Algorithmen

fundamental für Mathematik, Mathematikunterricht und mathematische Anwendungen[1]

Jochen Ziegenbalg

Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi
(nach [Zemanek 1981] und [Wußing 1989])

Inhalt

[1] Vortrag anlässlich des 5. Dresdner Kolloquiums zur Mathematik und ihrer Didaktik am 8. Februar 2000

1. Die Situation in der Bildungslandschaft

Wenn man über Algorithmen und ihre Bedeutung für das Erlernen und Anwenden von Mathematik diskutiert, so sind viele Beteiligte (darunter gelegentlich sogar einige Kollegen) geneigt zu sagen: Ja, natürlich sind Algorithmen wichtig, z.B. für Informatiker, Computerprogrammierer und ähnliche Berufsgruppen – aber doch nicht für die Allgemeinheit.

In diesem Beitrag möchte ich jedoch folgendes darlegen: Ja Algorithmen sind wichtig für Informatiker und Computerprogrammierer – aber ihre Bedeutung geht erheblich darüber hinaus: Der Begriff des Algorithmus stellt eine der wichtigsten zentralen Ideen der Mathematik dar; in seiner Bedeutung nur vergleichbar etwa mit dem Begriff der Funktion. Algorithmen sind deshalb von Bedeutung für die *Allgemeinbildung*. Dies sei im folgenden erläutert.

Einer der Gründe, warum Algorithmen so wichtig sind, ist ihre enge *Verwobenheit* mit weiteren zentralen Themen unserer Geistesgeschichte. Dass Algorithmen für Mathematik und Informatik von Bedeutung sind, versteht sich fast von selbst; ihre Bedeutung reicht aber darüber weit in die Bereiche der Philosophie, der Kulturgeschichte, der Heuristik und der Bildung hinein.

Die derzeit zum Themenkomplex

- Mathematik,
- Algorithmen,
- Computer,
- Informatik,
- Informationstechnische Bildung (bis hin zu Schlagworten wie „Multi-Media“)

vorgelegten Bildungsangebote stellen ein wildes Konglomerat von Beiträgen dar, die sich zwischen den Polen

- bleibender, zeitloser mathematischer Grundkenntnisse

und

- extrem vergänglicher Computerkenntnisse

bewegen. Besonders, was die computerbezogenen Kenntnisse betrifft, kommt zudem eine Woge bisher nicht gekannter Kommerzialisierung auf die Bildungslandschaft zu.

Allein schon deshalb – aber auch, weil die für Unterricht und Studium zur Verfügung stehende Zeit eine sehr knappe Ressource ist, wird es notwendig, die Kriterien und Inhalte der Allgemeinbildung immer wieder kritisch zu durchdenken.

Zum Thema „mathematische Allgemeinbildung“ ist in der letzten Zeit vieles geschrieben worden – von höchst unterschiedlicher Auslegung und Qualität. An dieser Stelle sei nur an die Diskussion im Mitteilungsblatt der Deutschen Mathematikervereinigung erinnert [Vollrath 1996]. Ich will und kann hier nicht auf die gesamte Diskussion zur Allgemeinbildung eingehen, aber ein paar Gedanken möchte ich herausarbeiten, die im Zusammenhang mit diesem Beitrag von Bedeutung sind.

Als wichtige, relativ unumstrittene allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts werden regelmäßig genannt:

Die Schüler sollen

- lernen, mathematische Inhalte und Methoden als „Werkzeug“ im Alltags- und Berufsleben zu verwenden; bzw. mathematische Inhalte und Methoden aktiv zum Zwecke ihrer individuellen Lebensführung und -planung einzusetzen,
- Mathematik als wesentlichen Bestandteil unserer Kultur (und Kulturgeschichte) kennen lernen,

- die ästhetische Seite der Mathematik kennen lernen, etwa im Zusammenhang mit dem Symmetriebegriff
- lernen, rational zu argumentieren; bzw. einen geordneten „logischen“ Diskurs zu führen,
- Kritik- und Urteilsfähigkeit gewinnen.

Mathematische Allgemeinbildung richtet sich an Menschen, die nicht notwendigerweise Berufsmathematiker werden wollen. Wenn mathematische Inhalte, Methoden und Verfahren im Alltags- und Berufsleben solcher Menschen Anwendung finden sollen, dann müssen sie

- einfach zu handhaben sein, ihre Benutzung muss intuitiv und unmittelbar einleuchtend sein, sie müssen „direkter“ Natur sein (in der englischen Sprache gibt es dafür das zutreffende und nur schwer zu übersetzende Wort „straightforward“, das auch durch die Übersetzung „geradeheraus“ nicht richtig getroffen wird.[2])
- in durchschaubarer, stabiler Weise aus elementaren Bausteinen aufgebaut sein

Ihre Struktur und die Art ihrer Verwendung müssen dem *genetischen Prinzip*[3] entsprechen. Entsprechend der Tatsache, dass sich Theorien in den exakten Wissenschaften bei der Untersuchung von Problemen durch Verfeinerung primitiver Vorformen entwickelten und weiter entwickeln, kann man eine genetische Darstellung nach [Wittmann 1976] durch folgende Merkmale charakterisieren:

- Anschluss an das Vorverständnis der Adressaten,
- Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
- Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
- durchgehende Motivation und Kontinuität,
- während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung.

Der Computer (einschließlich seiner Software) ist ein hochgradig komplexes und mit einer gewissen, außerordentlich zeitabhängigen Beliebigkeit konstruiertes Gerät, das uns aber in die Lage versetzt, zeitlose fundamentale Ideen der Mathematik und Informatik umzusetzen. Bildungsrelevant im Zusammenhang mit dem Computer sind diese bleibenden grundlegenden Ideen – nicht jedoch die extrem schnell veraltenden Kenntnisse über dieses oder jenes Detail seiner Hardware, über gerade gängige Formen dieses oder jenes Betriebssystems oder die Besonderheiten graphischer bzw. sonstiger „Benutzerschnittstellen“.

In derartigen Situationen ist es für eine ausgewogene Sicht der Dinge ratsam, das Thema aus der historische Perspektive zu beleuchten.

[2] Denn man kann zwar sagen *„this method, this proof is straightforward“*, aber nicht *„diese Methode, dieser Beweis ist geradeheraus“.*

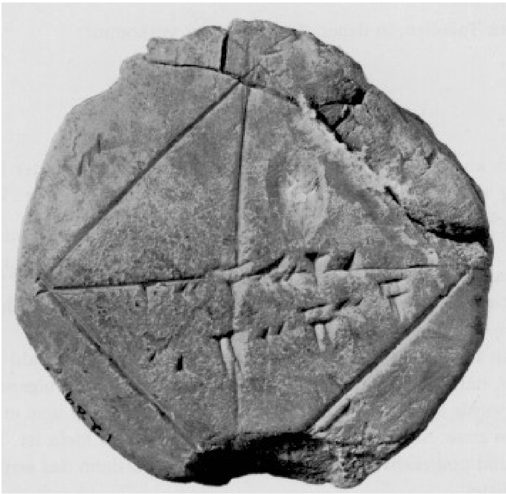
[3] Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt *genetisch* (vgl. [Wittmann 1976]), wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.

