4. Mathematik als Gegenstand ästhetischer Betätigung.

*Allgemeine Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts sind* (nach Bigalke):

1. Förderung des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens
2. Förderung des logischen Denkens
3. Förderung der Bereitschaft und der Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen
4. Förderung geistiger Initiative, Phantasie und Kreativität
5. Förderung des Anschauungsvermögens
6. Förderung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit
7. Förderung der Fähigkeit, Mathematik anwenden zu können
8. Vermittlung bestimmter, näher festzulegender Inhalte der Mathematik – das sind Fakten, Methoden, Darstellungsweisen – in einer den Forderungen 1. bis 7. entsprechenden Weise

## 3.3 H. W. Heymann: Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein?

*mathematik lehren, Heft 33 (1988), 4-9*

... Ob Allgemeinbildung in unseren Schulen gelingt, entscheidet sich im Fachunterricht ...

*Vorbereitung auf zukünftige Lebenssituationen*

Eine unumstrittene Aufgabe allgemeinbildender Schulen ist die Vorbereitung der Heranwachsenden auf ihr Leben als Erwachsene. ... Allgemeinbildende Schulen sollen Qualifikationen vermitteln,

(a) die zur Bewältigung realer und auf absehbare Zeit in unserer Gesellschaft verbreiteter Lebenssituationen beitragen;
(b) die nicht auf die Ausübung eines bestimmten Berufs hin ausgerichtet sind;
(c) von denen anzunehmen ist, daß sie nicht gleichsam automatisch, nebenher von jedem Heranwachsenden auch ohne systematischen Unterricht erworben werden;
(d) die sich nicht ohne weiteres im Rahmen zeitlich begrenzter Spezialkurse erwerben lassen (Beispiel: Autofahren)

*Stiftung kultureller Kohärenz*

Die Tradierung kulturspezifischer Errungenschaften (von alltäglichen Umgangsformen, Wertvorstellungen bis hin zu künstlerischen und wissenschaftlichen Hervorbringungen höchsten Anspruchs) nimmt in den allgemeinbildenden Schulen unserer Gesellschaft einen hohen Rang ein. ...

*Aufbau eines Weltbildes*

In der Alltagssprache meint „gebildet sein“ häufig dasselbe wie „ein differenziertes Weltbild haben“: Jemand mit dieser Eigenschaft kann den Erscheinungen um sich herum einen Namen geben, vermag sie zueinander in Beziehung zu setzen. ...

*Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*

Die eigene Vernunft kritisch zu gebrauchen heißt, Tatsachenbehauptungen und Werturteile nicht einfach hinzunehmen, sondern sie – ungeachtet des Autoritätsanspruches, mit dem sie vertreten werden – zu hinterfragen, sie auf Unstimmigkeiten zu untersuchen und dabei der Kraft der eigenen Urteilsfähigkeit zu vertrauen. ...

*Förderung von Phantasie und Kreativität*

Durch die Schulkritik aller Zeiten zieht sich der Vorwurf, daß das Lernen in der Pflichtschule abstumpfe, den Geist veröde, die spontane Phantasie und Kreativität der Kinder abtöte. ...

*Entfaltung eines verantwortlichen Umgangs mit den zu erwerbenden Kompetenzen*

Mit der Vorstellung von Bildung als einer Synthese von Unterricht und Erziehung verknüpft sich die Erwartung, daß sie in eine ethisch begründete Haltung münden müsse. ...

*Stärkung des Schüler-Ichs*

... Verantwortung als soziales und ethisches Prinzip bedarf der Persönlichkeit, die sich als Subjekt begreift, Zivilcourage entwickelt und sich selbst handelnd verwirklicht. ...

## 3.4 Wolfgang Klafki: Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung

in: Klafki, W.: Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Beltz-Studienbuch, Weinheim 1963
und: H. Roth A. Blumenthal: Auswahl – Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift „Die deutsche Schule", S. 5-34

„Eine didaktische Analyse als erster Vorbereitungsschritt richtet sich in ihrem Umfang natürlich immer nach dem gewählten Thema. Dies kann ebensogut eine sich über Monate erstreckende Unterrichtseinheit wie ein Wochen- oder Stundenthema sein. Die didaktische Analyse ist dabei das Fundament nicht nur der Neueinführung, sondern aller diesem Bildungsinhalt gewidmeten Unterrichtsbemühungen. So ist auch die Gestaltung etwa einer Übungs- oder Wiederholungsstunde – als solche eine vorwiegend methodische Aufgabe – abhängig von den Ergebnissen der didaktischen Analyse...."

**Die didaktische Analyse**

Wir konkretisieren die allgemeine Frage nach dem Bildungsgehalt, den die didaktische Analyse ermitteln soll, indem wir sie in fünf Grundfragen übersetzen.

*1. Exemplarische Bedeutung*

Welchen größeren bzw. welchen allgemeinen Sachzusammenhang vertritt und erschließt dieser Inhalt? Welches Urphänomen oder Grundprinzip, welches Gesetz, Kriterium, Problem, welche Methode, Technik oder Haltung läßt sich in der Auseinandersetzung mit ihm „exemplarisch" erfassen?

*2. Gegenwartsbedeutung*

Welche Bedeutung hat der betreffende Inhalt bzw. die an diesem Thema zu gewinnende Erfahrung, Erkenntnis, Fähigkeit oder Fertigkeit bereits im geistigen Leben der Kinder, welche Bedeutung sollte es – vom pädagogischen Gesichtspunkt aus gesehen – haben?

*3. Zukunftsbedeutung*

Worin liegt die Bedeutung des Themas für die Zukunft der Kinder?

*4. Gegenstandsstruktur*

Welches ist die Struktur des (durch die Fragen 1, 2 und 3 in die spezifisch pädagogische Sicht gerückten ) Inhaltes?

*5. Zugänglichkeit*

Welches sind die besonderen Fälle, Phänomene, Situationen, Versuche, Personen, Ereignisse, Formelemente, in oder an denen die Struktur des jeweiligen Inhalts den Kindern dieser Bildungsstufe, dieser Klasse interessant, fragwürdig, zugänglich, begreiflich, „anschaulich" werden kann?

# 4 Allgemeine methodologische Aspekte und fachdidaktische Prinzipien des Mathematikunterrichts

*Grundprinzipien der Konzeption, Planung, Gestaltung und Durchführung von Mathematikunterricht*

## 4.1 Das genetische Prinzip

Es ist eines der wichtigsten, wenn nicht *das* wichtigste fachdidaktische Prinzip überhaupt. Aufgrund seiner herausragenden Bedeutung und seiner thematischen Nähe zu historischen Aspekten wird dieses Thema ausführlicher und im Zusammenhang mit dem Thema Geschichte der Mathematik in Abschnitt 5 behandelt.

## 4.2 Das operative Prinzip

Auch das operative Prinzip ist von herausragender Bedeutung für das mathematische Lernen und Arbeiten. Die Grundfrage des operativen Prinzips lautet (vgl. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts):

*Was geschieht, wenn ... .*

Das operative Prinzip ist eng mit dem *experimentierenden Arbeiten* verbunden; es ist fundamental für jede mathematisch / naturwissenschaftliche Form des Arbeitens und Problemlösens. Eine typisch mathematische Variante des operativen Prinzips ist die *Parametervariation*. Sie ist ein Kernstück der mathematischen Modellbildung und steht in „Reinform“ im engen Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff in der Mathematik. Schon einen Funktionsgraphen zu untersuchen heißt, der Frage „wie verändert sich der Funktionswert, wenn die unabhängige Variable z.B. größer, kleiner, gleich Null oder negativ wird?“ Oft hängen Funktionen von Koeffizienten bzw. Parametern ab. Einen besonders einfachen, schultypischen Fall stellt z.B. die Diskussion der quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$) dar. Hier stellt sich z.B. unmittelbar die Frage: Wie verändert sich der Funktionsgraph, wenn sich die Parameter $a$, $b$ und $c$ verändern?

Moderner Computersoftware (Simulationssoftware, Tabellenkalkulation, ...) liegt das operative Prinzip oft explizit oder implizit zugrunde. Die Nutzung des Computers und seiner Software als Werkzeug in mathematischen Problemlöseprozessen eröffnet hervorragende (aus der Geschichte der Mathematik völlig unbekannte) Chancen und Möglichkeiten, das experimentelle Arbeitsformen fördern. In der englischen Sprache wird die Tabellenkalkulations-Software zum Teil auch als *„what – if – software”* bezeichnet. In der Geometrie eröffnen *Dynamische-Geometrie-Systeme* (DGS) neue Dimensionen des operativ-experimentellen Arbeitens.

**Eine Detailstudie**: *Diskussion des operativen Prinzips am Beispiel des Themas „Prozentrechnung“*

Im folgenden sei in Anlehnung an [Dürr / Ziegenbalg, S. 302] eine kleine Detailstudie zum operativen Prinzip in Verbindung mit dem *funktionalen Denken* im Zusammenhang mit dem Standardthema „Prozentrechnung“ gegeben. In traditioneller Betrachtungsweise geht man häufig von der Formel

$$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert} \quad \text{abgekürzt:} \quad Ps = \frac{Pw}{Gw}$$

aus. In dieser Formel treten drei Größen (Variable) auf. Sind zwei Größen vorgegeben, so läßt sich daraus jeweils die dritte Größe berechnen. Daraus ergeben sich (rein kombinatorisch) drei Aufgabentypen, die drei „traditionellen“ Grundaufgaben der Prozentrechnung.

Aus operativer Sicht ist zunächst einmal der situative Kontext zu erweitern. Man betrachtet drei Größen, z.B. beim Einkauf den Nettopreis einer Ware, die Mehrwertsteuer (als Geldbetrag) und den Mehrwertsteuersatz. Diese Größen stehen (als Spezialfall der obigen allgemeineren Gleichung) in folgendem Zusammenhang

$$Mehrwertsteuersatz = \frac{Mehrwertsteuer}{Nettopreis}$$

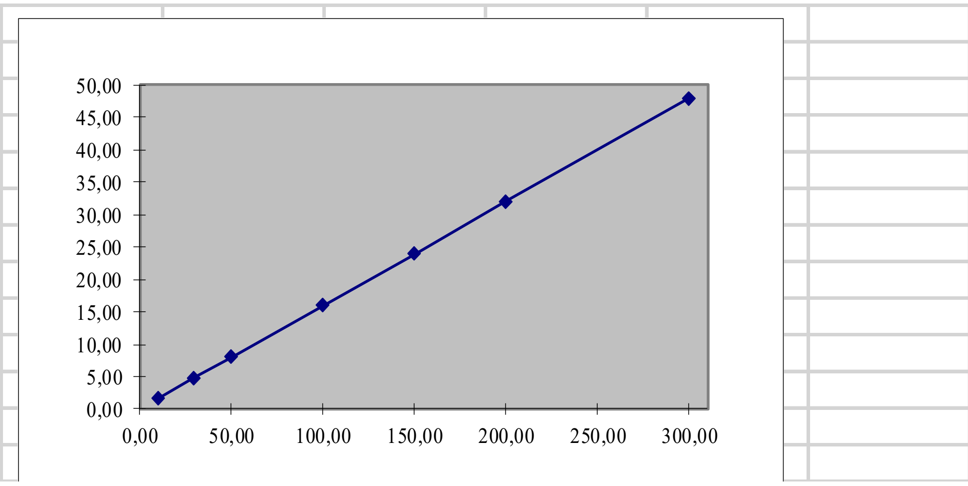
Aus *funktionaler* Sicht liegt nun die folgende Betrachtungsweise nahe. Die Nettopreise verschiedener Waren seien z.B. 10,00 EUR; 30,00 EUR; 50,00 EUR; 100,00 EUR; 150,00 EUR; 200,00 EUR; 300,00 EUR. Wie groß ist jeweils die Mehrwertsteuer? (Der Mehrwertsteuersatz liegt fest; z.Zt. bei 16 %). Bei festem Mehrwertsteuersatz kann die Mehrwertsteuer als Funktion des Nettopreises angesehen werden.

Eine (aus historischer Sicht gesehen) neuartige Klasse von Werkzeugen zur Behandlung dieser Fragestellung sind die Tabellenkalkulationssysteme (engl. spreadsheet software). Sie eignen sich hervorragend dazu, vernetzte tabellenartige Modelle aufzubauen und in Graphiken umzusetzen.

Das folgende Diagramm zeigt eine solche Darstellung; die dynamische Qualität der Tabellenkalkulationssysteme ist auf diese Weise allerdings nicht, oder nur in stark eingeschränkter Form, vermittelbar.

| | |
|---|---|
| **Mehwertsteuersatz** | **16%** |
| | |
| Nettobetrag | Mehrwertsteuer |
| (in EUR) | (in EUR) |
| 10,00 | 1,60 |
| 30,00 | 4,80 |
| 50,00 | 8,00 |
| 100,00 | 16,00 |
| 150,00 | 24,00 |
| 200,00 | 32,00 |
| 300,00 | 48,00 |
| | |

Die Tabelle fordert geradezu zur graphischen Darstellung auf.

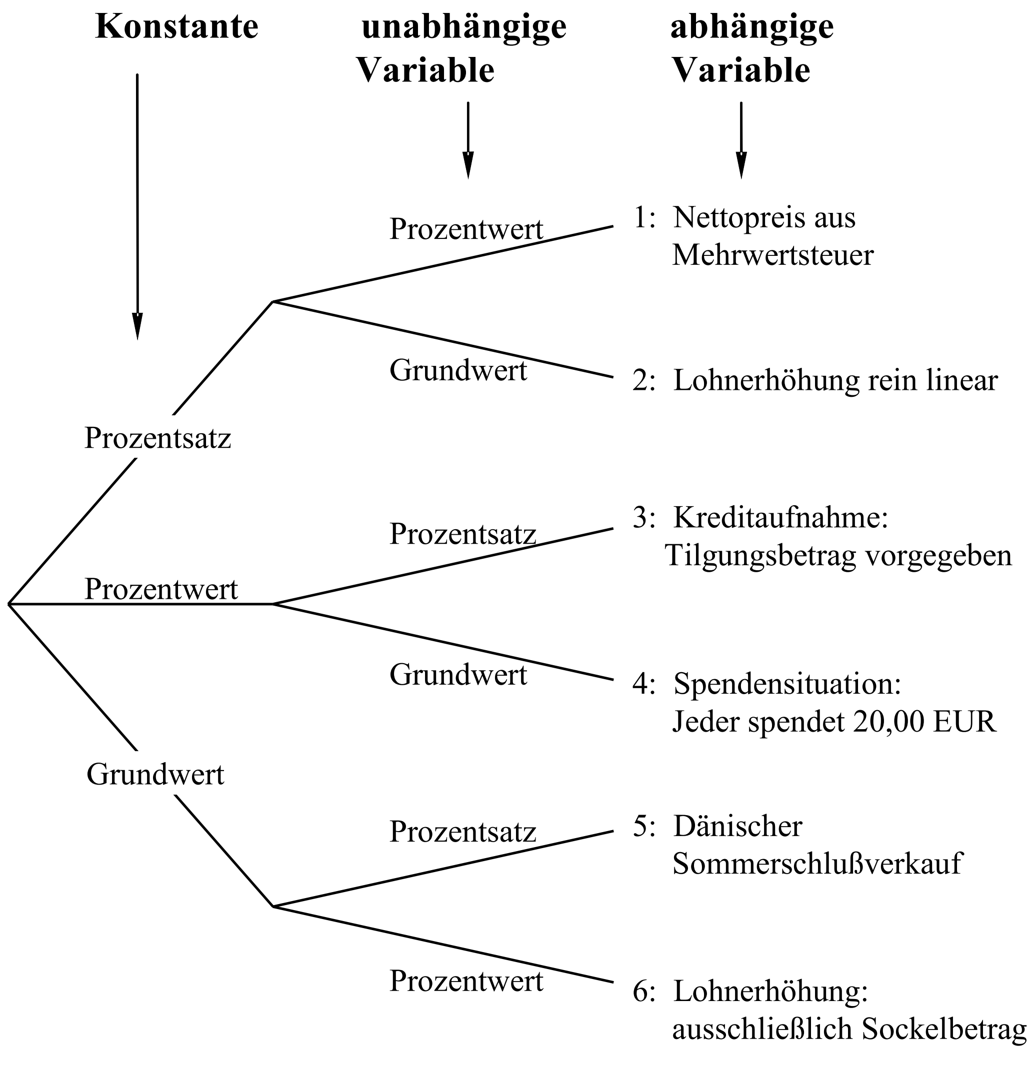


Jede der drei Größen hat bei dieser funktionalen Betrachtungsweise eine eigene Bedeutung:

| **Größe** | **Bedeutung** | **in der Graphik** |
|---|---|---|
| Nettopreis | unabhängige Variable | x-Achse |
| Mehrwertsteuer | abhängige Variable | y-Achse |
| Mehrwertsteuersatz | konstante Größe | *hier*: Steigung |

Aus dieser Sicht kommen wir in natürlicher Weise zu *sechs* Grundaufgaben: Rein formal kann jede der drei Größen als Konstante und jede der beiden verbleibenden Größen in der Rolle der unabhängigen Variablen auftreten. Die dritte Größe ist dann jeweils die abhängige Variable. Dies ergibt insgesamt sechs Fälle.

Es ist reizvoll, der Frage nachzugehen, ob jeder dieser zunächst formal aufgestellten Möglichkeiten auch eine reale, plausible Anwendungssituation zugeordnet werden kann. Daß dies durchaus möglich ist, zeigen die folgenden Überlegungen.



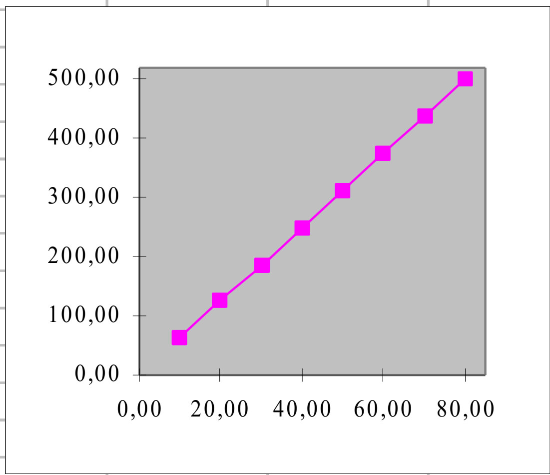
## Interpretationen

Zu 1: *Nettopreis aus Mehrwertsteuer*

*Szenario*: Auf einem Kassenzettel ist der Nettopreis verschmutzt; der Mehrwertsteuerbetrag ist lesbar. Wie berechnet sich der Nettopreis aus der Mehrwertsteuer?

$$Grundwert = \frac{Prozentwert}{Prozentsatz} \qquad \text{im Beispiel:} \qquad Nettopreis = \frac{Mehrwertsteuer}{Mehrwertsteuersatz}$$

| | |
|---|---|
| **Mehrwertsteuersatz** | **16%** |
| Mehrwertsteuer | Nettobetrag |
| 10,00 | 62,50 |
| 20,00 | 125,00 |
| 30,00 | 187,50 |
| 40,00 | 250,00 |
| 50,00 | 312,50 |
| 60,00 | 375,00 |
| 70,00 | 437,50 |
| 80,00 | 500,00 |



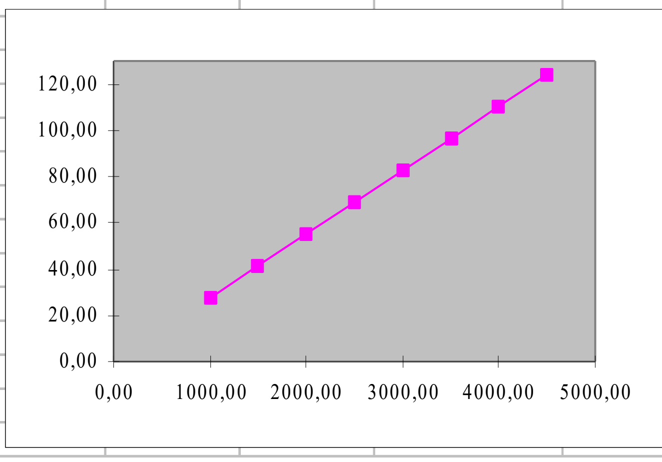

2. *Lohnerhöhung – rein linear*

*Szenario*: Eine rein lineare Lohnerhöhung wird zwischen den Tarifpartnern ausgehandelt. Der Satz der Erhöhung beträgt 2,75 %. Um welchen Betrag steigt das Gehalt?

$$Prozentwert = Grundwertwert \cdot \mathrm{Pr}\,ozentsatz$$

$$\text{im Beispiel:} \quad Gehaltssteigerung = Gehalt \cdot Erhöhungssatz$$

| | |
|---|---|
| **Satz der Lohnerhöhung:** | **2,75%** |
| Gehalt | Erhöhung |
| 1000,00 | 27,50 |
| 1500,00 | 41,25 |
| 2000,00 | 55,00 |
| 2500,00 | 68,75 |
| 3000,00 | 82,50 |
| 3500,00 | 96,25 |
| 4000,00 | 110,00 |
| 4500,00 | 123,75 |



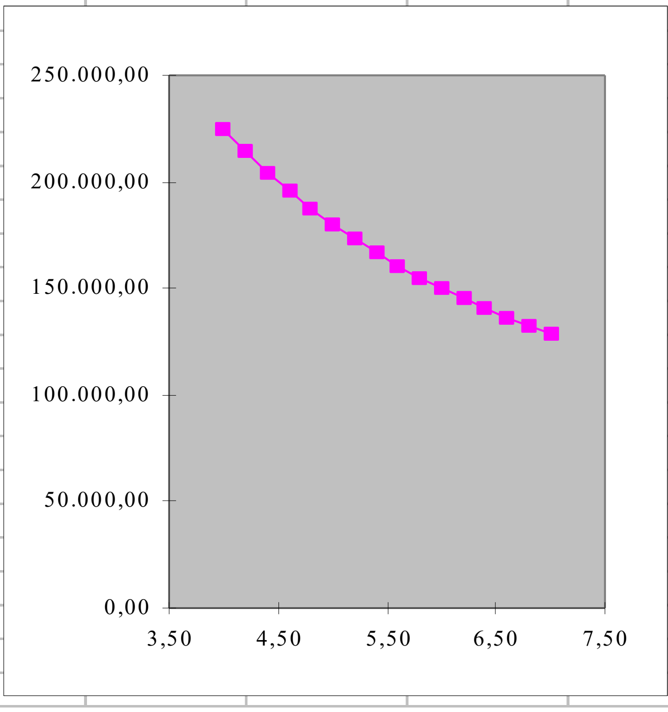
3. *Kreditaufnahme bei vorgegebenem Tilgungsbetrag*

*Szenario*: Herr Häberle muss für den Kauf eines Reihenhauses einen Kredit aufnehmen. Er kann pro Jahr maximal 9.000 EUR für die Zinsen erübrigen. Eine kleine Umfrage bei potentiellen Kreditgebern ergibt, dass sich die Kreditzinsen deutlich unterscheiden.

Was ist bei vorgegebenem Prozentwert (9.000 EUR) in Abhängigkeit vom Zinssatz die jeweilige maximale Kredithöhe?

$$Grundwert = \frac{Prozentwert}{Prozentsatz} \qquad \text{im Beispiel:} \qquad Kreditbetrag = \frac{Jahreszinsen}{Zinssatz}$$

| | |
|---|---|
| **Jahreszinsen:** | **9.000,00** |
| Zinssatz (in %) | Kreditbetrag |
| 4,00 | 225.000,00 |
| 4,20 | 214.285,71 |
| 4,40 | 204.545,45 |
| 4,60 | 195.652,17 |
| 4,80 | 187.500,00 |
| 5,00 | 180.000,00 |
| 5,20 | 173.076,92 |
| 5,40 | 166.666,67 |
| 5,60 | 160.714,29 |
| 5,80 | 155.172,41 |
| 6,00 | 150.000,00 |
| 6,20 | 145.161,29 |
| 6,40 | 140.625,00 |
| 6,60 | 136.363,64 |
| 6,80 | 132.352,94 |
| 7,00 | 128.571,43 |

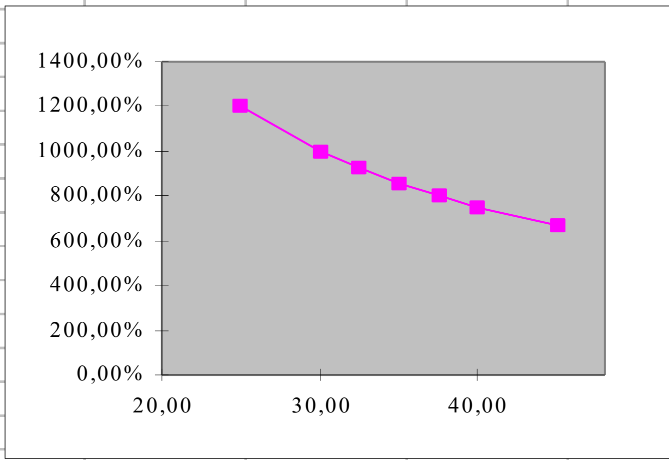


4. *Spendensituation: Jeder spendet denselben Betrag*

*Szenario*: Bei einer Spendenaktion in der Klasse 6b spendet jeder Schüler (unabhängig von der Höhe seines Taschengeldes) 3 EUR. Was macht dies prozentual bei unterschiedlichem Taschengeld aus?

$$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert} \qquad \text{im Beispiel:} \qquad prozentualer\ Anteil = \frac{Spendenbetrag}{Taschengeld}$$

| | |
|---|---|
| **Spendenbetrag:** | **3,00** |
| **Taschengeld** | **Anteil** |
| | (in %) |
| 25,00 | 12,00 |
| 30,00 | 10,00 |
| 32,50 | 9,23 |
| 35,00 | 8,57 |
| 37,50 | 8,00 |
| 40,00 | 7,50 |
| 45,00 | 6,67 |



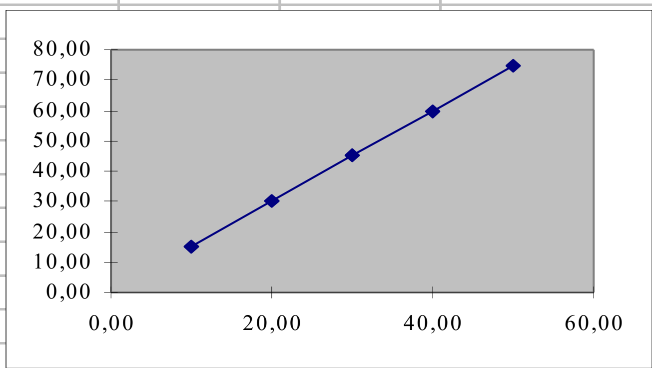

5. *Dänischer Sommerschlussverkauf* (*ist real passiert*!)

*Szenario*: Ein Bekleidungsgeschäft in Dänemark annonciert: In der Woche des Sommerschlussverkaufs werden alle Waren wie folgt verbilligt: Am Montag: um 10 %, am Dienstag um 20 %, am Mittwoch um 30 %, am Donnerstag um 40 %, am Freitag um 50 %. Am Sonnabend ist Inventur. Frau Hansen hat ein Auge auf ein bestimmtes Kleid geworfen; sein Preis beträgt vor dem Schlussverkauf 150,00 EUR. Um welchen Betrag verbilligt sich das Kleid an den Tagen des Schlussverkaufs?

$$Prozentwert = Grundwertwert \cdot Prozentsatz$$

$$Verbilligung = Grundpreis \cdot Rabattsatz$$

| | | |
|---|---|---|
| **Preis des Kleides:** | **150,00** | |
| Tag | Rabatt | Verbilligung |
| | (in %) | |
| Montag | 10,00 | 15,00 |
| Dienstag | 20,00 | 30,00 |
| Mittwoch | 30,00 | 45,00 |
| Donnerstag | 40,00 | 60,00 |
| Freitag | 50,00 | 75,00 |

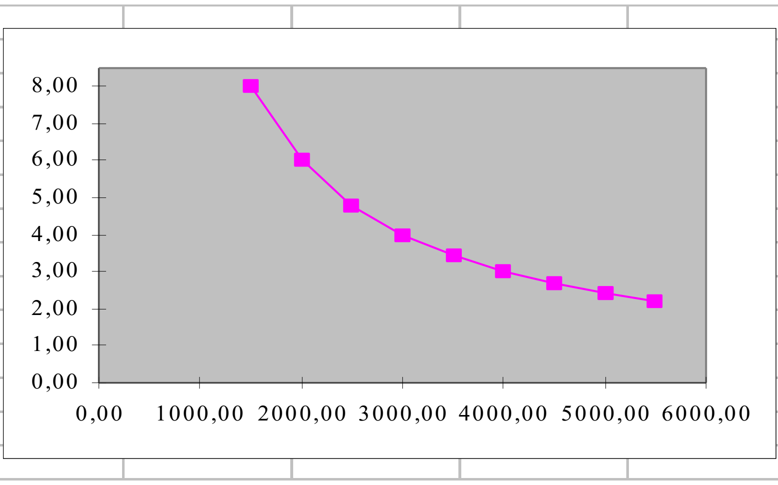



6. *Lohnerhöhung ausschließlich durch einen Sockelbetrag*

*Szenario*: Als Lohnerhöhung wird ein reiner Sockelbetrag von 120,00 EUR vereinbart. Was bedeutet dies bei den verschiedenen Gehaltsstufen prozentual?

$$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert} \qquad \text{im Beispiel:} \qquad Prozentsatz = \frac{Erhöhungsbetrag}{Gehalt}$$

| | |
|---|---|
| **Lohnerhöhung** | **120,00** |
| | (in EUR) |
| Gehalt | Prozentsatz |
| | (in %) |
| 1500,00 | 8,00 |
| 2000,00 | 6,00 |
| 2500,00 | 4,80 |
| 3000,00 | 4,00 |
| 3500,00 | 3,43 |
| 4000,00 | 3,00 |
| 4500,00 | 2,67 |
| 5000,00 | 2,40 |
| 5500,00 | 2,18 |




*Ausblick*

Die Nutzung von Tabellenkalkulationssystemen liefert eine praktisch unbeschränkte Fülle weiterer lebensnaher Beispiele zur Umsetzung des operativen Prinzips.

*Sachanalytischer Kontext*

Funktion, Funktionsgraph, proportionale Funktion (Proportionalität), antiproportionale Funktion (Antiproportionalität), Quotientengleichheit, Produktgleichheit, mathematische Modellbildung

*Ergänzende Literaturhinweise*:


R. Dürr / J. Ziegenbalg: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1984, Titel der zweiten Auflage: "Mathematik für Computeranwendungen"; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1989

J. Ziegenbalg: Das operative Prinzip und der Computer; in „Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik“; Auer Verlag, Donauwörth 2004

## 4.3 Die Methode des paradigmatischen Vorgehens

*Literaturhinweise*: Kirsch, Freudenthal, Wittmann

Mathematik und Mathematikunterricht haben es mit *Erkenntnisgewinnung* zu tun. Mathematische Sätze, in der Schule oft als „Regeln" formuliert, sind substantieller Bestandteil dieser Erkenntnisse. Auch Kenntnisse über mathematische Methoden und Verfahren (Algorithmen) und ihre werkzeugartige Verwendung gehören dazu. Die Mathematik steht deshalb in enger Verbindung zur Philosophie, insbesondere zur Wissenschafts- und Erkenntnistheorie. Ein Charakteristikum mathematischer Erkenntnisse ist, daß sie in der Regel in großer Allgemeinheit formuliert sind. Der Objektbereich, auf den sie sich erstrecken, enthält meist unendlich viele Elemente. So erstreckt sich der Gültigkeitsbereich des Satzes des Pythagoras auf unendlich viele rechtwinklige Dreiecke.