2. Historische Dimension

Die Entstehung von Algorithmen hat zunächst einmal gar nichts mit dem Phänomen des Computers zu tun. Die Algorithmen sind sehr viel älter als die Computer. Bis zum heutigen Tag gibt es viele auf dem Gebiet der Algorithmik arbeitende Mathematiker und Informatiker, für die der Computer bestenfalls am Rande eine Rolle spielt. Der renommierte Mathematikhistoriker H. M. Edwards vertritt die wohlbegründete Auffassung, dass alle Mathematik bis zum Auftreten der Zeitgenossen von Leopold Kronecker (1823–1891) algorithmischer Natur war [Edwards 1987]

> *For him (Kronecker), the algorithm was needed to give meaning to his mathematics, and he was following in the footsteps of many other – one might say all other – great mathematical thinkers who preceded him.*

Eines der ersten dokumentierten Beispiele für einen mathematischen Standard-Algorithmus ist die auf einer Keilschrift festgehaltene babylonisch-sumerische Methode des *Wurzelziehens* (ca. 1700 v. Chr.)



Weitere frühe schriftliche Belege für Algorithmen bietet Euklids Buch *„Die Elemente"*, die im 3. Jh. v. Chr. verfasste Gesamtdarstellung des mathematischen Wissens seiner Zeit (die neben vielen anderen natürlich auch den „Euklidischen" Algorithmus enthält). Euklids Werk war eines der erfolgreichsten Lehrbücher in der Bildungsgeschichte der Menschheit; es wurde bis ins vorige Jahrhundert hinein als Lehrbuch für Mathematik verwendet – ein Lehrbuch mit einer „Lebenszeit" von über 2000 Jahren.

Im Bildungszusammenhang ist weiterhin der Umstand bemerkenswert, dass auch der Algorithmus-Begriff aus einer ureigenen pädagogischen Intention heraus entstanden ist. Der Begriff des Algorithmus geht zurück auf die Angabe („al Khowarizm") des in Zentralasien – im heutigen Uzbekistan – liegenden Geburtsorts des persisch-arabischen Gelehrten

> *Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi*,

der im neunten Jahrhundert ein wissenschaftsgeschichtlich äußerst einflussreiches Lehrbuch zur Verbreitung der „indischen Ziffern", also der Zahldarstellung im Zehnersystem, geschrieben hat. Die Art und Weise, wie wir heute die Zahlen schreiben und mit ihnen umgehen, wurde entscheidend von diesem Buch beeinflusst, das mithin neben Euklids Elementen einen der wichtigsten Ecksteine in der Bildungsgeschichte der Menschheit darstellt.

Etwas pointiert könnte man sagen: Die Mathematik in ihrer Entstehungsgeschichte war Algorithmik.

3. Aspekte des algorithmischen Arbeitens

Die Algorithmik hat, etwas vereinfachend ausgedrückt, zwei „Gesichter“. Zum einen gehört dazu

- der Entwurf, die Konstruktion von (neuen) Algorithmen

  (Damit ist im weiteren Sinne auch das Verstehen, Nachvollziehen, Analysieren und Verbessern vorgegebener, insbesondere klassischer Algorithmen gemeint.)

Soll die Beschäftigung mit der Algorithmik aber nicht nur theoretischer Natur bleiben, so gehört zum anderen aber auch die

- Abarbeitung von fertigen, vorgegebenen Algorithmen

zum Gesamtgebiet der Algorithmik.

Der Entwurf von Algorithmen ist eine höchst kreative Aktivität; ihre Abarbeitung dagegen meist eine sehr langweilige Sache. Deshalb gehörte zur Algorithmik schon immer der Versuch, Maschinen zur Abarbeitung von Algorithmen zu konstruieren.

Die Universalmaschine zur Abarbeitung von Algorithmen ist der Computer – er ist heute das wichtigste allgemeine Werkzeug, um mathematische Probleme zu lösen. Der Computer ist (mit geeigneter Software) insbesondere das wichtigste Werkzeug, um in der Mathematik *Experimente* durchzuführen.

Die Betonung des Experimentierens mag den einen oder anderen vielleicht verwundern, ist doch die Mathematik eine analytisch-deduktive Wissenschaft, die zur Verifizierung ihrer Resultate weder des Experiments noch der Empirie bedarf. Rein wissenschaftstheoretisch ist dies sicher richtig, für das Erlernen von Mathematik und für das mathematische Arbeiten und Problemlösen hat das Experiment aber dennoch eine herausragende Bedeutung. Der geniale indische Mathematiker *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) formulierte es zu Beginn dieses Jahrhunderts folgendermaßen:

> *Für große Mathematiker war das Betrachten konkreter Beispiele schon immer eine wichtige Quelle der Intuition.*

Die Rolle des Computers geht aber noch weit darüber hinaus. Vor allem im Zusammenhang mit dem *modularen* Arbeiten, also dem Arbeiten im Sinne des *Baukastenprinzips*, ist er ein Katalysator, der eine neue, intensivere begriffliche Durchdringung vieler klassischer und moderner Probleme ermöglicht und erzwingt und neue methodologische Ansätze möglich macht, besonders im Zusammenhang mit

- Themen der endlichen Mathematik
- „diskreten“ Methoden
- Simulationsverfahren aller Art, besonders auch stochastischen Simulationen

4. Algorithmische Themen in der Schulmathematik auf der inhaltlichen Ebene

Anlässlich eines Vortrags zum Thema „Algorithmen und Computer im Mathematikunterricht“ wurde ich einmal gefragt, ob es sich denn lohne, dem Thema so viel Aufmerksamkeit zu widmen, wo doch Algorithmen in der Schulmathematik nur relativ selten vorkämen. Ich habe dies zum Anlass genommen, einmal nachzuschauen, wo überall im Unterricht Algorithmen oder algorithmische Themen vorkommen – mit dem Ergebnis, dass nicht-algorithmische Themen fast nicht auszumachen waren. Im folgenden ist eine Zusammenstellung algorithmischer Themen, bezogen auf die verschiedenen Stufen des Mathematikunterrichts, gegeben.

Primarstufe: erste Erfahrungen mit Algorithmen

- der Prozess des Zählens und Reihens („Iterierens“),

  einfache Iterierungs- und Reihungsverfahren, insbesondere im Zusammenhang mit den arithmetischen Grundoperationen, z.B.

  - das kleine Einmaleins; insbesondere die Neunerreihe,
  - Multiplikation als iterierte Addition,
  - Division (mit Rest) als iterierte Subtraktion,

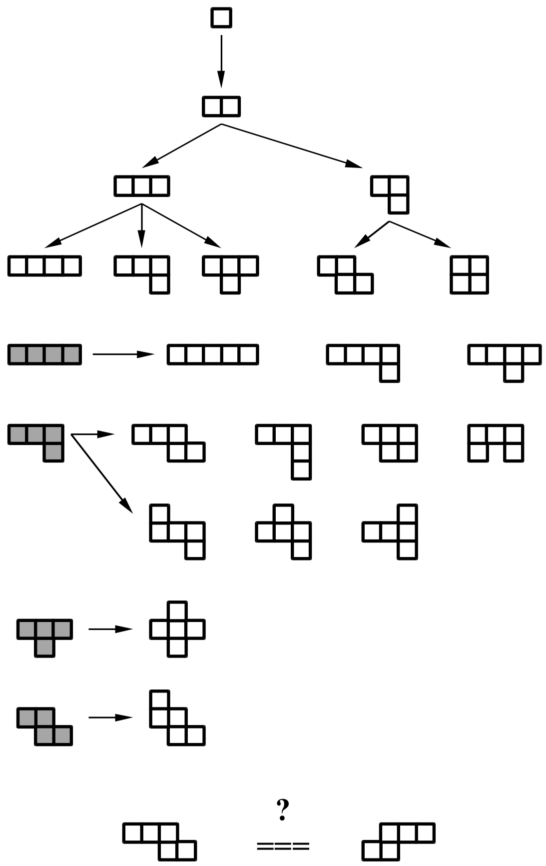
  inkonventionelle arithmetische Verfahren[4]