Darüber hinaus hat die Mathematik im Laufe der Jahrtausende eine bestimmte Begründungsform entwickelt: den mathematischen Beweis. Ausgehend von bestimmten Anfangsannahmen (Spielregeln, Axiomen, ...) werden unter Anwendung logischer Schlußregeln Folgerungen aus den Axiomen gezogen und als mathematische Sätze formuliert. Die Methode ist die rein formale Ableitung. Dies unterscheidet die Mathematik von den empirischen Wissenschaften, die zu ihren Ergebnissen aus einer Mischung von Erfahrung und punktueller formaler Ableitung gelangen.

Die empirische Methode spielt zwar im Bereiche der Heuristik (insbesondere im Zusammenhang mit dem Aufstellen von Vermutungen und Hypothesen) eine unverzichtbare Rolle; sie liefert aber keine endgültigen Beweise mathematischer Sätze. Die Methode des formalen mathematischen Beweisens und der damit verbundene vergleichsweise hohe Grad an Beweis-Sicherheit bringen es mit sich, daß so gewonnene Ergebnisse einen zeitlich unbegrenzten Bestand haben. Der Satz von Euklid über die „Unendlichkeit der Primzahlmenge", formuliert im dritten Jahrhundert v.Chr., hat seine Gültigkeit in den darauffolgenden Jahrtausenden nie verloren und wird es auch in Zukunft nicht tun. Entsprechendes gilt für andere Sätze aus der griechischen Antike (Satz des Thales, Satz des Pythagoras, ...).

Mit empirisch gewonnenen Erkenntnissen ist dies anders. So schienen etwa Sätze wie „Alle Schwäne sind weiß", „Die Erde ist eine Scheibe" oder „Die Sonne dreht sich um die Erde" auf der Basis der empirischen Begründung (der konkreten Beobachtung) zunächst korrekt zu sein; durch das Auftreten von Gegenbeispielen oder anderer empirischer Beobachtungen wurden sie aber später falsifiziert. In der Physik wurden z.B. die durch I. Newton (1643–1727) formulierten Gesetze der Mechanik später im Rahmen der Relativitätstheorie von A. Einstein (1879–1955), wenn nicht als falsch, so doch als modifikations- b.z.w. ergänzungsbedürftig erkannt.

Die Sicherheit und Allgemeingültigkeit mathematischer Erkenntnisse hat aber auch ihren Preis: mathematische Beweise sind in der Regel vergleichsweise abstrakt und nur unter Verwendung bestimmter formaler Sprachelemente (Quantoren und Variable) möglich. Diese formalen Sprachelemente stehen im Unterricht aber oft noch nicht zu dem Zeitpunkt zur Verfügung, wo die entsprechenden mathematischen Inhalte behandelt werden.

Hieraus ergibt sich ein Dilemma. Der allgemeingültige Charakter einer bestimmten Begründung ist zu vermitteln, ohne daß alle Techniken und Sprachelemente zur Formulierung eines formalen Beweises bei den Lernenden entwickelt sind.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma liefert die Methode des *paradigmatischen Beweisens*, die zwar schon immer implizit praktiziert aber erst in den letzten Jahren explizit bewußt gemacht worden ist.

Im folgenden seien einige Charakteristika des paradigmatischen Begründens dargelegt. Zunächst eine Vorbemerkung zur Etymologie: der Begriff „paradigma" kommt aus der griechischen Sprache und bedeutet soviel wie „Beispiel“ oder „Muster“; „paradigmatisch“ heißt also etwa „von mustergültigem, modellhaftem Charakter“.

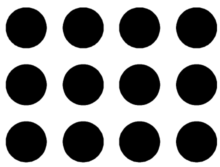
Eine padadigmatische Begründung ist also eine Begründung anhand eines Beispiels – im strengen erkenntnistheoretischen Sinne also kein Beweis für eine allgemeingültige Aussage. Dennoch haben paradigmatische Begründungen für das Erlernen von Mathematik eine außerordentlich große Bedeutung.

Die Methode des paradigmatischen Vorgehens tritt in verschiedenartigen Situationen auf:

- Paradigmatische *Beispiele* dienen der Einführung und Erläuterung eines neuartigen Konzepts anhand „griffiger“, typischer Situationen. Abstrakte Begriffe sind wenig zugänglich. Sie müssen durch geeignete Beispiele motiviert, plausibel gemacht und untermauert werden.
  * Benzinkosten in Abhängigkeit von getankter Menge als Beispiel für lineare Abbildungen
  * Zinseszins-Sparbuch als Beispiel für geometrische Folgen und geometrisches Wachstum
  * Symmetrieabbildungen des Dreiecks (Diedergruppe) als Beispiel für endliche Gruppen
  * Matrizenring als Beispiel für allgemeinen Ring

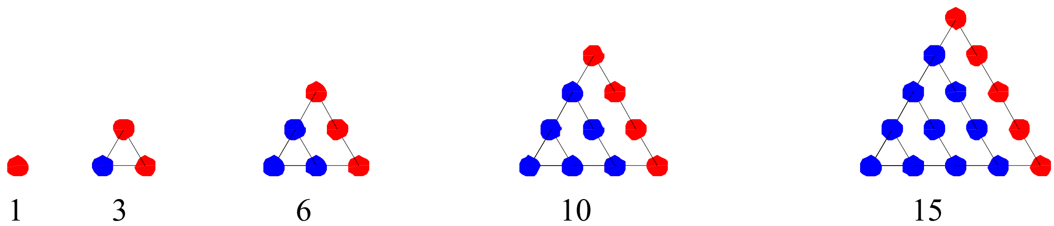
  ...
- paradigmatische *Veranschaulichungen*
  * geometrische Veranschaulichungen für arithmetische Grundoperationen

3 * 4 :

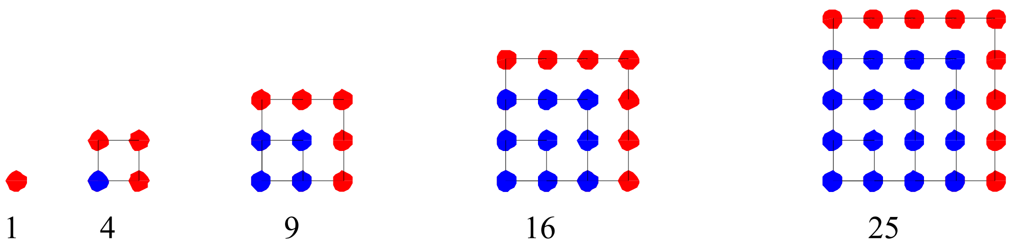


  * **Figurierte Zahlen (vgl. Dürr / Ziegenbalg 1989)**

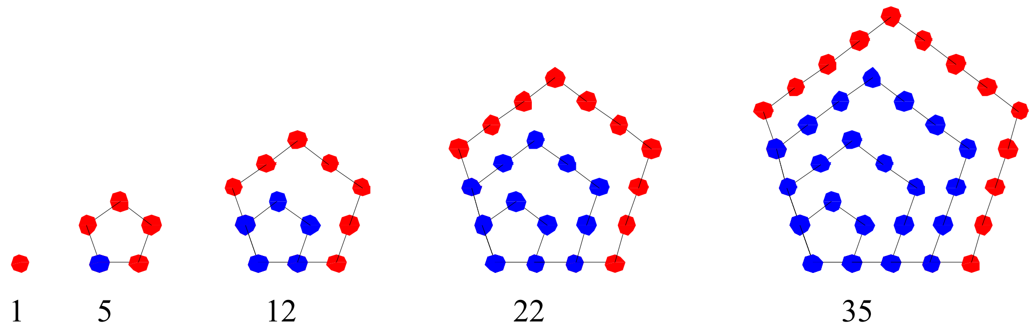
*Dreieckszahlen*:



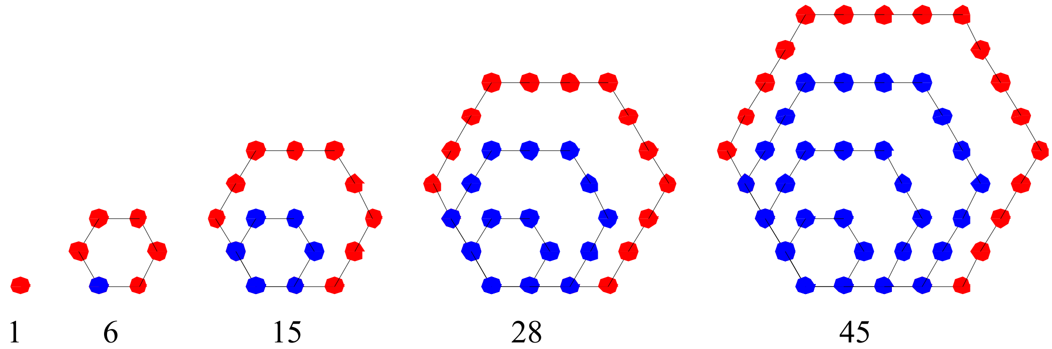

*Viereckszahlen (Quadratzahlen):*



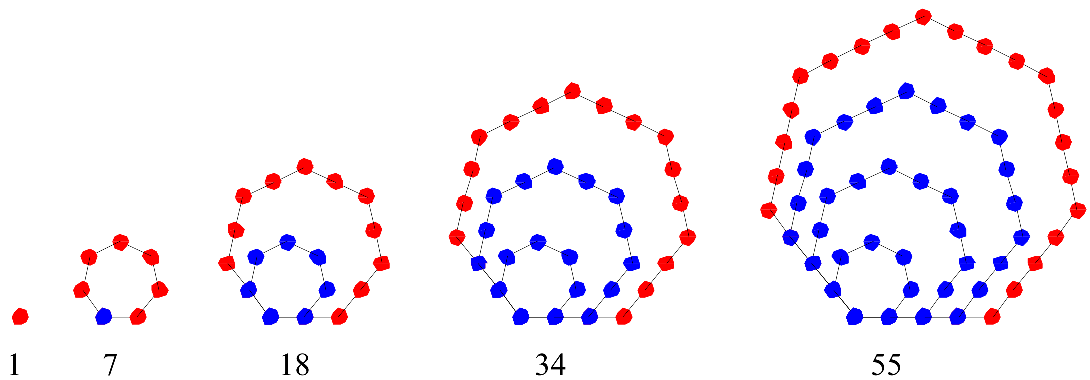
*Fünfeckszahlen (Pentagonalzahlen):*



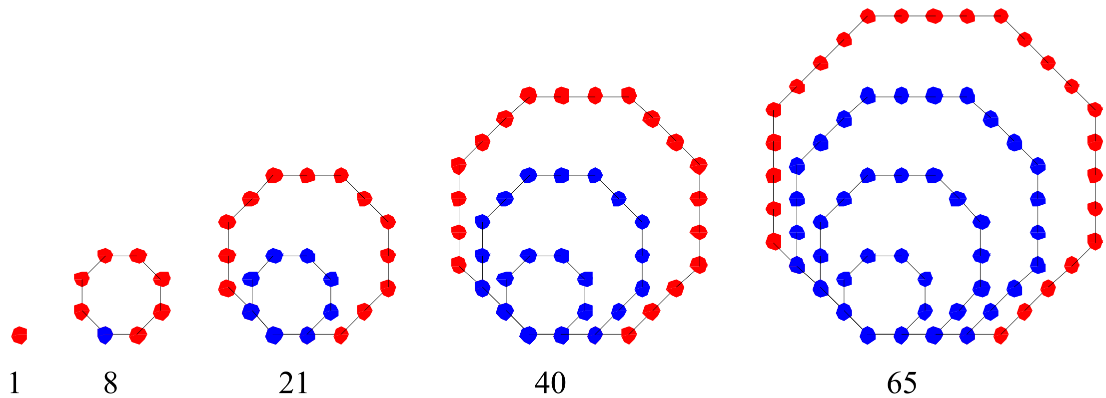

*Sechseckszahlen (Hexagonalzahlen):*



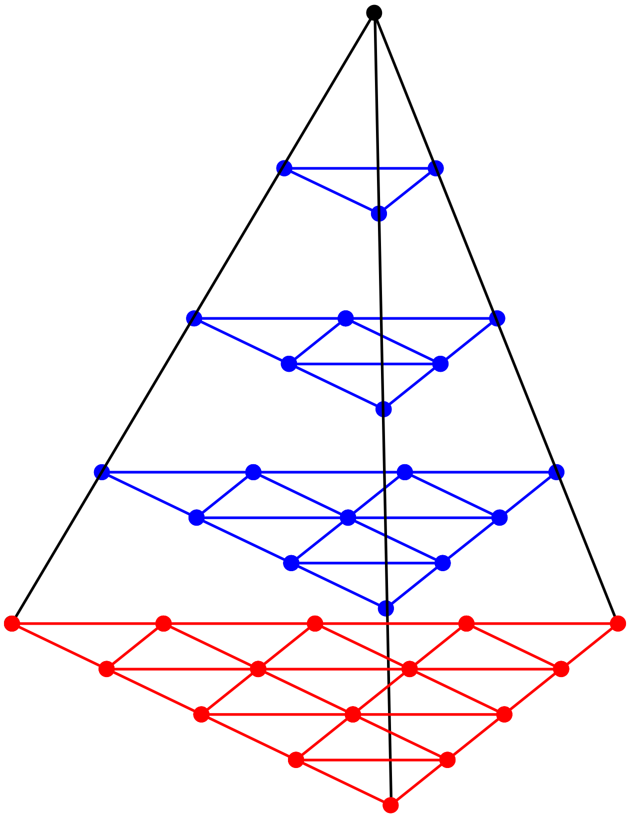

*Siebeneckszahlen (Septagonalzahlen):*




*Achteckszahlen (Octagonalzahlen):*

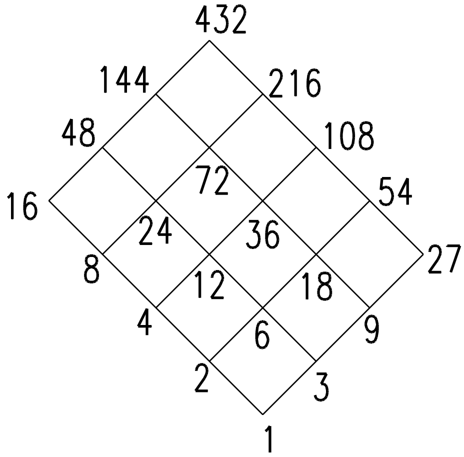


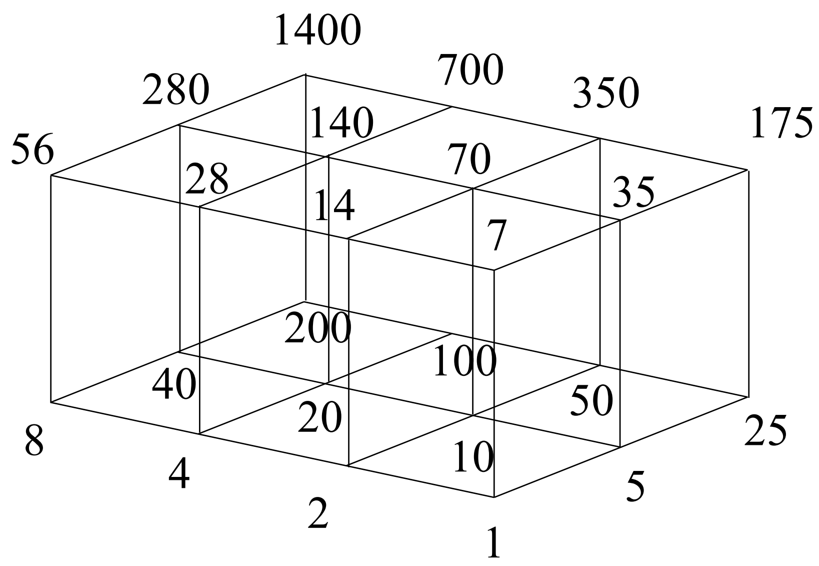
Räumlicher Aufbau: *Tetraederzahlen*

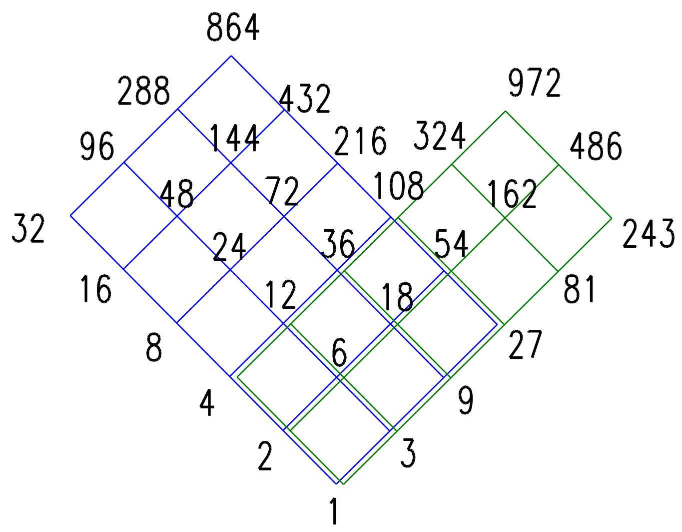


Das Arbeiten mit figurierten Zahlen stellte bereits in der griechischen Antike (Pythagoras von Samos, ca. 580–500 v.Chr.) eine wichtige Quelle der Inspiration für die Entdeckung und Begründung mathematischer Gesetzmäßigkeiten (und „Formeln") dar.

* Teilerdiagramme, Operatordiagramme



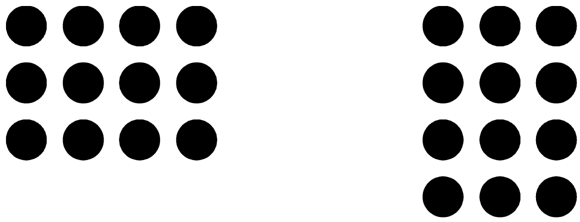



- paradigmatische *Begründungen* („*paradigmatische Beweise*“)

  * Begründung der Grundgesetze des arithmetischen Rechnens (Addition, Multiplikation, Division mit Rest) anhand geometrischer Veranschaulichungen

  *Beispiel*: Paradigmatische Begründung für das Kommutativgesetz der Multiplikation natürlicher Zahlen



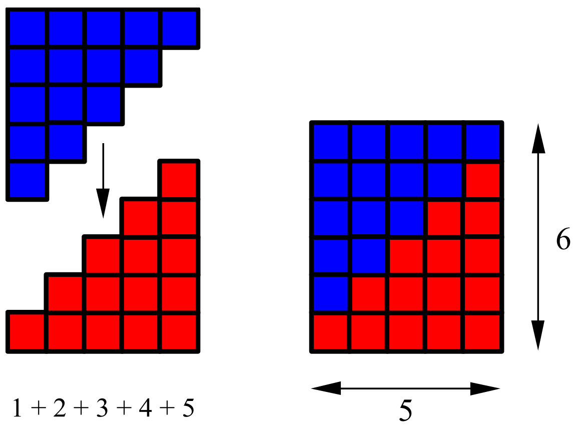
3 * 4 = 4 * 3

* Besonders auch im Zusammenhang mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion werden oft paradigmatische Begründungen herangezogen („kleiner Gauss“ ...).

*Problem*: Was ist

1+2+3+4+5
oder 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10
oder 1+2+3+ ... +157

Graphische Deutung:




5 * 6
ist das Doppelte

Also: $$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}$$

und allgemein: $$1+2+\ \dots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

* An dieser Stelle sei auch noch einmal an das in Abschnitt 1.4 (Sachanalyse) behandelte Beispiel der binomischen Formel erinnert.

Eigenschaften paradigmatischer Beweise bzw. Begründungen:

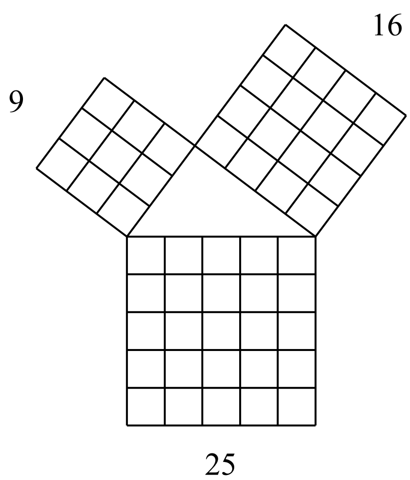
- Paradigmatische Beweise sind zwar zunächst *beispielgebunden*, aber nicht in dem Sinne, daß sie nur eine simple empirische Bestätigung des zu beweisenden Sachverhalts darstellen.

- Die *Übertragbarkeit* des Beispiels auf andere Beispiele (Konstellationen, Konfigurationen, Situationen, ...) muß deutlich erkennbar („augenfällig“) sein.
- Durch die paradigmatische Begründung sollte eine *allgemeine Begründungsstrategie* für den zu beweisenden Sachverhalt vermittelt werden.
- Meist sind paradigmatische Begründungen mit irgendeiner Form der *Veranschaulichung*, der geometrischen Deutung des Sachverhalts, der Schematisierung durch Diagramme, Graphen oder Tabellen verbunden.

Paradigmatische Begründungen sind aber nicht zu verwechseln mit

- unzulänglicher Begründung („nur für Kinder“, Kindertümelei)
- nur experimenteller Verifikation
- nur anschaulicher Begründung
- unvollständiger Induktion anhand einiger Sonderfälle
- nur plausibler Begründung

Begründungsmuster und Argumente, die sich im Rahmen der weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts als fragwürdig, falsch oder ungültig herausstellen werden, sind zu vermeiden. Die in der folgenden Graphik angegebene rein abzählende Begründung für den Satz des Pythagoras kann nicht als paradigmatisch bezeichnet werden, da sie an die konkreten Zahlenwerte gebunden ist. Eine Übertragbarkeit der Begründung, z.B. auf andere ganzzahlige oder gar auf nicht-ganzzahlige Seitenlängen ist nicht erkennbar.




$$25 = 9 + 16$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Auch die in Abschnitt 1.5 zitierte Begründung für die Fläche des Kreisausschnitts kann nicht als paradigmatisch angesehen werden.

# 4.4 Das Permanenzprinzip (nach Hermann Hankel, 1839–1873) Permanenzreihen

> Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.
> G. H. Hardy, englischer Mathematiker 1877–1947

Das Permanenzprinzip von Hankel kommt in sehr vielen konkreten, inhaltlichen Zusammenhängen zur Anwendung; es ist eine wichtige globale Leitlinie für die Formulierung von Begriffen und Definitionen sowie für das Begründen von mathematischen Regeln und Sätzen.

Die Ausgangssituation ist in der Regel von der folgenden Art: In einem bestimmten Gegenstandsbereich, etwa dem der natürlichen Zahlen, entwickelten sich im Laufe der Zeit gewisse Begriffe, Verfahren und Bezeichnungsweisen, etwa der des Potenzierens:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Oft sind diese Begriffe mit „schönen“ mathematischen Sätzen verbunden. Ein besonders schöner Satz ist das *Potenzgesetz*

$$a^k \cdot a^n = a^{(k+n)} \qquad \text{(POT)}$$

Die Begründung für dieses Gesetz liegt auf der Hand:

$$\begin{aligned} a^k \cdot a^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{k \text{ Faktoren}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}) \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{k \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \qquad \dots \qquad \cdot a}_{k+n \text{ Faktoren}} \\ &= a^{(k+n)} \end{aligned}$$

„Schöne“ Gesetze sind oft wieder mit besonderen Anwendungen oder Methoden verbunden; das Potenzieren und die Potenzgesetze etwa mit dem Vorgang des Logarithmierens, mit den Logarithmengesetzen, mit dem Rechenstab, mit logarithmischem Papier, u.s.w. Wichtige Begriffe sind wohl gerade auch deswegen zu wichtigen Begriffen geworden, weil mit ihnen schöne und nützliche Ergebnisse zu formulieren sind.

Im Laufe der Zeit erweitert sich das mathematische Wissen. Neue Gegenstands- und Objektbereiche werden entdeckt (oder unter großen Mühen entwickelt). Man denke etwa an die Entwicklung der Brüche, der negativen oder der komplexen Zahlen. Dies waren mühevolle Prozesse, die erst im Verlaufe von Jahrhunderten zu den heute gebräuchlichen Fassungen dieser Begriffe geführt haben.

Wie auch immer – irgendwann einmal ist dann der neue Gegenstandsbereich, die neue „Grundmenge“ da, und sehr bald versucht man dann auch, schon bekannte Operationen auf die Elemente der neuen Grundmenge anzuwenden. Das obige Potenzgesetz besitzt für die Menge natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5,\dots\}$ eine natürliche Interpretation. Ein hypothetisches Unterrichtsgespräch zur Unterrichtseinheit „Potenzen“ könnte sich vielleicht folgendermaßen entwickeln:

*Lehrer*: Aus der Flächenlehre wißt ihr, daß ein Quadrat mit der Seitenlänge $5\ m$ den Flächeninhalt $5m \cdot 5m$ hat, also $25\ qm$. Die Zahl 25 ergibt sich aus $5 \cdot 5$; an Stelle von $qm$ wird auch $m^2$ geschrieben.

Welchen Rauminhalt hat ein Würfel der Seitenlänge $5\ m$ ?

*Schüler*: 125 Kubikmeter

*Lehrer*: Wie kommst Du zu der 125?

*Schüler*: Dreimal die Fünf.

*Lehrer* (hat es aufgegeben, von den Schülern einen vollständigen Antwortsatz zu verlangen): Was ist drei mal fünf?

*Schüler*: $5 \cdot 5 \cdot 5$ habe ich gemeint.

*Lehrer*: So ist es richtig. Und für Kubikmeter schreibt man auch $m^3$, denn *ein* Kubikmeter ist der Rauminhalt von einem Würfel mit der Seitenlänge $1\ m$ und sein Rauminhalt berechnet sich aus $1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m$, also $1\ m \cdot m \cdot m$ und dafür schreibt man auch $1\ m^3$.

Man verwendet die „hoch“-Schreibweise auch für Zahlen, denn das ist praktisch; also z.B.:

$$5^2 = 5 \cdot 5$$

und $$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \, .$$

Was ist wohl $5^4$ ?

*Schüler*: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

*Lehrer*: Und wie geht es weiter?

Er bereitet eine Tabelle an der Tafel vor, die von den Schülern ausgefüllt wird, etwa mit dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 5 \cdot 5 \\ 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^4 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^5 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5^6 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &\ldots \end{aligned}$$

*Lehrer* (zeigt auf die $5^6$): Schaut her, die Sechs wird rechts oberhalb von der Fünf geschrieben – und etwas kleiner. Man nennt die Sechs auch die *Hochzahl* und die Zahl 5 die *Grundzahl* oder auch die *Basis*.

Was gibt die Hochzahl also an?

*Schüler*: Wie oft man die Basis mit sich selbst multiplizieren muß.

*Lehrer*: Ich sehe, Ihr habt es verstanden. Wir wollen dazu man einen Merksatz aufschreiben. Aber an Stelle von 5 schreiben wir dabei $a$ und an Stelle von 6 schreiben wir $n$.

> *Merke:*
>
> $a^n$ ist ein Produkt, bei dem der Faktor $a$ $n$-mal mit sich selbst multipliziert wird.

*Lehrer*: Was ist also $5^1$ ?

*Schüler* (etwas herablassend): 5

*Lehrer*: Warum?

*Schüler*: Die 5 kommt ja nur einmal als Faktor vor. Es steht also nur die 5 da. Und das ist 5.

*Lehrer*: Und was ist $5^0$ ?

*Schüler*: Null, denn da steht gar kein Faktor da und wenn nichts da steht, ist es Null.

*Lehrer*: Du hast gar nicht so Unrecht. Aber bei $5^0$ ist das mit den Faktoren anders. Da haben die Mathematiker einfach festgelegt, daß es 1 sein soll; also merkt Euch für die Zukunft (doppelt unterstrichen):

$$5^0 = 1 \quad !!!$$

Warum die Mathematiker das so festgelegt haben, lernt Ihr später. Definieren kann man ja alles. Bei „hoch Null“ haben sie es eben so gemacht.

Manche Lehrer vermitteln so den Eindruck, daß in der Mathematik vieles künstlich oder willkürlich ist; besonders, was die Begriffe und Definitionen betrifft. Daß jede Definition in der (Elementar-) Mathematik einen ganz bestimmten Sinn hat und weit davon ist, willkürlich zu sein, scheint nicht zum mathematischen Allgemeinwissen zu gehören. In einer Vorlesung sagte ich einmal an ähnlicher Stelle vor Studenten (etwas pauschal), daß jede Definition in der Mathematik sinnvoll sei. Ich erntete großes Gelächter. Daraufhin setzte ich einen Preis aus: Für jede nicht sinnvolle Definition, die mir die Hörer vorlegten, würde ich 10 DM zahlen. Ich habe bisher noch keine einzige Mark zu bezahlen brauchen.

Zurück zum Permanenzprinzip von Hankel: Die *Leitidee* für die Definition von $a^0$ ist der Wunsch, dem Potenzgesetz, dessen Gültigkeit für positive ganze Zahlen leicht zu begründen ist (vgl. POT weiter oben), weiterhin zur Gültigkeit zu verhelfen. Denn dieses Gesetz wird sehr oft angewandt und es wäre außerordentlich ungeschickt, wenn man vor jeder Anwendung erst einmal akribisch überprüfen müßte, ob eine der Hochzahlen gleich Null ist oder nicht. Da man also die Freiheit hat, einen Wert für $a^0$ festzulegen, tut man das so, daß nach Möglichkeit das Potenzgesetz auch für die Hochzahl Null gilt. Soll dies erfüllt sein, so muß z.B. folgendes gelten:

$5^2 \cdot 5^0 = 5^{2+0} = 5^2$ bzw. allgemeiner

$a^2 \cdot a^0 = a^{2+0} = a^2$ also

$a^2 \cdot a^0 = a^2$

Dies ist aber offensichtlich nur möglich, wenn $a^0$ als 1 festgesetzt wird.

*Aufgabe*: Begründen Sie mit Hilfe des Permanenzprinzips die üblichen Definitionen für $a^{-1}$, $a^{-2}$, ... , $a^{-n}$.

**Permanenzreihen** sind eine spezifische Form des Permanenzprinzips. In Abschnitt 1.5 wurde eine typische Begründung für die Definition von $a^0$ anhand eines Permanenzreihenarguments skizziert.

*Aufgabe*: Begründen Sie die Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ mit Hilfe des Permanenzprinzips und auf der Basis einer Permanenzreihen-Argumentation.

*Ergänzender Literaturhinweis*: Fachdidaktische Prinzipien als Grundlage einer Design Science – erläutert am Hankelschen Permanenzprinzip; Mathematikdidaktik als design science, Festschrift für Erich Christian Wittmann, Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 1999

## 4.5 Problemhaltigkeit

Der Unterricht sollte stets *problemhaltig* gestaltet werden. Selbst in reinen Übungsstunden können gut ausgewählte Übungsaufgaben „produktiv“ wirken. Bei der Einführung bestimmter Begriffe (z.B. des Begriffs „Koordinatensystem“) sollte deutlich gemacht werden, daß die Begriffe nützliche Werkzeuge sind, die mit bestimmten Methoden des Problemlösens im engen Zusammenhang stehen. (*Literaturhinweis*: H. Winter „Üben“, mathematik lehren, 1984).