  - das Rechnen mit ägyptischen, babylonischen oder römischen Zahlen,
  - die „russische Bauernmultiplikation“,
  - Multiplikation nach dem Prinzip „teile und herrsche“

  Verdoppeln und Halbieren, nichtdekadische Zahlen- und Stellenwertsysteme,

  in der Lehrerbildung: ordinaler Aspekt des Zahlbegriffs und seine wissenschaftliche Fundierung durch die Peano-Axiome

- figurierte Zahlen und rekursive Zahlen- und Punktmuster; rekursive geometrische Konstruktionsverfahren und systematisches Variieren (z.B. Polyominos siehe Graphik-Skizze)



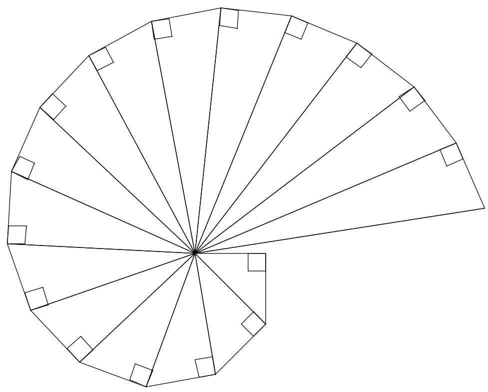
- einfache Spiele iterativen bzw. rekursiven Charakters (NIM, ...)
- erste stochastische Grunderfahrungen (Zählen, Sortieren, Klassifizieren, Ordnen)

[4] Ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts der Primarstufe besteht darin, erste Kenntnisse über Zahlen, Zahldarstellungen und die Grundrechenarten, die Standardverfahren der Arithmetik, zu vermitteln. Im Hinblick auf den hohen Grad der Normierung dieser Standardverfahren erweist es sich als nützlich, auch alternative Verfahren, sei es zur Zahldarstellung, sei es für die Grundrechenarten zu betrachten. Aus einer „distanzierten Perspektive“ erwächst oft erst das volle Verständnis für das „Alltägliche“.

Mittelstufe / Sekundarstufe I: Ausbau und Vertiefung der Primarstufen-Themen

- Teilbarkeitslehre: Division mit Rest, Teiler-Relation, Primzahlen (Sieb des Eratosthenes), größter gemeinsamer Teiler (Euklidischer Algorithmus), kleinstes gemeinsames Vielfaches, Stellenwertsysteme, verschiedenartige Zahlsysteme mit den entsprechenden Umwandlungsalgorithmen (babylonisches, ägyptisches, römisches Zahlsystem, historische Bezüge), Pythagoräische Zahlen, ...
- Bruchrechnen: Hauptnenner, Kürzen, Umwandlung „gemeiner" Brüche in Dezimalbrüche, Vorperiode, Periodenlänge, „ägyptisches" Bruchrechnen, ...
- Funktionenlehre: Folgen und Reihen als Iterationsstrukturen, Zuordnungsvorschriften, Darstellung von Zuordnungen durch Wertetafeln, „diskrete" Erzeugung von Kurven (zum Beispiel: Kreis, Spiralen), ...
- Terme, Termauswertung, Gleichungslehre: Substitutionsverfahren, Eliminationsverfahren, ...
- Näherungsverfahren: Approximation irrationaler Zahlen ($\sqrt{2}$, e, π, ...), approximative Bestimmung von Funktionswerten elementarer Funktionen (Quadratwurzel-, Potenz-, Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen), iteratives Lösen von Gleichungen, Bisektionsverfahren, regula falsi, ...
- Geometrie: Konstruktionsverfahren (Konstruktionstexte !)

  Verkettung und Iteration von Abbildungen (von Mehrfachspiegelungen bis hin zu IFS (iterated function systems), Konstruktion bestimmter Streckenlängen (z.B. die „Wurzelschnecke" nach Theodorus von Kyrene, ca. 460–399 v.Chr.), ...



- Mathematik in Anwendungssituationen („Sachrechnen", „Bürgerliches Rechnen"): Zinsrechnung, Zinseszinsen, unterjährige Verzinsung, Ratenkauf und effektiver Zinssatz, Zinsvergleiche, physikalische Anwendungen (Bahnkurven, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, ...), erste Ansätze zur mathematischen Modellbildung und Simulation: lineares und exponentielles Wachstum, Halbwertszeit, Wahlprognosen, Sitzverteilung in Parlamenten (z.B. die Verfahren von d'Hondt und Hare-Niemeyer), ...

Oberstufe / Sekundarstufe II: Möglichkeiten zur Vertiefung und Analyse der bereits behandelten Themen; algorithmische Elemente finden sich in der

- gesamten Analysis und Linearen Algebra (Folgenbegriff, Gauß'scher Algorithmus, ...)
- numerischen Mathematik (Newton Verfahren, ...)
- Stochastik (besonders auch in Themenbereichen wie Markoffsche Ketten, Warteschlangen, Simulationen)

- mathematischen Modellbildung (diskrete Modelle und Verfahren in Wirtschaft, Technik, Naturwissenschaften, Sozialwissenschaften, Sprachwissenschaften)

Die obige *extensionale* Betrachtungsweise orientierte sich an der Frage: Was sind konkrete Beispiele für algorithmisches Arbeiten? Es lohnt sich, dem Problem auch im Sinne einer *intensionalen* Betrachtungsweise nachzugehen. Dabei steht die Frage im Vordergrund:

Was ist algorithmischer Natur – und was ist nicht-algorithmischer Natur?

Die Beantwortung dieser Frage hängt mit den betrachteten mathematischen Objekten zusammen. Objekte, die explizit konstruiert werden, sind letztlich „algorithmisch" definiert, und der Umgang mit ihnen spiegelt diesen algorithmischen Charakter wieder. Gelegentlich (im Unterricht allerdings sehr selten) kommen in der Mathematik Objekte vor, die nicht explizit konstruiert wurden. Solche Objekte kommen meist bei Verwendung des zu Beginn dieses Jahrhunderts von B. Levi (1875-1961) formulierten *Auswahlprinzips* (oder gleichwertiger Prinzipien, wie dem Wohlordnungssatz oder dem Lemma von Zorn) ins Spiel. Die nicht-algorithmische Mathematik setzt erst mit dem Auswahlaxiom ein. Auch aus intensionaler Sicht ist also festzuhalten: Nicht-algorithmische Themen sind im Mathematikunterricht außerordentlich selten.

5. Methodologische Aspekte des algorithmischen Arbeitens

Auf dieser Ebene stellt die algorithmische Vorgehensweise, insbesondere auch bei Verwendung des Computers als modernem Werkzeug zur Abarbeitung von Algorithmen, ein wertvolles Hilfsmittel dar, um klassische methodologische Ziele zur Realisierung des Mathematikunterrichts zu verfolgen.