## 4.6 Vernetztheit / Beziehungshaltigkeit

Das mathematische wie auch das außermathematische Wissen sollte in vielfältig vernetzter Form aufgebaut werden. Dies vermittelt *kognitive Stabilität*. Hierzu ein Zitat von Marvin Minsky, in „Society of Mind“:

> As scientists we like to make our theories as delicate and fragile as possible. We like to arrange things so that if the slightest thing goes wrong, everything will collapse at once!
>
> Why do scientists use such shaky strategies? So that when anything goes wrong, they'll be the first to notice it. ...
>
> But it isn't good psychology. It's bad the way we let teachers shape our children's mathematics into slender, shaky tower chains instead of robust, cross-connected webs. A chain can break at any link, a tower can topple at the slightest shove. And that's what happens in a mathematics class to a child's mind whose attention turns just for a moment to watch a pretty cloud.

Einen besonders hohen Grad an Beziehungshaltigkeit weist das Thema “Algorithmen / algorithmisches Problemlösen” auf, wie in J. Ziegenbalg: Algorithmen - von Hammurapi bis Gödel, Spektrum Akademischer Verlag dargestellt (vgl. Kap. 1, Seite 17 ff). Zum Thema „Algorithmen im Zusammenhang mit Auszählungsverfahren nach (Parlaments-) Wahlen“ vergleiche man Chr. Stellfeldt: Sitzverteilung aus algorithmischer Sicht, Der Mathematikunterricht (MU), Heft 1, 2-7, Seelze, 2006

## 4.7 Authentizität

Ursprüngliche Phänomene sind an den Anfang und in den Vordergrund zu stellen, nicht blutleere künstliche Konstrukte.

- Authentizität der Begriffe und Werkzeuge:
  Ein Beispiel: Ursprüngliche Phänomene, die etwa zum Thema „senkrecht stehen“ gehören, sind das Lot, das Senkblei, das Falten von Papier (doppelt falten), Häuserwände, Tischbeine, Schranktüren, ... nicht aber das Geodreieck (dessen Nützlichkeit in späteren Phasen des Unterrichts hier nicht bestritten werden soll).
- Geographische Authentizität:

Wenn es zum Beispiel um das Thema „Steigung einer Straße“ geht, dann sollte es nicht eine Straße von A nach B sein, sondern (im Raum Karlsruhe) z.B. die Straße von Ettlingen nach Spessart oder von Malsch nach Freiolsheim.

- Historische Authentizität:

  Damit ist das Einbringen konkreter historischer Ereignisse und Dokumente (auch von Bilddokumenten) in den Unterricht gemeint. Historische Authentizität kann viel zur Motivation beitragen; es ist zugleich ein Element des fächerverbindenden Unterrichts. (Man vergleiche dazu auch die Ausführungen in Abschnitt „Geschichte der Mathematik und das genetische Prinzip“).

## 4.8 Variation der Veranschaulichung

Mathematische Sachverhalte sind in der Regel hochgradig allgemein. Dieser Umstand hängt eng mit der universellen Anwendbarkeit mathematischer Theorien zusammen. Es ist deshalb natürlich, daß sich mathematische Sachverhalte auch auf höchst unterschiedliche Weisen deuten und veranschaulichen lassen. Veranschaulichung bedeutet dabei nicht nur reine Visualisierung.

Von J. S. Bruner stammt die auch heute noch immer wieder zitierte Klassifikation verschiedener Repräsentationsstufen für mathematisches Wissen entsprechend der Kategorien

*enaktiv* (handlungsorientiert)

*ikonisch* (bildhaft)

*symbolisch* (also in der Form eines abstrakten, den Bedeutungsgehalt versinnbildlichenden Zeichens)

In der Literatur wird die Brunersche Klassifikation gelegentlich auch abkürzend als das EIS-Prinzip bezeichnet (verballhornt?)

Erläuterung am Beispiel des Begriffs der *Stetigkeit*:

enaktiv: stetige Funktionsgraphen oder Kurven lassen sich „in einem Zug“ mit dem Bleistift zeichnen bzw. mit dem Finger nachfahren

ikonisch: typische Bilder von stetigen Funktionen oder Kurven, darunter mindestens eines, das nicht zugleich auch differenzierbar ist (das also z.B. einen “Knick“ hat)

symbolisch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkte $a$, wenn für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{i=1,\ldots,\infty}(a_i) = a$ stets gilt: $\lim\limits_{i=1,\ldots,\infty}(f(a_i)) = f(a)$.

## 4.9 Sonstige fachdidaktische Prinzipien

Die obengenannten didaktischen Prinzipien erscheinen mir als besonders bedeutsam. Eine Fülle weiterer didaktischer Prinzipien, wie etwa das Prinzip von der Entzerrung der Schwierigkeiten oder das (mir eher als fragwürdig erscheinende) „Deep End“ - Prinzip finden sich in der fachdidaktischen Literatur. Einen guten Gesamtüberblick über diese Thematik gibt auch das Buch „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ von E. Wittmann.

# 5 Elemente der Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht

## 5.1 Geschichte der Mathematik – Zielsetzungen

*M. Kline (Mathematics in Western Culture):* The object of this book is to advance the thesis that mathematics has been a major force in Western civilization. ... It is even less widely known that mathematics has determined the direction and content of much philosophic thought, has destroyed and rebuilt religious doctrines, has supplied substance to economic and political theories, has fashioned major painting, musical, architectural, and literary styles, has fathered our logic, and has furnished the best answers we have to fundamental questions about the nature of man and his universe. ...

*B.L. van der Waerden (Erwachende Wissenschaft):* ... Wenn demnach unsere abendländische Kultur, im Guten wie im Bösen, von den exakten Wissenschaften her ihr eigenes Gepräge erhalten hat, so ist die Frage: Wie sind diese Wissenschaften entstanden? eine der aktuellsten und wichtigsten Fragen der Kulturgeschichte.

Man wird zugeben, dass die meisten Geschichtswerke diese Frage entweder gar nicht oder nur höchst unbefriedigend beantworten. In welchem Handbuch der griechischen Kulturgeschichte findet man etwa über THEAITETOS und EUDOXOS mehr als höchstens eine ganz kurze Notiz? Und doch gehören diese zwei Freunde PLATONS zu den grössten Mathematikern aller Zeiten. Oder, um ein anderes Beispiel zu nennen, wer ist sich bewusst, dass NEWTON, *historisch* gesehen, der wichtigste Mann des 17. Jahrhunderts ist? ...

Man darf die Geschichte der Mathematik nicht von der allgemeinen Kulturgeschichte trennen. Die Mathematik ist ein Bestandteil des geistigen Lebens, der auf das engste verknüpft ist, nicht nur mit Astronomie und Mechanik, sondern auch mit Architektur und Technik, mit Philosophie und sogar mit Religion (PYTHAGORAS!).

*H. Winter (Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht):* ... Die Orientierung an der Geschichte entspringt der doppelten Überzeugung, daß man etwas Mathematisches umso besser verstehen kann, je besser man seine Entdeckungsgeschichte kennt und – noch weitaus wichtiger – daß Bildungsbemühungen in der Schule umso weniger der Gefahr naiver und unmündiger Praxisverhaftung erliegen, je mehr sie mit der Geschichte des menschlichen Geistes in Verbindung stehen. ...

*H. Wußing (Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik):* ... Über Produktion, Bildung, Erziehung und Ideologiebildung beeinflussen heutzutage Mathematik und Naturwissenschaften in hohem Maße und in vielfältiger Weise die gesellschaftliche Entwicklung von Staaten und Staatengemeinschaften; in diesem Sinne erhalten die Wissenschaften überhaupt – nicht nur Mathematik und Naturwissenschaften – eine echt geschichtsbildende welthistorische Funktion. ... Die Zukunft ist sozusagen die Extrapolation vergangener und gegenwärtiger Entwicklungsgänge. Dieser Aspekt verbindet, wie bei jeder historischen Wissenschaft, Vergangenheit mit Zukunft und macht Geschichte zu einer gesellschaftlich notwendigen Wissenschaft: ...

Seit altersher ist unter Mathematikern ein beträchtliches Maß an Traditionsbewußtsein anzutreffen, ein ausgeprägtes Gespür dafür, den Vorgängern Dank zu schulden und verpflichtet zu sein, deren Werk weiterzuführen. ... Gerade bedeutende Mathematiker haben auch die Kontinuität des inneren Zusammenhanges der Entwicklung der Mathematik klar gesehen und bewußt betont, indem sie in höchst fruchtbarer Weise historische Betrachtungen mit der Darlegung ihrer eigenen Ergebnisse verbanden. ... Man hat in diesem Sinne sogar gesagt, daß keine wissenschaftliche Disziplin mehr verlieren würde als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde.

Aspekte der Geschichte der Mathematik (Wußing):

– Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Produktivkräfte
– Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Produktionsverhältnisse
– Problemgeschichte, Begriffsgeschichte, innerwissenschaftliche Zusammenhänge
– Beziehungen zur Entwicklung der Naturwissenschaften
– Wechselbeziehungen zur Entwicklung der Philosophien und Ideologien
– Geschichte und Einfluß wissenschaftlicher Institutionen und Organisationsformen
– Biographisches / – Bibliographisches

## 5.2 Geschichte der Mathematik und das „Genetische Prinzip“

nach *M. Wagenschein* in „Verstehen lehren“; Beltz Verlag, Weinheim 1968

Zum Problem des genetischen Lehrens: Einige Erfahrungen und Überlegungen möchte ich hier vortragen zugunsten einer Lehrweise und einer Art des Lehrgangs, die man „Genetisch“ nennen kann. Vielleicht sollte ich aber gleich deutlicher sagen: genetisch–sokratisch–exemplarisch. Obwohl ich mich dreier Worte bedienen muß, um vorläufig zu kennzeichnen, was ich meine, so glaube ich doch, daß es etwas in sich Einheitliches ist. Wenn man nach einer einzigen Bezeichnung sucht, ist es mit dem Wort *Genetisch* am ehesten getroffen. Es ist in dieser Dreiheit führend:

Genetisch:

genetisch——sokratisch——exemplarisch

Es gehört zur Grundbestimmung des Pädagogischen überhaupt. Pädagogik hat mit dem Werdenden zu tun: mit dem werdenden Menschen und – im Unterricht, als Didaktik – mit dem Werden des Wissens in ihm. Die sokratische Methode gehört dazu, weil das Werden, das Erwachen geistiger Kräfte, sich am wirksamsten im Gespräch vollzieht. Das exemplarische Prinzip gehört dazu, weil ein genetisch-sokratisches Verfahren sich auf exemplarische Themenkreise beschränken muß und auch kann. Denn es ist – ich sage nicht „zeitraubend“ sondern – „muße-fordernd“ und deshalb von hohem Wirkungsgrad. Und umgekehrt: ein streng exemplarisches Verfahren muß „Genetisch“ sein. Denn die besondere Art „Gründlichkeit“, die zu ihm gehört, ist erst mit dem Attribut des „Genetischen“ ganz erreicht. ...

*E. Wittmann* in „Grundfragen des Mathematikunterrichts“; Vieweg Verlag, Braunschweig 1976,
Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt *genetisch*, wenn sie an den *natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik* ausgerichtet ist. Entsprechend der Tatsache, daß sich Theorien in den exakten Wissenschaften bei der Untersuchung von Problemen durch Verfeinerung primitiver Vorformen entwickelten und weiter entwickeln, kann man eine genetische Darstellung durch folgende Merkmale charakterisieren:

* Anschluß an das Vorverständnis der Adressaten,
* Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
* Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
* Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
* durchgehende Motivation und Kontinuität,
* während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung.

*A. I. Wittenberg* in „Bildung und Mathematik"; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1963:

... Dieser Grundsatz diktiert einen *genetischen* Unterricht; einen Unterricht, der darin besteht, die Schüler gleichsam die Mathematik von Anfang an wieder entdecken zu lassen. Das bedeutet nicht unbedingt, daß dieser Unterricht der historischen Entwicklung, mit ihren Zufällen und Umwegen, folgen muß. Aber in sachlicher Hinsicht muß er gleichsam ein Neuentstehen und Neudurchdenken der Mathematik in jeder Klasse sein, ein frisches und unmittelbares Wiedererleben der Mathematik durch die Schüler. ...

*H. Schwartze / A. Fricke:* Grundriß des mathematischen Unterrichts; Verlag Ferdinand Kamp, Bochum, 1967 (S. 165 ff):

Das *genetische Unterrichtsprinzip* besagt in kurzen Worten umschrieben, daß das Lernen ein *Wiederentdecken* sein soll. ... Einen gewissen Anhalt zum Verständnis des Begriffes bietet der Name „genetisch"; seinem griechischen Ursprung entsprechend bedeutet er „entstehungs"- bzw. „entwicklungsgemäß". Hierdurch wird einmal auf die Geschichte des betreffenden Lehrgegenstandes, zum anderen das „Werden einer Einsicht" beim Schüler hingewiesen, also auf einen historischen und einen psychologischen Prozess, die miteinander zur Deckung kommen sollen. Anders ausgedrückt, soll sich die Lehrmethode der Forschungsmethode annähern – selbstverständlich in großen Zügen. ...

## 5.3 Das biogenetische Grundgesetz

Der Mensch ist das Ergebnis eines langen Evolutionsprozesses, eines Wechselspiels zwischen Mutation, Kreuzung, Selektion und einer gehörigen Portion Zufall. Jede „Spezies" hat auf diese Weise eine lange Stammesgeschichte durchlebt; man bezeichnet diesen historischen Prozeß auch als Phylogenese. Angeregt durch empirischen Studien an Embryos in verschiedenen Entwicklungsstadien formulierte der Biologe und Philosoph E. Haeckel (1834–1919) im Jahre 1866 das *biogenetische Grundgesetz,* wonach die Individualentwicklung eines Lebewesens (auch als *Ontogenese* bezeichnet) eine verkürzte Rekapitulation der Stammesgeschichte (der *Phylogenese*) darstellt – in prägnanter Formulierung wird dieses Gesetz auch folgendermaßen ausgedrückt: „Die Ontogenese folgt der Phylogenese".

Man kann nun – zunächst rein hypothetisch – das biogenetische Grundgesetz von E. Haeckel auf den Vorgang des menschlichen Lernens übertragen (begrifflich sei dies kurz als das „wissensgenetische Grundgesetz" bezeichnet).

Der Phylogenese entspricht dabei der historische Prozeß des menschlichen Wissenserwerbs, wie er durch historische Dokumente und Studien belegt ist. Diese Phylogenese umspannt einen Zeitraum von mehreren Jahrtausenden.

Der Ontogenese entspricht der individuelle Wissenserwerb durch den heranwachsenden Menschen im Zeitraum von einigen Jahren oder Jahrzehnten. Zweifellos gibt es auch hierbei Parallelen zwischen Phylogenese und Ontogenese: ganz am Anfang steht z.B. jeweils der Erwerb des Zahlbegriffs und arithmetischer Fähigkeiten (Zählen und Rechnen). Auch auf dem Gebiet der Geometrie steht am Anfang das phänomenologisch unmittelbar Einleuchtende, also z.B. der Wissenserwerb über archetypische Grundformen (Kreis, Quadrat, Kugel, Würfel, ...). Und ganz allgemein ist es zweifellos richtig, daß sowohl in der historischen wie auch in der individuellen Entwicklung der Wissenserwerb vom Elementaren zum Komplexen und vom Anschaulichen zum Abstrakten geht.

Ein so formuliertes wissensgenetisches Grundgesetzes besitzt also eine gewisse Plausibilität. Es kann durchaus als Orientierung zur Konstruktion von Lernsequenzen und Curricula dienen. Dies muß jedoch nicht heißen, daß jede noch so minutiöse historische Detailentwicklung, daß jeder Irrweg und jede Sackgasse in die Curricula „hineinkonstruiert" werden müsse. Dies wäre auch schon aus zeitlichen Gründen völlig unmöglich (aber nicht nur deswegen).

## 5.4 Einige ausgewählte im Zusammenhang mit der kulturhistorischen Entwicklung der Mathematik bedeutsame Bilddokumente

Zu einer Vorgehensweise im Mathematikunterricht, die bewußt auch kulturhistorischen Aspekten der Mathematik Rechnung trägt, gehört auch, an geeigneter Stelle, das Einbringen von mathematikgeschichtlich bedeutsamen Bilddokumenten in den Unterricht. Da sie sehr verstreut vorkommen (Kataloge von Galerien und Museen, eigene Photoaufnahmen, Lexika, Kunstbücher, Schulbücher, Postkarten, Poster, Tagungsbände, ...) sollte der Unterrichtende stets ein waches Auge auf sporadisch auftretende Bilddokumente haben. Eine reichhaltige Quelle für mathematikgeschichtlich interessante Abbildungen ist (neben der allgemeinen mathematikgeschichtlichen Literatur) die *Kleine Enzyklopädie Mathematik; Leipzig 1977, Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch (komprimierte Ausgabe: Mathematik Ratgeber; Harri Deutsch)*

Im folgenden sind, i.w. um deutlich zu machen, was damit gemeint ist, einige wenige ausgewählte Bilddokumente wiedergegeben.

Dokumente aus dem antiken Ägypten


Karnak Tempel in Luxor mit ägyptischen Zahlzeichen


Ausschnitt aus dem Papyrus Rhind: Aufgaben zur Dreiecksberechnung


Der Stein von Rosetta (British Museum London)

1. Teil: altägyptische Hieroglyphen
2. Teil: demotische Schrift (Schrift in Ägypten ab etwa 643 v.Chr.)
3. Teil: Griechische Schrift (Kapitalschrift)

Entziffert von Jean-Francois Champollion (1790–1832)

Dokumente aus dem Zweistromland (Sumerer, Babylonier)


Auflistung verschiedener Mengen von Gerstenschrot und Malz
Uruk ca. 3400–3000 v. Chr.

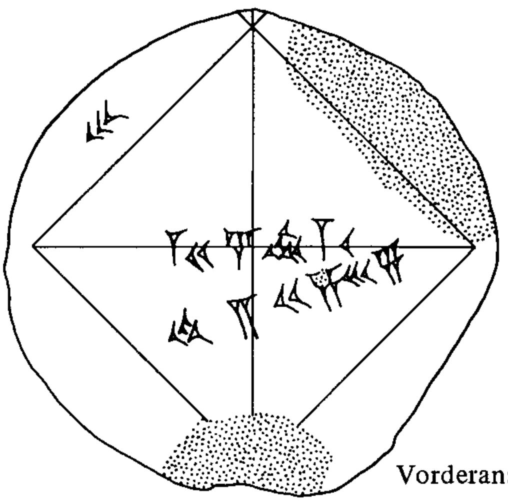

Sumerische Tontafel mit Zahlzeichen
Anfang 3. Jahrtausend v. Chr.
Mittlere Spalte (von unten nach oben): 1, 2, 3, 4, 5, (6), 7, 8, 9


Tontafel mit Zahlenreihen
Nippur, ca. 3000 v. Chr.

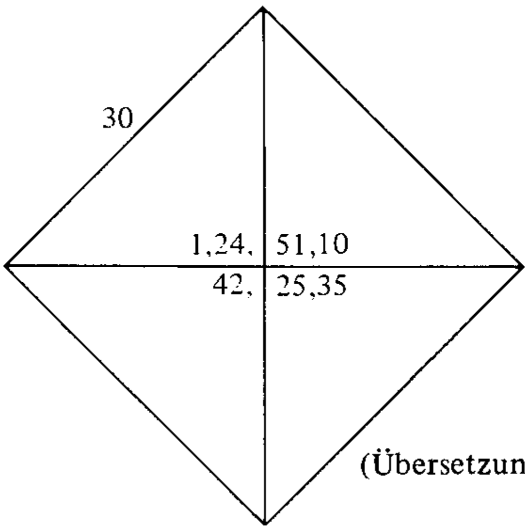

Liste von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seiten
altbabylonische Keilschrift


Keilschrift aus der Zeit Hammurapis zur Berechnung von $\sqrt{2}$

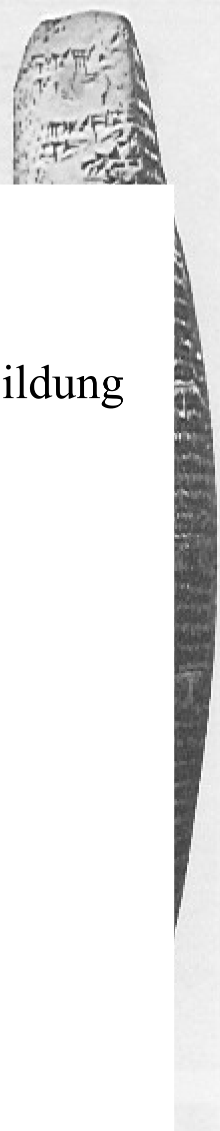
Übertragung:



Vorderansicht




(Übersetzung)



Bitte wenden Sie sich
wegen der ausgeblendeten Abbildung
ggf. an den Autor

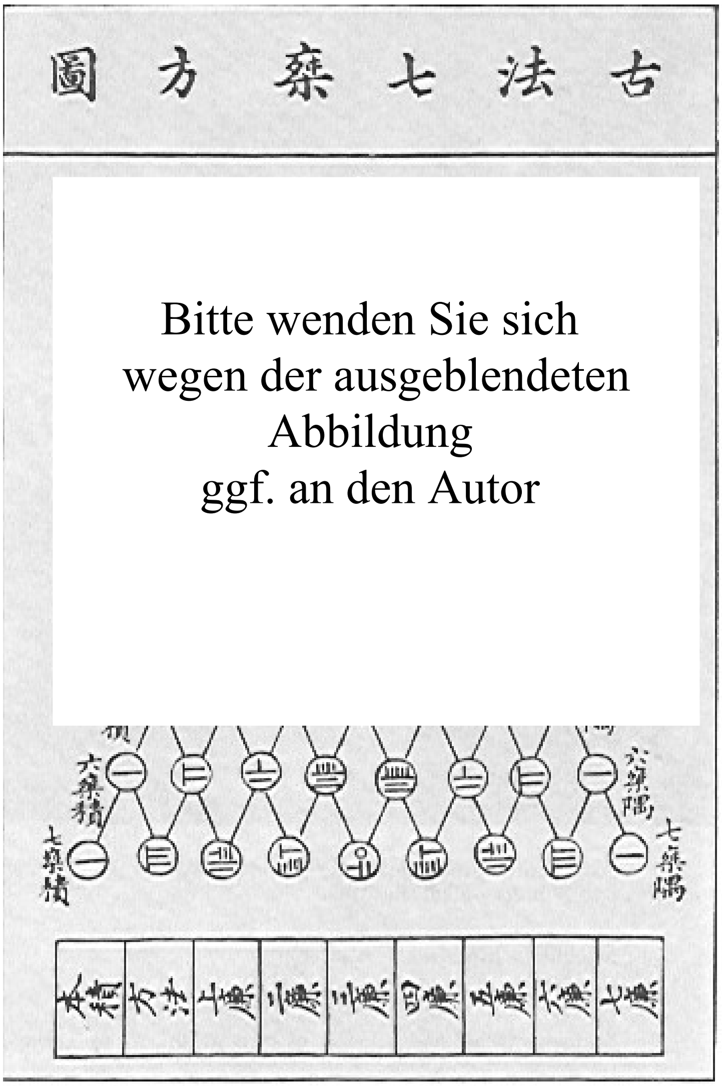
Babylonische

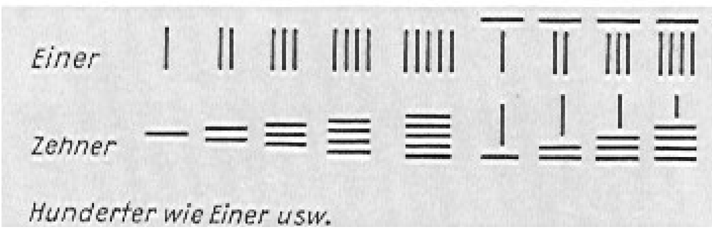
Kreisberechnung

## Chinesische Mathematik

Aus: Zhu Shijie (Born: about 1260 in Yan-shan, near Peking, China – vgl. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie.html )

Sein Buch *Siyuan yujian* (True reflections of the four unknowns), AD 1003, enthält die folgende bei uns unter dem Namen „Pascalsches Dreieck“ bekannte Figur:




Zeitgenosse / Vorläufer: Yang Hui (Born: about 1238 in Qiantang (now Hangzhou), Chekiang province, China Died: about 1298 in China) vgl.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html

Yang Hui AD 1261 had described a table of binomial coefficients up to the sixth power (see: A Jean-Claude Martzloff: A History of Chinese Mathematics, p. 230 ff).

# Spätmittelalter und Renaissance

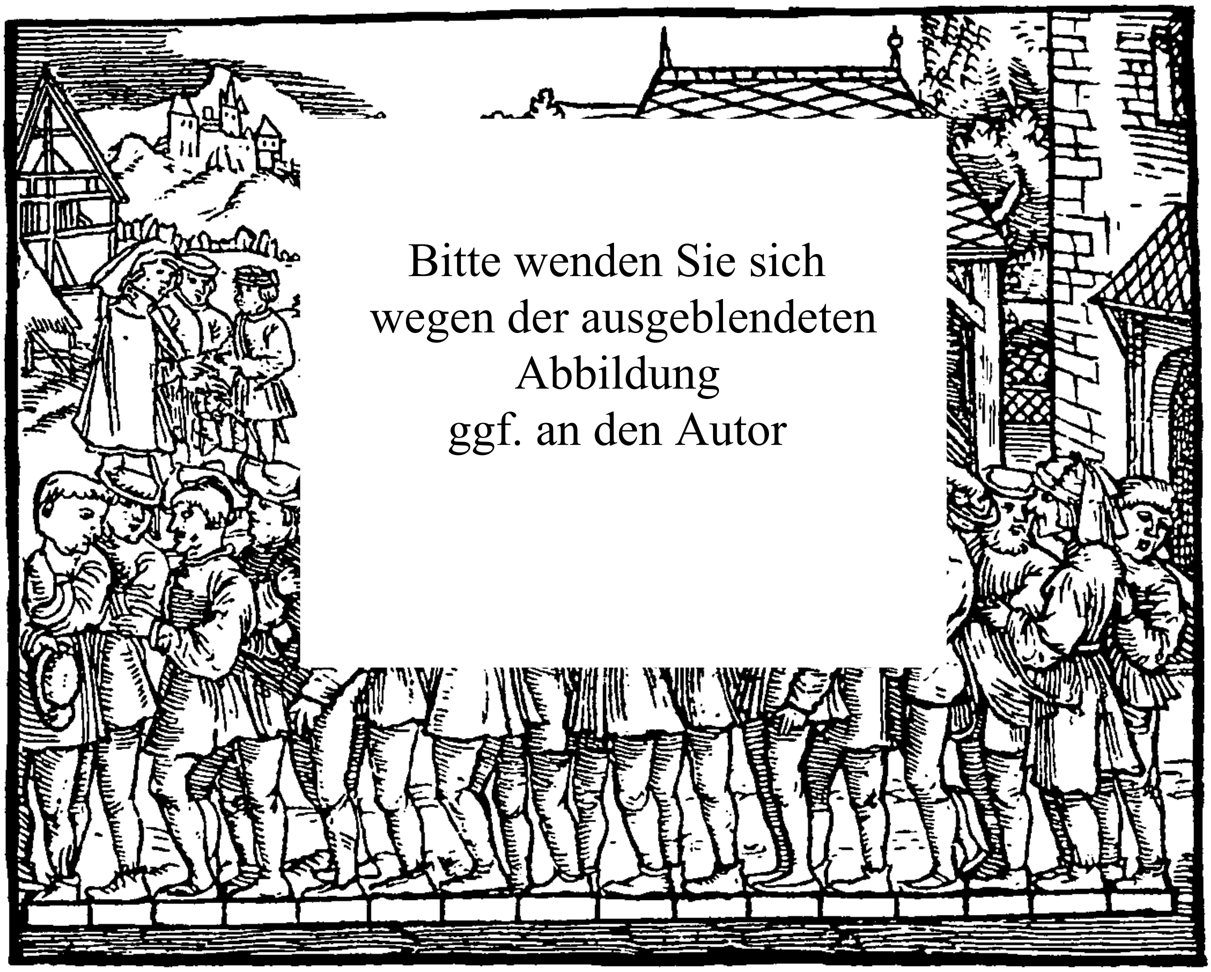
Abschluß eines Geschäfts am Rechentisch

Das folgende Bild von Gregor Reisch aus dem Jahre 1504 symbolisiert die Probleme beim Übergang vom Abakus-Rechnen zum Ziffernrechnen.

Ermittlung des Inhalts von Fässern (vgl. „Keplersche Faßregel“)

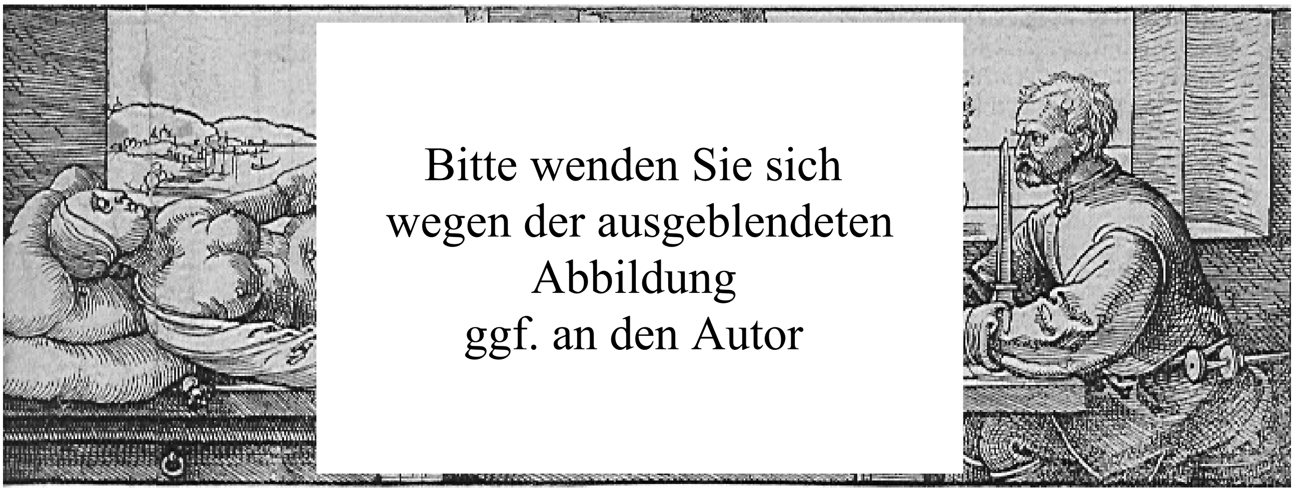
Visierbüchlein von Johann Frey, 1531


Die folgende Abbildung von Jacob Köbel aus dem Jahre 1616 stellt die Normierung der Längeneinheit der „Rute“ durch Aneinandersetzen von 16 Füßen dar.



Leonardo da Vinci (1452–1519), Maler, Mathematiker, Universalgelehrter beschäftigte sich u.a. auch intensiv mit der menschlichen Anatomie. In der Abbildung „Kanon menschlicher Proportionen nach Vitruv“ (um 1490) werden die menschlichen Proportionen mit archetypischen geometrischen Objekten (Kreis, Quadrat) in Verbindung gebracht.

In der Abbildung „Der Zeichner des liegenden Weibes“ aus dem Jahre 1525 stellt Albrecht Dürer (1471–1528) das Verfahren der Zentralprojektion dar.