- Das *experimentelle* und *beispielgebundene* Arbeiten

  Vor jeder abstrakten mathematischen Theorie steht in der Regel das spielerische Experimentieren mit Beispielen aus dem Bereich der Zahlen oder anderer mathematischer Objekte. Das Aufstellen und Verifizieren von Hypothesen setzt i.a. ein solides Studium der dem Problem zugrundeliegenden „Daten" voraus. Solche Experimente sollte man zunächst „von Hand" ausführen. Bei etwas komplexerer Sachlage wird aber sehr bald der (mit geeigneter Software ausgestattete) Computer ein unverzichtbares Werkzeug zum Experimentieren.

- Anwendung *operativer* Vorgehensweisen

  Die Anwendung des *operativen Prinzips* bedeutet eine Vorgehensweise entsprechend der Grundfrage

  „ ... was passiert, wenn ..."

  Operatives Vorgehen ist fundamental für jede forschende und entdeckende Tätigkeit in Mathematik und Naturwissenschaften; auch das systematische Variieren von Parametern und Einflussfaktoren gehört zu einer operativen Vorgehensweise. (Zum Begriff des *operativen Prinzips*: siehe z.B. [Wittmann 1976].

- *Konstruktive* Vorgehensweisen und Begriffsbildungen

  Jeder Algorithmus ist eine „Konstruktionsvorschrift" zur Lösung eines bestimmten Problems. Algorithmisch zu arbeiten heißt, sich den jeweiligen Lern- und Forschungsgegenstand konstruktiv-handelnd zu erschließen; algorithmisches Arbeiten kommt in ganz natürlicher Weise der allgemeinpädagogischen Forderung nach Eigentätigkeit und aktiver Eigengestaltung des Lernprozesses entgegen.

- *Elementarisierung*

  Algorithmisch vorzugehen heißt, sich die Lösung eines Problems schrittweise aus Elementarbausteinen aufzubauen. Der Begriff des Elementaren ist tief mit dem des Algorithmus verbunden. Algorithmische Lösungen vermeiden oft technisch und begrifflich aufwendige Methoden der formel-orientierten Mathematik zugunsten wesentlich elementarerer iterativer bzw. rekursiver Vorgehensweisen (vgl. dazu die Fallstudien im Anhang – Abschnitt 8). Die Methode der Simulation ist durch den Computer zu einer neuen Blüte gekommen. Die meisten Probleme der realen Welt sind viel zu komplex, als dass sie sich durch eine „geschlossene Formel" lösen lassen würden. Mit Computersimulationen lassen sich dagegen oft sehr brauchbare Lösungen erzielen – häufig auf der Basis extrem elementarer Zähl-Strategien.

- *Beziehungshaltigkeit / Vernetzung*

  bedeutet das Herstellen eines Beziehungsnetzes sowohl fachintern als auch fachübergreifend. Themen mit einem hohen Grad an Beziehungshaltigkeit sind vielseitig „vernetzte" Themen. Solche Themen sind aus inhaltlichen Gründen in höherem Maße bildungsrelevant als Themen mit „Inselcharakter". Hinzu kommt, dass vernetztes Wissen lernpsychologisch stabiler ist als isoliertes Wissen. Marvin Minsky beschreibt dies sehr schön im folgenden Text (vgl. [Minsky 1985]):

  > *As scientists we like to make our theories as delicate and fragile as possible. We like to arrange things so that if the slightest thing goes wrong, everything will collapse at once!*
  >
  > *Why do scientists use such shaky strategies? So that when anything goes wrong, they'll be the first to notice it. ...*
  >
  > *But it isn't good psychology. It's bad the way we let teachers shape our children's mathematics into slender, shaky tower chains instead of robust, cross-connected webs. A chain can break at any link, a tower can topple at the slightest shove. And that's what happens in a mathematics class to a child's mind whose attention turns just for a moment to watch a pretty cloud.*

  Algorithmisches Arbeiten kann sehr unterschiedliche Wissensfelder miteinander verbinden. So verbindet z.B. der Euklidische Algorithmus Algebra und Geometrie. Die Fraktal-Algorithmen verbinden Analysis und Geometrie. Ähnliche Verbindungen gibt es auch über das Fach Mathematik hinaus:

  * Algorithmen sind im naturwissenschaftlichen Bereich, z.B. durch Simulationsverfahren und die Anwendung diskreter Methoden von Bedeutung.
  * Algorithmen spielen in den Sprachwissenschaften eine Rolle, z.B. in der Form generativer Grammatiken.
  * Algorithmen treten im Bereiche der Kunst in der Form der seriellen Kunst, der Aleatorik, rekursiver und fraktaler Themen und Arbeitstechniken auf.
  * Algorithmen kommen in den Sozialwissenschaften, z.B. im Zusammenhang mit dem d'Hondtschen (und anderen) Verfahren zur Ermittlung der Sitzverteilung im Parlament vor.
  * Algorithmen spielen in der (schriftlich tradierten) Kultur- und Wissenschaftsgeschichte der Menschheit als gesetzliche Vorschriften und Handlungsprotokolle aller Art eine wichtige Rolle. Ein frühes Beispiel ist der Codex Hammurapi aus der Zeit um 1780 v.Chr. (Gesetz 2 – sinngemäß):

    > *„Wenn jemand einen Mann beschuldigt und der Angeklagte zum Fluss geht und in den Fluss springt, und wenn er dann untergeht, so soll der Ankläger*

sein Haus in Besitz nehmen. Aber wenn der Fluss beweist, dass der Angeklagte unschuldig ist und wenn dieser unverletzt entkommt, dann werde der Ankläger zum Tode verurteilt, während derjenige, der in den Fluss gesprungen ist, vom Hause des Anklägers Besitz ergreifen soll.“

Was immer man juristisch von dem Gesetz halten mag – eines ist offensichtlich: Es ist ein Algorithmus.

* Algorithmen spielen natürlich in der Informatik eine zentrale Rolle. Nach Ansicht vieler Informatiker ist die Informatik geradezu die Wissenschaft von den Algorithmen. Da die Algorithmik seit jeher auch ein Kerngebiet der Mathematik ist, liegt sie im Zentrum des Bereiches, wo sich Mathematik und Informatik überschneiden und gegenseitig befruchten.
* In der Philosophie, Wissenschaftstheorie und Logik spielen Algorithmen im Zusammenhang mit der Diskussion um die Grenzen des Computers und darüber hinaus um die Grenzen der menschlichen Erkenntnis eine zentrale Rolle (Hilbertsches Programm des Formalismus, Gödelsche Unvollständigkeitssätze, ...).

Die algorithmische Methode ist ein Band, das viele Fächer und Wissensbereiche miteinander verbindet. Algorithmische Verfahren (wie z.B. Suchstrategien, Klassifizierungsschemata und vieles mehr), die der Lernende in einem Bereich kennen gelernt hat, lassen sich oft in andere Bereiche übertragen.

Seiner Bedeutung entsprechend ist es nur angemessen, wenn das Thema Algorithmen als Grundlagenveranstaltung an zentraler Stelle in den Studienplänen der Fächer Mathematik und Informatik verankert ist. Dies gilt aus den oben angeführten Gründen in ganz besonderem Maße für das Lehramtsstudium.