# 6 Visuelle Aspekte der Mathematik und ausgewählte Abbildungen zum Thema „Sinnes- und Wahrnehmensschulung“

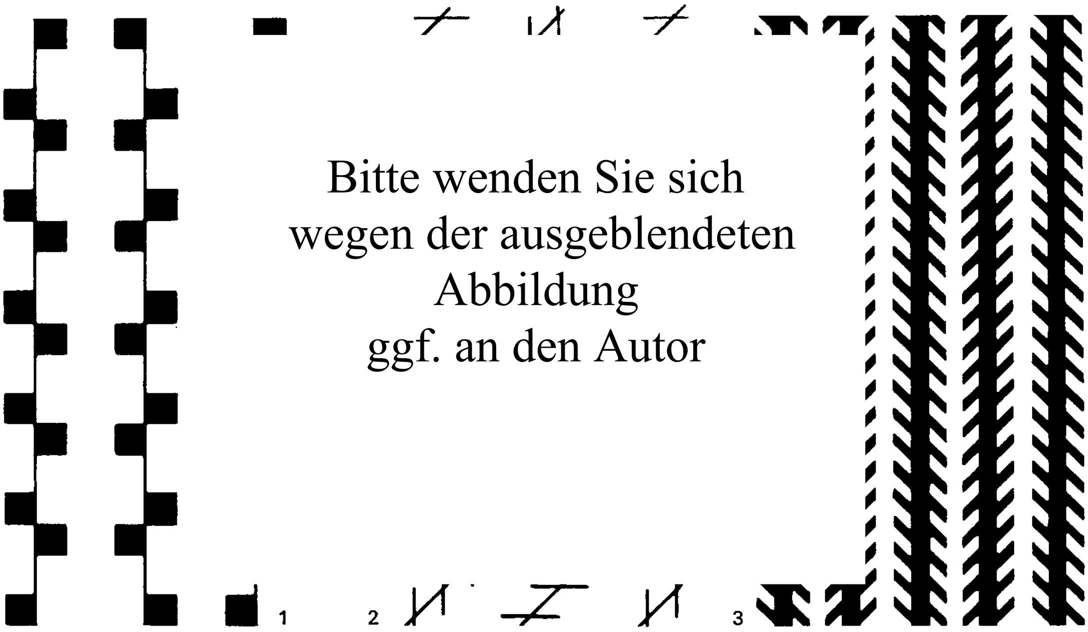
Dem Schulfach Mathematik kommt grundsätzlich eine aufklärerische Aufgabe zu. Dazu gehört traditionell die Schulung des Denkens, aber auch die Sinnes- und Wahrnehmensschulung. In der letzten Zeit gewinnt gerade die letztere Aufgabe im Zusammenhang mit der Überflutung der Sinne durch Umwelteinflüsse und besonders durch die Medien eine immer größere Bedeutung. Künstliche Video- und „multi-media“ Welten drängen sich zunehmend ins Bewußtsein der Kinder. Apologeten „virtueller“ Welten spielen sich in den Vordergrund. Dabei droht Sinn für die reale Welt und allgemein für die Realitäten des Lebens verloren zu gehen. So wird z.B. das „Geld“ immer mehr von seiner Bindung an Arbeit, an Gelderwerb, an konkrete Warenwerte („Tauschfunktion“ des Geldes) entkoppelt; Geld manifestiert sich vorwiegend in der Form sich in irrwitzigen Zickzackbewegungen um den Globus jagender Zahlenkolonnen, wo ein kleiner Ausschlag nach oben oder nach unten über das Schicksal von ganzen Firmen oder Nationen „Ausschlag“ geben kann.

Wie in jeder Gesellschaft, so gibt es auch in der unseren Kräfte, die von der Verschleierung, von der Täuschung, vom Vorspiegeln falscher Tatsachen leben. Die alles durchdringende und durchsetzende Werbung (besonders in der Form der Fernseh-Werbung) ist heute eine solche Kraft. Diese Art von Werbung hat kaum noch etwas mit sachlicher Information sondern eher mit Täuschung, Verschleierung und Desinformation zu tun. Die Werbung ist einer der „modernen“ Nachfolger der heute eher altbacken anmutenden Propaganda aus früheren Zeiten. Schon werden Pläne geschmiedet, Schulen und andere Bildungseinrichtungen in Zeiten knapper Finanzmittel über „Werbung“ zu finanzieren. Das Ganze soll dann der staunenden Öffentlichkeit noch mit schönen Schlagwörtern wie „edutainment“ und „infotainment“ garniert und schmackhaft gemacht werden. Würde dies gelingen, so könnten sich Schule, Bildung und Erziehung endgültig von ihrer auf „Aufklärung“ ausgerichteten Aufgabe verabschieden.

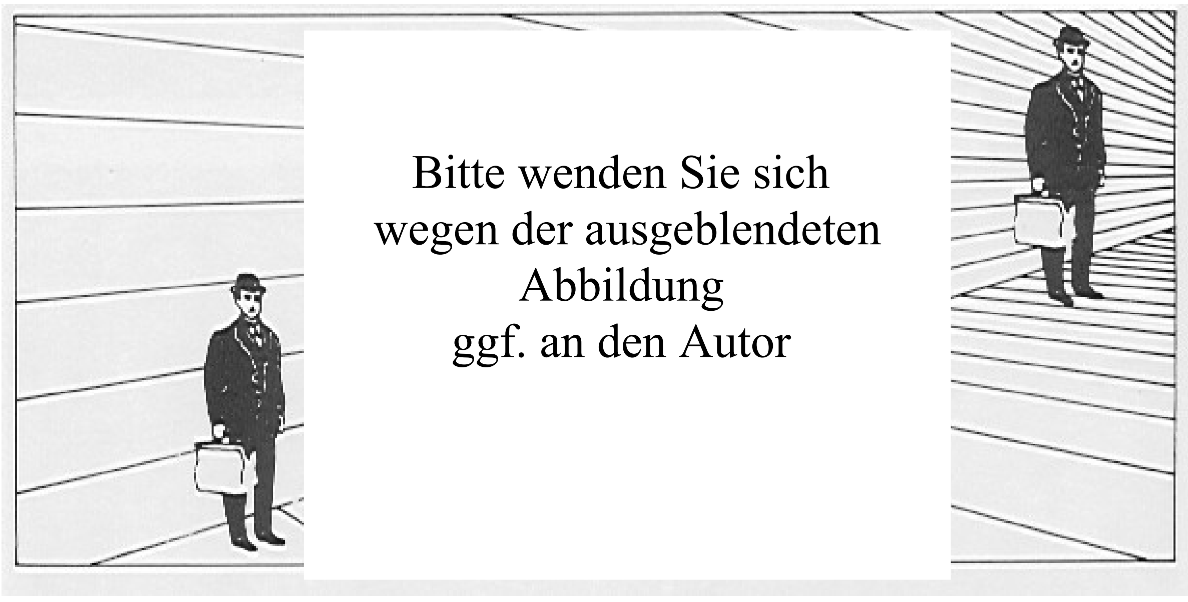
Um so wichtiger ist es, neben der Schulung des Denkens auch Sinnes- und Wahrnehmensschulung zu betreiben. Mathematisches Denken und mathematische Methoden können viel dazu beitragen, nicht nur Scheinargumente zu entlarven sondern auch Scheinwelten zu erkennen und von der realen Welt unterscheiden zu lernen.

Das Wissen darüber, daß manche Bilder und Graphiken (z.B. optische Täuschungen – aber nicht nur diese) geeignet sind, absichtlich oder unabsichtlich falsche Sachverhalte zu vermitteln (suggerieren) gehört sicher zur Allgemeinbildung.

- *Manche Bilder (optische Täuschungen) sind geeignet, einen falschen Sachverhalt zu vermitteln („suggerieren“).




* Manche Bilder verleiten zu fehlerhaften Interpretationen

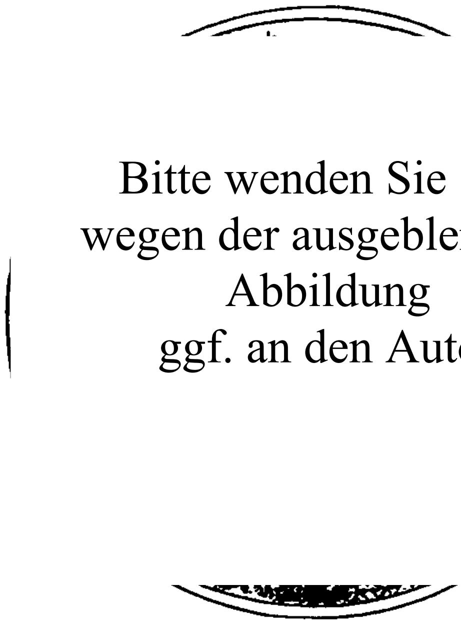


* In manchen Bildern sieht man Dinge, die gar nicht abgebildet („gezeichnet“) sind

*Laterale*[3] *Inhibition*[4]


* Manche Bilder enthalten mehr als man zunächst sieht.

*Vexierbilder*[5] (vgl. Literaturverzeichnis: E. Lanners, Illusionen): Das folgende Bild soll einen Blick von der Insel St. Helena darstellen. Zum Bild gehört das „Vexier“-Rätsel „Wo steckt Napoleons Geist?“

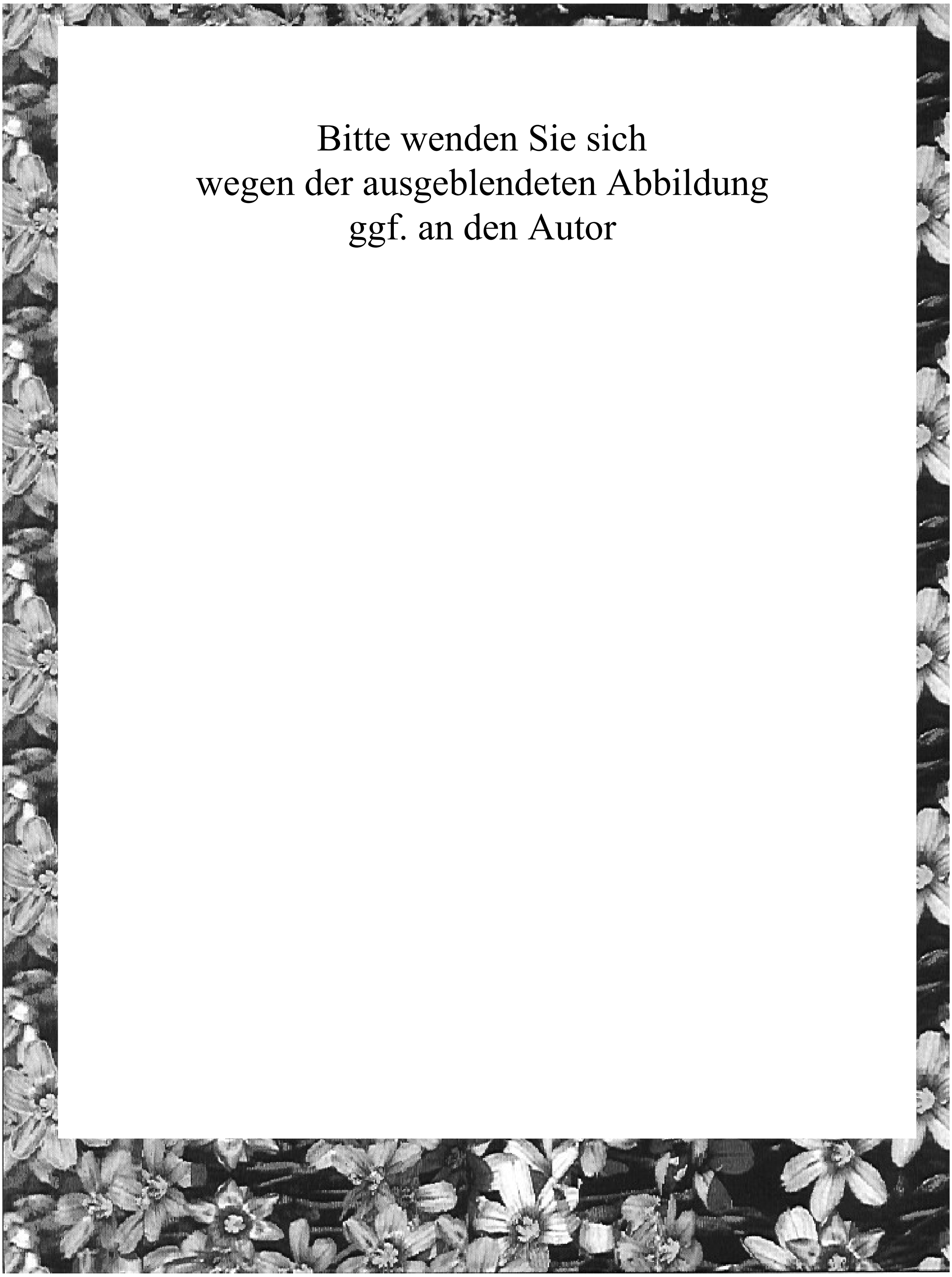



[3] lateral (lat.): seitlich, seitwärts

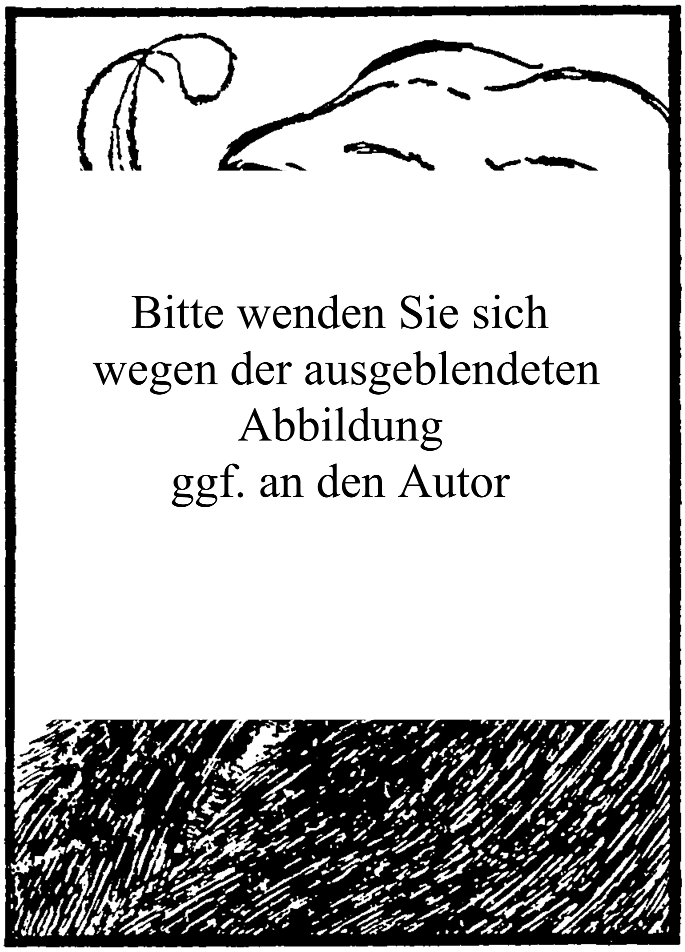
[4] Inhibition (lat.): Hemmung

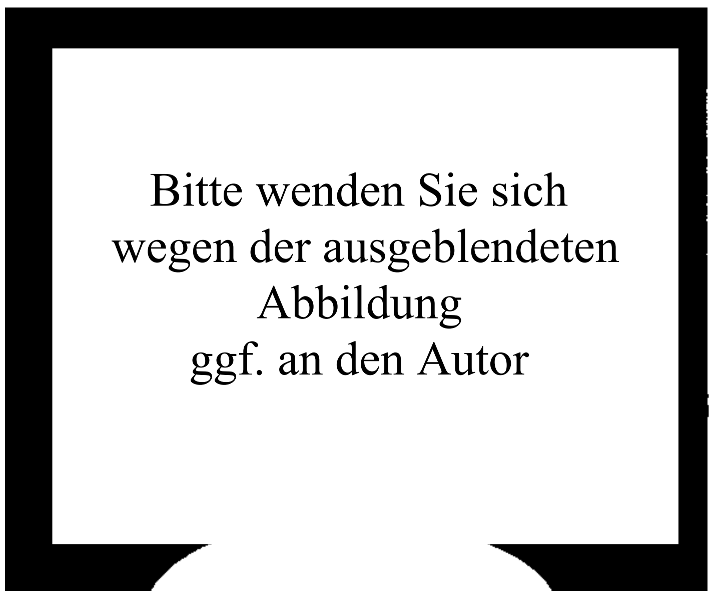
[5] Vexierbild: Suchbild, das eine nicht sofort erkennbare Figur enthält
vexieren (lat.): quälen, necken, irreführen

In den letzten Jahren wurde sogenannte *SIRD-Bilder* (SIRD: Single Image Random Dot Stereogram) ungewöhnlich populär (vgl. Literaturverzeichnis: N.E.Thing: Magic Eye). Die Analyse der geometrischen und wahrnehmungsphysiologischen Bedingungen, die den SIRDs zugrunde liegen, kann ein interessantes und anspruchsvolles fächerübergreifendes Projekt zwischen Mathematik und Physiologie ergeben.