6. Algorithmen – Programmierung

Wenn man sich heute mit Algorithmen beschäftigt, so wird man sie auch praktisch umsetzen wollen. Diese Umsetzung geschieht heute normalerweise in der Form der Programmierung des Computers, eine Aktivität, die manchmal etwas geringschätzig als „Codierung“ abgetan wird. Es gibt viele Formen und Varianten des Programmierens. Programmieren „mit Stil“ ist eine anspruchsvolle geistige Aktivität, die H. v. Hentig mit eindrucksvollem Blick für das Wesentliche folgendermaßen umschreibt:

Dies ist der Gewinn – aber er wird mir nur zuteil, wenn ich den Computer dazu verwende: als Abbild meiner Denkprozesse, die ich in ihm objektiviere und erprobe. Programmieren heißt eben dies. (H. v. Hentig, DIE ZEIT, 18. Mai 1984)

6.1 Formen des Programmierens

Die Entwicklung moderner Programmiersprachenkonzepte steht im engsten Zusammenhang mit den fundamentalen Paradigmen des Algorithmus-Begriffs und den philosophischen Grundfragen, die sich aus der Untersuchung der Grenzen der Algorithmisierbarkeit ergeben haben. Der Philosoph *Ludwig Wittgenstein* hat sich in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts intensiv mit der Rolle der Sprache (und dabei insbesondere auch der formalen Sprachen) für unser Denken befasst. Von ihm stammt der Ausspruch:

Die Grenzen der Sprache sind die Grenzen der Welt.

Durch die Entwicklung höherer Programmiersprachen wurde es möglich, die *„Hardware-Aspekte“* des Computers immer stärker in den Hintergrund zu drängen. Der Benutzer einer Programmiersprache oder eines Anwendersystems wird heute kaum jemals noch mit den 0/1-Bitfolgen im Inneren des Computers konfrontiert. Er braucht, abgesehen von sehr seltenen

Ausnahmefällen, auch nicht mehr auf der Ebene der Maschinen- oder Assemblersprache zu arbeiten.

Mögliche und gängige Formen des Programmierens sind:

- das „klassische" Programmieren

  in (meist compilierten) Programmiersprachen wie FORTRAN, COBOL, ALGOL, Assemblerprogrammierung, BASIC, Pascal, ELAN, C, Ada, ...
- das „interaktive" Programmieren

  bzw. das „Programmieren als Spracherweiterung" in (meist interpretierten) Programmiersprachen wie APL, Lisp, Logo, Prolog, Forth, MuMath, Maple, Mathematica, ...
- Datenbankabfragen, SQL
- die Erstellung („Programmierung") von elektronischen Kalkulationsblättern (engl. „spreadsheets")
- die Erstellung von Makros oder Prozeduren in speziellen Anwendersystemen (etwa zur Geometrie: Cabri Géomètre, Geolog, Euklid, Cinderella, ...)
- die Erstellung von „scripts" in sogenannten Autorensystemen

Konzeptionelle Aspekte der Programmierung traten im Laufe der Zeit in den Vordergrund. Einer der wichtigsten davon war das *modulare* Arbeiten. Es wurde – und wird noch – lange und intensiv darum gerungen, durch welche Grundkonzepte der Programmierung Modularität und damit auch kognitive Effizienz am besten zu realisieren seien. Die Entwicklung mündete ein in eine Diskussion, die heute unter dem Stichwort „*Paradigmen des Programmierens*" geführt wird. Man unterscheidet im wesentlichen die folgenden vier grundlegenden Paradigmen des Programmierens: imperatives Programmieren, funktionales Programmieren, regelbasiertes Programmieren (Logik-Programmierung), objektorientiertes Programmieren.

6.2 Paradigmen des Programmierens und Fassungen des Algorithmen-Begriffs

Die obigen Paradigmen des Programmierens entsprechen recht genau den in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelten gleichwertigen Fassungen des Algorithmenbegriffs („Churchsche These").

Programmier-Paradigma		*Fassung des Algorithmus-Begriffs*
imperatives Programmieren	——	Turing Maschine
funktionales Programmieren	——	Lambda-Kalkül
regelbasiertes Programmieren, Logik-Programmierung	——	Prädikatenlogik, Prädikatenkalkül
objektorientiertes Programmieren	——	Typentheorie

Aus *unterrichtlicher* Sicht ist das Paradigma der funktionalen Programmierung von besonderer Bedeutung. Es liefert den geeigneten mathematischen Rahmen, um den mathematischen Funktions- bzw. Zuordnungsbegriff (der seinerseits fundamental ist für die Anwendungen von Mathematik in Natur, Wirtschaft und Technik) in die Programmierungs-Praxis umzusetzen. Darüber hinaus ist dieses Paradigma für das Arbeiten mit Systemen der Anwendersoftware fundamental. So sind z.B. die zur Steuerung der Arbeitsabläufe notwendigen Kontrollstrukturen in vielen Anwendersystemen als Funktionen realisiert – und zu ihrem Verständnis benötigt man die Vertrautheit mit den Grundlagen des funktionalen Arbeitens. So ist z.B. in den meisten Tabellenkalkulationssystemen die Fallunterscheidung `IF` eine Funktion mit drei Argumenten

```
IF(B, F1, F2).
```

B ist dabei eine Bedingung; `F1` und `F2` sind Funktionsaufrufe. Wenn die Bedingung `B` erfüllt ist, so ist der Wert des Aufrufs `F1` der Funktionswert von `IF`, andernfalls der Wert des Aufrufs `F2`.

Es wäre ein Fehler, das funktionale Paradigma der Programmierung zu vernachlässigen. Leider lässt sich aber gerade dieses Programmierkonzept in den im Unterricht weitaus am häufigsten verwendeten Programmiersprachen (BASIC und Pascal) nur recht unzulänglich umsetzen.

Die Argumente für oder gegen bestimmte Programmiersprachen werden gelegentlich mit fast metaphysischem Eifer ausgetauscht Man erlebt es oft, dass die Vertreter eines bestimmten Paradigmas die Auffassung vertreten: „Die Kenntnis dieses unseres Paradigmas reicht aus, um alle irgendwie durch Programmierung lösbaren Probleme tatsächlich zu lösen". Dies ist zwar (zumindest im Prinzip) nach der *These von Church* trivialerweise richtig, aber eine der Urteilsfähigkeit verpflichtete, ausgewogene Bildung verlangt geradezu auch eine gewisse Kenntnis von und Vertrautheit mit den Stärken, den Schwächen und der Austauschbarkeit dieser Konzepte.

7. Zusammenfassung

Das Konzept des Algorithmus ist fundamental für Mathematik und Mathematikunterricht. Die Algorithmik spielt eine wichtige Rolle in den Bereichen

- Geschichte (und Kulturgeschichte) der Mathematik

  ein großer Teil des mathematischen Wissens ist Wissen über Algorithmen und je weiter man in der Geschichte zurückgeht, um so mehr trifft dies zu.

  > [Wussing 1979] *Keine wissenschaftliche Disziplin würde mehr verlieren als die Mathematik, wenn man sie von ihrer Geschichte trennen würde.*

- Mathematik im Unterricht / mathematische Bildung

  auf der *Ebene der Inhalte* ist eine Fülle von Algorithmen zu „erlernen", zu erarbeiten, zu analysieren, zu verstehen

  auf der *Ebene der Methodologie* beeinflusst die algorithmische Methode ganz entscheidend die Prozesse

  * des Lehrens von Mathematik
  * des Erlernens von Mathematik
  * des Praktizierens von Mathematik (also des algorithmischen Problemlösens)

- Metamathematik

  Hier werden Fragen der folgenden Art untersucht

  * Was ist ein Algorithmus ?
  * Was soll es heißen, dass etwas berechenbar ist ?
  * Wo liegen die Grenzen des Algorithmierens ? (Gödel)
  * Was sind die Grenzen des Computers ?

- Philosophie der Mathematik

  Algorithmen sind zentraler Bestandteil einer konstruktiven Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. Eine der herausragenden Persönlichkeiten, welche die Grenzen der Berechenbarkeit (und damit die Grenzen des Algorithmierens und die Grenzen des Computers) erforscht und erkundet haben, war Kurt Gödel (1906–1978). Im folgenden seien einige Zitate wiedergegeben, welche die Bedeutung seiner Arbeit, aber zugleich auch die Bedeutung der Wechselbeziehungen zwischen der Algorithmik und der Philosophie verdeutlichen.

Der Mathematiker und Logiker Heinrich Scholz bezeichnete den Gödelschen Unentscheidbarkeitssatz als

> *die Kritik der reinen Vernunft im Jahre 1931*

Der Mathematiker Lynn Arthur Steen schreibt in dem Buch „Mathematics Today“

> *Gödel proved what could well be one of the most profound results in the history of thought ...*

Der Dichter und Schriftsteller H. M. Enzensberger hat sich von den Gödelschen Resultaten zu dem folgenden Gedicht anregen lassen [Enzensberger 1971, S. 168]

> *Hommage à Gödel*
>
> *Münchhausens Theorem, Pferd, Sumpf und Schopf,*
> *ist bezaubernd; aber vergiß nicht,*
> *Münchhausen war ein Lügner.*
>
> *Gödels Theorem wirkt auf den ersten Blick*
> *etwas unscheinbar, doch bedenk:*
> *Gödel hat recht.*
>
> ...

8. *Fallstudien*:

Anwendungen algorithmischen Denkens im Wirtschaftsleben an den Beispielen

- Tilgung von Krediten und
- effektiver Zinssatz von Ratenkrediten

Elementare Zugänge zu zentralen Themen des Mathematikunterrichts zu finden, Problemlösestrategien in einfacher und durchsichtiger Weise aufzubereiten: das waren seit jeher wichtige Ziele der Mathematik-Didaktik (vergleiche z.B. [Kirsch 1976] und [Kirsch 1977]).

In diesem Beitrag soll aufgezeigt werden, dass und wie die algorithmische Denkweise in Verbindung mit der Nutzung des Computers ein nützliches Werkzeug zur Verfolgung dieser Ziele darstellen kann. Dies soll in der Form einer konkreten *Fallstudie* geschehen. Am Beispiel des Themas *Tilgung von Darlehen* sollen traditionelle Vorgehensweisen mit den Methoden des computerorientierten Problemlösens verglichen werden. Dabei wird vergleichsweise ausführlich auf diejenigen Lernvoraussetzungen eingegangen werden, die zur Durchführung des jeweils diskutierten Verfahrens notwendig sind. Ein wichtiges Ziel dieses Beitrages ist insbesondere, aufzuzeigen, dass Schüler mit Mittelstufenkenntnissen durch den sachgerechten Einsatz algorithmischer Vorgehensweisen und des Computers als Werkzeug Problemlösekompetenz auch in Themenbereichen gewinnen können, die ihnen ohne diese Hilfsmittel verschlossen bleiben.

In einer Vertiefung dieser Fallstudie soll am Beispiel des *effektiven Zinssatzes* für Ratenkredite gezeigt werden, dass das algorithmische Denken nicht nur im Zusammenhang mit dem Problemlösen sondern auch in der Phase der *Begriffsbildung* von großem Wert sein kann.

Schließlich wird aufgezeigt, wie die geschilderten Methoden wirksam gemacht werden können, um traditionelle allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts wie *Kritik-* und *Urteilsfähigkeit* und *Stärkung der eigenen Persönlichkeit* durch rationales und folgerichtiges Denken zu fördern.

8.1 Annuitäten-Darlehen und ihr Tilgungsprozess

Wir beginnen mit einem konkreten Beispiel. Ein Darlehen über 100.000,00 DM wird zum Jahreszinssatz von 5 % verzinst und mit einer Annuität von 10.000,00 DM pro Jahr abgezahlt. Wie schon angedeutet, findet die Tilgung des Darlehens nach der Methode der *Annuitäten-Tilgung* statt; d.h. die Zinsen werden „in kanonischer Weise" stets bezogen auf die aktuelle Restschuld ermittelt. In ganz natürlicher Weise ergeben sich einige Fragestellungen, insbesondere die Frage: Nach welcher Zeit ist das Darlehen getilgt?

Ein Mensch, der über die normale mathematische Schulbildung verfügt, wird vermutlich zunächst einmal ganz „naiv" (dies ist im positiven Sinne gemeint) an das Problem herangehen und sich von Hand eine Art Tilgungsplan aufstellen:

verstrichene Zeit	angefallene Zinsen	alte Restschuld plus Zinsen	neue Restschuld
1	5.000,00	105.000,00	95.000,00
2	4.750,00	99.750,00	89.750,00
3	4.487,50	94.237,50	84.237,50
4	4.211,90	0,00	0,00
...	...	...	...

Die Strategie ist klar und braucht deshalb kaum explizit formuliert zu werden: wenn man so lange weiterrechnet, bis die Restschuld gleich Null ist, kann man die vergangene Zeit direkt in der Tabelle ablesen. Die mathematischen Voraussetzungen zur Durchführung dieses naiven Verfahrens sind außerordentlich bescheiden: Grundkenntnisse in den Grundrechenarten und dem Prozentrechnen. Dazu kommen noch: Konzentrationsfähigkeit zur Durchführung derartiger längerer Rechnungen und ein gewisses Selbstvertrauen, um überhaupt damit anzufangen. Diese naive Lösung ist allerdings zunächst nur von theoretischer Bedeutung: „... so müsste es im Prinzip gehen". In der Praxis ist es aber ziemlich mühsam (und sehr fehleranfällig), diese Rechnung von Hand durchzuführen. Und wenn man sie durchgeführt hat, hat die Bank vielleicht inzwischen ihre Konditionen verändert und man kann wieder von vorn anfangen. Selbst mit dem Taschenrechner bleibt die Berechnung der Tabelle ein mühsames, lästiges und fehleranfälliges Geschäft, das man ungern mehrmals (etwa zum Vergleich unterschiedlicher Konditionen) durchführen möchte. Darüber hinaus erfolgen die Annuitätenzahlungen in der Realität meist monatlich oder vierteljährlich, wodurch sich der „mechanische" Rechenaufwand in einem Maße erhöht, das „von Hand Rechnungen" (selbst unter Einbezug des Taschenrechners) völlig unpraktikabel macht.