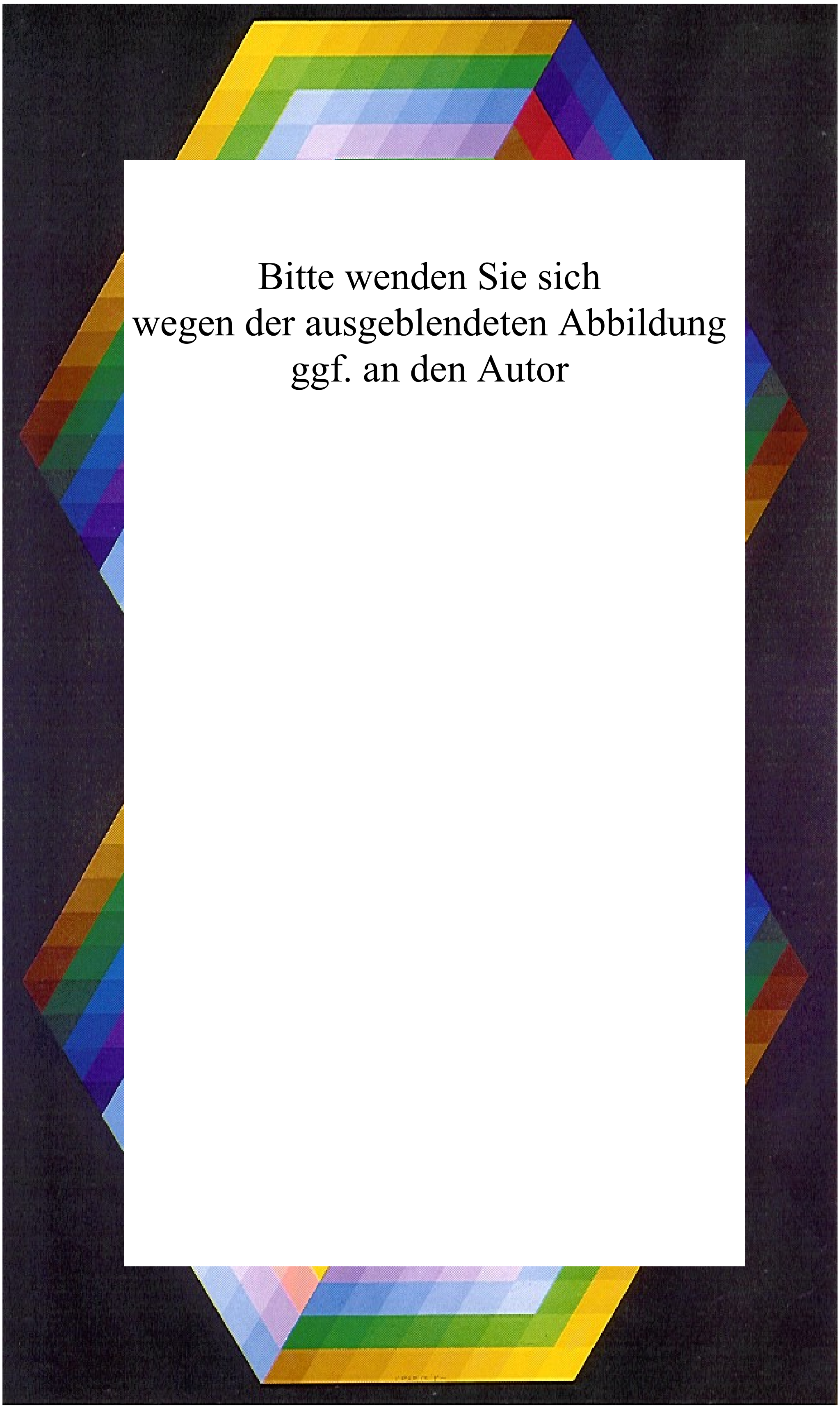


* In manchen Bildern können verschiedene Menschen (oder dieselbe Person zu verschiedenen Zeitpunkten) Unterschiedliches sehen.



Manche Bilder werden von verschiedenen Menschen unterschiedlich „gesehen“: Sogenannte *Umspring“-Bilder* sind in der modernen Malerei besonders in der Stilrichtung der sogenannten „Op-Art“ bekannt. Ein prominenter Vertreter dieser Richtung war Victor Vasarely (geb. 1908).



Bitte wenden Sie sich
wegen der ausgeblendeten Abbildung
ggf. an den Autor

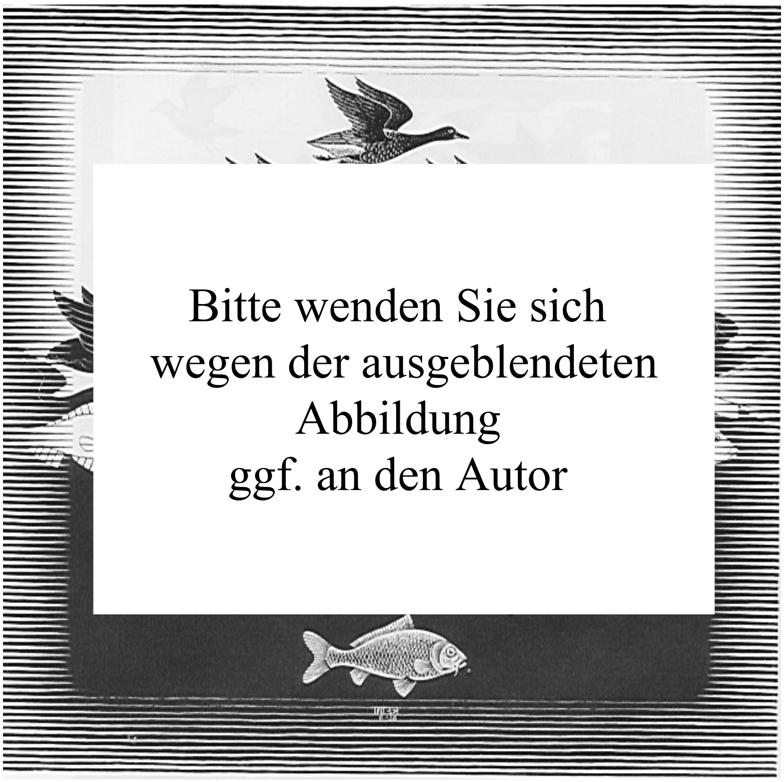
Bitte wenden Sie sich
wegen der ausgeblendeten
Abbildung
ggf. an den Autor

* Probleme mit der „Dimension“: Eine spezielle Problematik ergibt sich bei der Übertragung dreidimensionaler Objekte in die zweidimensionale Zeichenebene. Der niederländische Maler und Graphiker Maurits Escher (1898-1971) entwickelte eine große Meisterschaft im Zeichnen „unmöglicher“ Bilder (siehe Literaturverzeichnis: B. Ernst, M. Escher).

Bitte wenden Sie sich
wegen der ausgeblendeten Abbildung
ggf. an den Autor

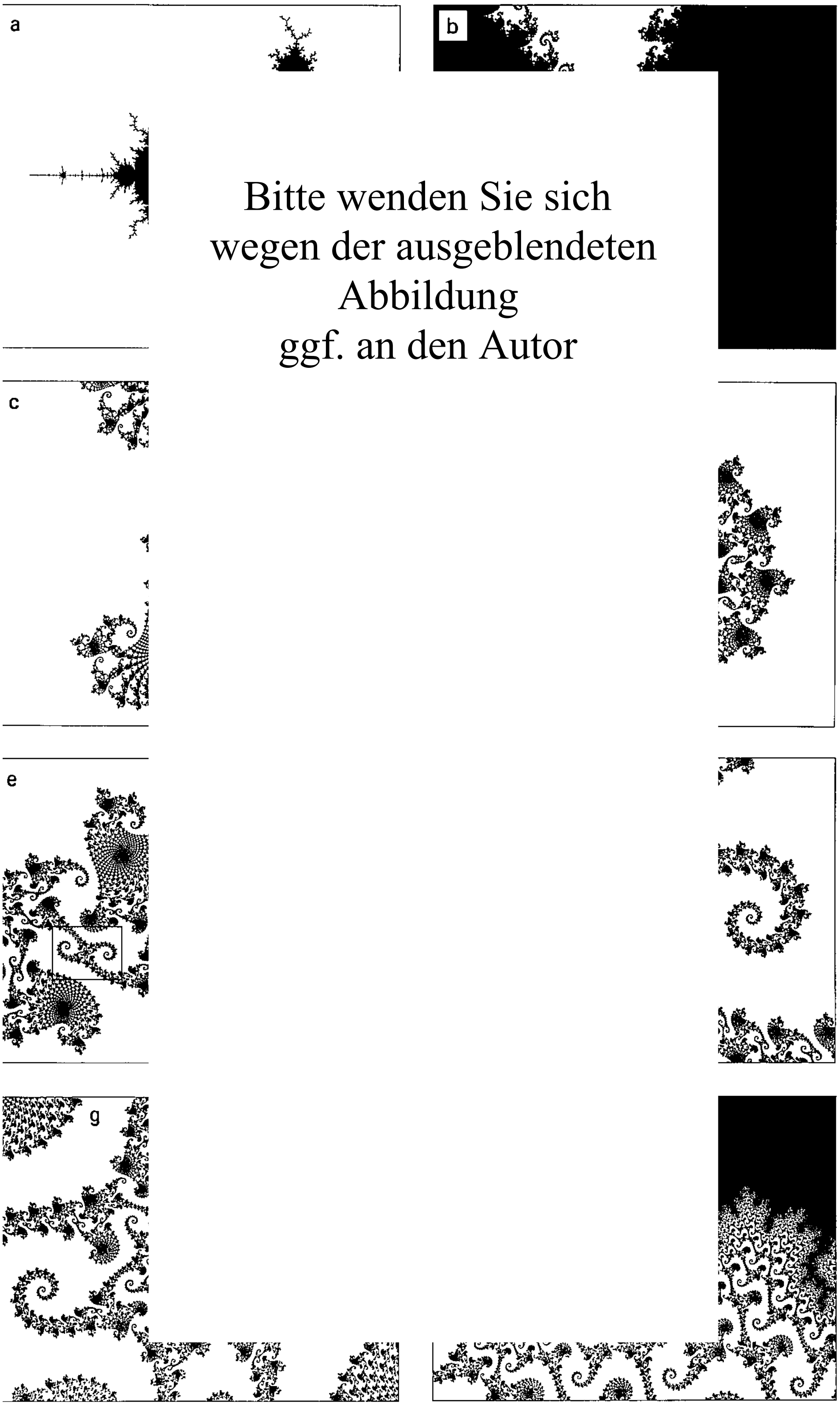
Bitte wenden Sie sich
wegen der ausgeblendeten Abbildung
ggf. an den Autor

* M. Escher entwickelte weiterhin eine große Meisterschaft im Zeichnen faszinierender und überraschender Parkettierungen und Metamorphosen
    * Metamorphose




Parkettierung

* Schließlich seien in diesem Zusammenhang noch sowie selbstähnliche und selbstbezügliche Bilder erwähnt. Erstere sind in der letzten Jahren besonders durch die „Chaos“-Theorie (Mandelbrot-Mengen, Julia-Mengen) populär geworden (vgl. Literaturhinweise: Peitgen / Saupe: The Science of Fractal Images). Kurz nach ihrem Bekanntwerden haben derartige Bilder – bzw. Bildausschnitte – auch unter rein ästhetischen Gesichtspunkten für viel Aufregung gesorgt.



Selbstbezügliche Bilder wurden in vielfältiger und faszinierender Weise von M. Escher thematisiert.

# 7. Überforderung oder Unterforderung?

> Beitrag von Monika Kubovsky vom Schulpsychologischen Dienst in Koeln:
> Ueberforderung durch Unterforderung.
> In: Gerhard N. Mueller & Erich Ch. Wittmann (Hg.): Mit Kindern rechnen.
> Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule, S. 84-86.

*Monika Kubovsky*

**Überforderung durch Unterforderung**

Schule der siebziger Jahre
oder der achtziger Jahre
oder ...?

Kinder sollen alles gründlich lernen
also
denken wir
müssen wir gründlich lehren
gründlich heißt
von Grund auf
und systematisch
also
denken wir
fangen wir mit der 1 an
natürlich nicht am ersten Schultag
doch nicht sofort
nicht gleich in den ersten Wochen
wir wollen ja
die Kinder nicht verprellen

1+1=2
bis Weihnachten haben wir uns
hochgearbeitet
bis zur 10 (zehn)
nun brauchen wir
wir alle
brauchen nun eine Pause
wie gut daß Ferien sind

aber dann
irgendwann
und unausweichlich
ist Januar

soll ich nicht
vielleicht besser
doch warten bis
nach
Karneval

oder trau ich mich
schon jetzt
heraus
mit solchen Ungeheuerlichkeiten
wie 5+6

schlaflose Nächte
es ist soweit
heute Kinder gibt es etwas ganz ganz
Besonderes
5+6
und hat noch nicht zu Ende gesprochen
da platzt es aus einem heraus
laut und triumphierend
11
elf

nein jaaa schon
nein Karli

so
einfach
ist das nicht
5+6 ist 5+5
und eine 1 dazu
weil 6 ist 5 und 1
und wenn du von 6
1 abziehst  ist das wieder 5
also mußt du
der 6 die 1 nehmen
die behältst du
im Kopf
oder in der Hand
oder in der Hosentasche
ich nehme jetzt die erste 5
die ganz unversehrte 5
gebe dann die angeknabberte
6 dazu
die ja eigentlich keine  richtig 6 ist
und habe jetzt
aber Kinder
das haben wir doch wochenlang geübt
wieso kann das keiner behalten

5+5 ist
also haben wir jetzt
10
natürlich
ganz sicher
ihr könnt es glauben
aber 10 sind ja noch nicht genug
wir wollten
was wollten wir
ja richtig
wir wollten wissen
wir wollten doch
oder
also wir wollten wissen
wieviel 5+6 ist
was fehlt uns denn jetzt noch
Kinder ihr könnt
euch aber gar nichts merken
mein Gott sind die Kinder heutzutage unkonzentriert
uns fehlt die 1
die 1 von der angeknabberten 6
na egal
die tun wir jetzt dazu
wie
wer hat gefragt wo dazu
jetzt
bist
du
dran
Karli

Karli wieviel ist 5+6

aber Karli schweigt
kein Wort kommt über seine Lippen
seine Augen schauen ins Leere

er ist nicht schulreif
denkt die Lehrerin
er verweigert die Leistung
ich rufe die Eltern an
der muß zum Schulpsychologen