In der Mathematik hat man deshalb andere Methoden entwickelt, um die Antwort auf die Frage, nach welcher Zeit das Darlehen getilgt ist, zu erhalten: man entwickelt eine „Formel", mit der man die Antwort auf die eingangs gestellte Frage „auf einen Schlag" erhält. Um die Lernvoraussetzungen der einzelnen Verfahren miteinander vergleichen zu können, sei dieser Weg zunächst skizziert:

Ausgangspunkt sind das Darlehen *D*, der Jahreszinssatz *p* (angegeben in Prozent) und die Annuität *A*. Die Restschuld nach k Jahren sei mit D_k bezeichnet. Dann ist mit $D_0 := D$

$$D_1 = D_0 + D_0 \cdot \frac{p}{100} - A$$

Mit dem *Zinsfaktor* $q := 1 + \frac{p}{100}$ folgt

$$D_1 = q \cdot D_0 - A$$

$$D_2 = q \cdot D_1 - A = q^2 \cdot D_0 - q \cdot A - A$$

$$D_3 = q \cdot D_2 - A = q^3 \cdot D_0 - q^2 \cdot A - q \cdot A - A$$

$$D_4 = q \cdot D_3 - A = q^4 \cdot D_0 - q^3 \cdot A - q^2 \cdot A - q \cdot A - A$$

Es fällt nun nicht mehr schwer, die „allgemeine Form" zu erschließen, welche sich aus der Rekursionsgleichung

$$D_k = q \cdot D_{k-1} - A \qquad \text{(Tilg-1)}$$

ergibt. Durch Einsetzen der jeweils vorangehenden Werte erhält man die explizite Darstellung:

$$D_k = q^k \cdot D_0 - q^{k-1} \cdot A - q^{k-2} \cdot A - \ldots - q^2 \cdot A - q \cdot A - A$$

bzw.

$$D_k = q^k \cdot D_0 - A \cdot (q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q^2 + q + 1) \qquad \text{(Tilg-2)}$$

Für einen Zinssatz $p > 0$ ist q von 1 verschieden und die letzte Darstellung kann noch unter Anwendung der Gleichung

$$q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q^2 + q + 1 = \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

in die folgende Form übergeführt werden:

$$D_k = q^k \cdot D_0 - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} \qquad \text{(Tilg-3)}$$

Der Zeitpunkt t der Tilgung ergibt sich aus der Bedingung $D_t = 0$, d.h. aus der Auflösung der Gleichung

$$q^t \cdot D_0 - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 0 \qquad \text{(Tilg-4)}$$

nach *t*. Einige elementare algebraische Umformungen, Logarithmieren und die Anwendung der Logarithmengesetze führen schließlich zu der Lösung:

$$t = \frac{\ln A - \ln(A - D_0 \cdot (q - 1))}{\ln q} \qquad \text{(Tilg-5)}$$

Die intellektuellen Voraussetzungen („Lernvoraussetzungen") für die gerade skizzierte Vorgehensweise seien im folgenden einmal explizit zusammengestellt:

* ein sicherer Umgang mit Variablen, insbesondere indizierten Variablen
* ein sicheres (aus der Sicht nicht nur des Mittelstufenschülers nur als „virtuos" zu bezeichnendes) Beherrschen algebraischer Umformungstechniken
* geometrische Folgen und Reihen; insbesondere die Formel für die (endlichen) Teilsummen der geometrischen Reihe
* Auflösung von Gleichungen, bei denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten vorkommt
* Logarithmieren, Logarithmengesetze
* und für eine wirklich vollständige Begründung des beschriebenen Lösungsweges: ein sicheres Beherrschen der vollständigen Induktion

Alle diese Lernvoraussetzungen liegen im Bereiche der Elementarmathematik. Trotzdem scheidet eine derartige Vorgehensweise im Mittelstufenunterricht (fast aller Schularten) zweifellos aus.

Im folgenden soll nun aufgezeigt werden, dass und wie der ursprüngliche „naive" Ansatz durch eine computerorientierte Vorgehensweise praktikabel gemacht werden kann. Damit ist insbesondere auch gemeint, dass ein Lösungsverfahren erarbeitet wird, das ein „operatives" Variieren[5] der Konditionen einer Annuitätentilgung ermöglicht.

Voraussetzung ist dabei, dass die oben gar nicht explizit formulierte Lösungsstrategie nun offengelegt wird. Eine derartige vollständige Beschreibung eines Lösungsverfahrens als Folge von endlich vielen eindeutig bestimmten Elementarschritten wird als Algorithmus bezeichnet. Für das Tilgungsproblem könnte er etwa folgendermaßen lauten:

[5] Zum operativen Prinzip vgl. [Wittmann 1976]

```
Algorithmus AnnuitätenTilgung(D, P, A);
  Erläuterungen:  D: Höhe des Anfangsdarlehens;
                  P: Zinssatz (in Prozent);
                  A: Annuität;
  Weise der Hilfsvariablen J den Wert Null zu.
  Solange  D > 0, führe folgendes aus:
    [ Erhöhe den Wert von J um 1.
      Berechne die angefallenen Zinsen:
               Z  :=  D * P / 100.
      Berechne die neue Restschuld:   R  :=  D + Z - A.
      Ersetze  D  durch  R.
      (Eventuell als Option:  Drucke J, Z, D)  ]
  Gib den Wert von J (Laufzeit) als Funktionswert zurück.
Ende (AnnuitätenTilgung).
```

Es bereitet keine Mühe, diesen Algorithmus in ein Programm einer beliebigen höheren Programmiersprache zu übertragen. Wenn dies geschehen ist, kann der ursprüngliche naive Ansatz mit Hilfe des Computers voll zu Ende geführt werden. Man erhält (wenn man die Option „Tilgungsplan ausdrucken“ gewählt hat) eine Tabelle der folgenden Art, aus der man dann die Laufzeit direkt ablesen kann:

verstrichene Zeit	angefallene Zinsen	alte Restschuld plus Zinsen	neue Restschuld
0			100.000,00
1	5.000,00	105.000,00	95.000,00
2	4.750,00	99.750,00	89.750,00
3	4.487,50	94.237,50	84.237,50
4	4.211,88	88.449,38	78.449,38
5	3.922,47	82.371,84	72.371,84
6	3.618,59	75.990,44	65.990,44
7	3.299,52	69.289,96	59.289,96
8	2.964,50	62.254,46	52.254,46
9	2.612,72	54.867,18	44.867,18
10	2.243,36	47.110,54	37.110,54
11	1.855,53	38.966,06	28.966,06
12	1.448,30	30.414,37	20.414,37
13	1.020,72	21.435,09	11.435,09
14	571,75	12.006,84	2.006,84
15	100,34	2.107,18	(-7.892,82)

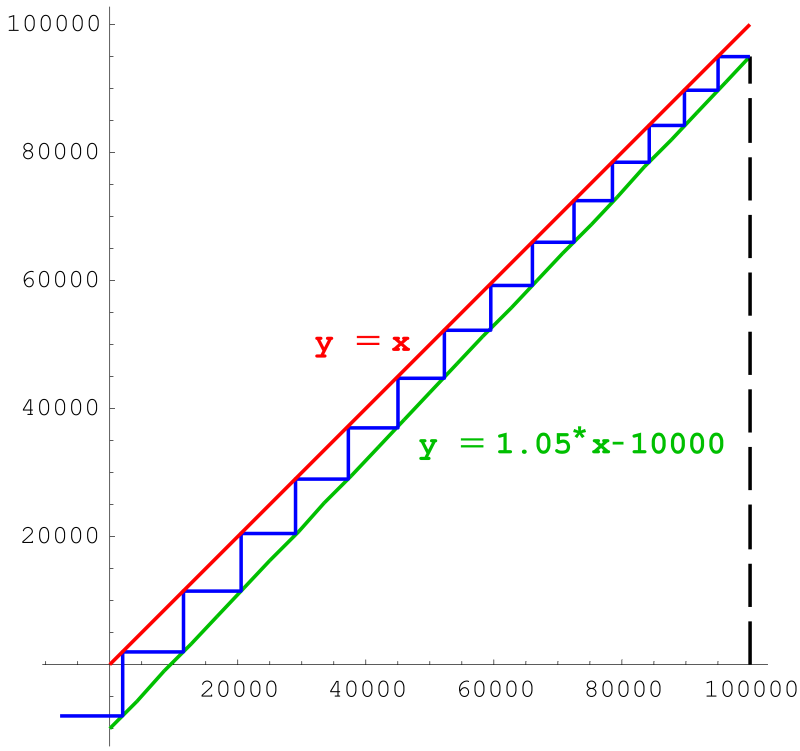
Die nach 15 Jahren bestehende Restschuld von DM 2.107,18 wird i.a. durch eine Schlusszahlung getilgt.

Die kognitiven Voraussetzungen zur Durchführung dieses Lösungsverfahrens sind im Vergleich zu der eben skizzierten „Formel-Methode“ extrem bescheiden:

* Sicherheit im Bereiche der Grundrechenarten und des Prozentrechnens; (auch mit Variablen)
* die Fähigkeit, Algorithmen elementarster Natur zu formulieren
* die Fähigkeit, elementare Algorithmen in ein lauffähiges Computerprogramm umzusetzen.

Der Erwerb dieser Fähigkeiten liegt nun nicht etwa „quer“ zu den sonstigen Zielen des Mathematikunterrichts; er harmoniert im Gegenteil sehr gut damit. So ist das Formulieren von Algorithmen schon seit jeher ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts – auch ohne Computer. Man denke etwa an die Formulierung von Konstruktionstexten im Geometrieunterricht. Verbale Formulierungen aufnehmen, verstehen und verarbeiten können, Lösungen in verbaler Form aufschreiben können: dies sind (und waren schon immer) wichtige Ziele des Mathematikunterrichts, mit denen einem inhaltsleeren Jonglieren mit Formeln vorgebeugt werden soll. Diese Ziele sind unverzichtbar, auch wenn diese Verbalisierungen von den Schülern als unbequem angesehen werden.

Wenn es auf die numerische Genauigkeit nicht allzu sehr ankommt, kann das algorithmische Lösungsverfahren übrigens auch in der folgenden graphischen Variante durchgeführt werden (vergleiche z.B. [Dürr / Ziegenbalg 1989]). Die Laufzeit ergibt sich dabei als die Anzahl der „Stufen“ in dem folgenden Diagramm. Auch hierbei wird die enge Verzahnung dieser Methode mit anderen Inhalten des Mittelstufenunterrichts (Koordinatendarstellungen, lineare Funktionen, Geradengleichung, ...) deutlich.



Verglichen mit den kognitiven Voraussetzungen, welche für die vorher beschriebene „Formel-Lösung“ notwendig sind, müssen die Lernvoraussetzungen für die „algorithmische Lösung“ als fast trivial bezeichnet werden. Die außerordentliche Elementarität der algorithmischen Lösung lässt manchen Kollegen geradezu erschrecken („Wo müssen denn die Schüler da überhaupt noch denken?“ bzw. „Wo kommen wir denn da hin, wenn wir altbewährte, klassische Lösungsverfahren derart trivialisieren?“). Ich kann mich diesen Bedenken nicht anschließen. Denn die Frage ist nicht, ob man zwischen einer intellektuell schwierigeren und einer intellektuell einfacheren Methode wählen sollte, sondern ob man es in Kauf nehmen will, dass ein wichtiger mathematischer Sachverhalt des Alltags- und Berufslebens, wie die Tilgung von Darlehen, für viele Menschen ein Buch mit sieben Siegeln bleiben wird (so dass sie dem „Herrschaftswissen“ der Kreditinstitute ausgeliefert sind), weil ihnen der intellektuell schwierigere Weg aus Mangel an entsprechenden Lernvoraussetzungen verschlossen bleibt. Schließlich kann ich auch in der Eigenschaft „schwierig zu sein“ nicht eo ipso einen besonderen Wert erkennen – vor allem dann, wenn es auch einfacher geht; an wirklich schwierigen Problemen gibt es in der Mathematik bekanntlich ja keinen Mangel. Und es entspricht auch einer guten mathematischen Tradition, nicht mit Kanonen auf Spatzen zu schießen.

Die algebraische Formel-Lösung – etwa in der Form von (Tilg-4) bzw. (Tilg-5) – soll damit jedoch nicht als sinnlos abgetan werden. Auch sie hat ihre Berechtigung. Wir kommen in den Schlussbemerkungen darauf zurück. Für eine erste (und für viele Schüler zugleich auch letzte) Behandlung des Themas ist der elementarere algorithmische Zugang m.E. jedoch erheblich besser geeignet.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass es eine Illusion wäre, zu glauben, die Formel (Tilg-5) liefere die Lösung „auf einen Schlag“. Wenn man den Rechenaufwand der algorithmischen Lösung und der Formel-Lösung vergleicht, muss man auch der Frage nachgehen, wie der Wert der Logarithmusfunktion in der Gleichung (Tilg-5) zustande kommt. Dies geschieht natürlich durch ein Näherungsverfahren – und zwar im Normalfall durch eines, dessen Rechenaufwand erheblich höher ist als der des (von vorn herein endlichen !) iterativen Durchrechnens des Tilgungsplanes bei der algorithmischen Lösung.

Darüber hinaus kann die Formel-Lösung im Zusammenhang mit der in den meisten Softwareprodukten verwendeten Gleitkommaarithmetik zu störenden Rechenfehlern führen (vgl.: [Ziegenbalg 1996], Kapitel 6: Korrektheit von Computerergebnissen).

8.2 Variationen des Problems

Die wesentlichen Daten beim Annuitäten-Darlehen sind: die Kredithöhe, der Zinssatz, die Annuität und die Laufzeit. Gibt man jeweils drei von diesen Daten vor, so bestimmt sich daraus die vierte Größe zwangsläufig. Im „Normalfall“ sind die Kredithöhe, der Zinssatz und die Annuität die frei wählbaren Größen; die Laufzeit ist damit automatisch festgelegt. (Diesen Fall haben wir oben ausführlich diskutiert.)

Je nach Interessen- und Problemlage kann es aber auch vorkommen, dass eine andere „Dreiergruppe“ dieser vier Größen gegeben ist. Durch systematisches Variieren der Bedingungen erhält man so die folgenden weiteren drei Problemtypen:

Zweiter Problemtyp („Welches Darlehen kann ich mir leisten?“): Für einen Kredit seien Laufzeit, und Zinssatz festgelegt. Der Kreditnehmer kann nur eine bestimmte Annuität A verkraften. Wie hoch darf dann das Darlehen maximal sein, dem diese Konditionen zugrunde liegen?

Dritter Problemtyp: Die Darlehenshöhe, der Zinssatz und die Laufzeit liegen fest. Wie groß ist die Annuität?

Vierter Problemtyp: Die Darlehenshöhe, die Annuität und die Laufzeit liegen fest. Wie groß ist der Zinssatz?

Wenn man davon ausgeht, dass die Gleichung (Tilg-4) trotz der damit verbundenen Probleme bei den Lernvoraussetzungen erarbeitet worden ist, dann erhält man eine Antwort auf diese Fragen durch Auflösung dieser Gleichung nach der jeweils gesuchten Variablen. Im Falle der Problemtypen 2 und 3 sind dies die Variablen D_0 und A, und die Auflösung nach diesen Variablen bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. Im Falle des vierten Problemtyps ist die Auflösung nach q dagegen im allgemeinen nicht möglich. Denn die Auflösung der Gleichung (Tilg-4) nach q bedeutet die Lösung einer Polynomgleichung, deren Grad i.a. größer als 5 ist. Dies ist aber, abgesehen von Sonderfällen, nur noch mit Methoden der numerischen Approximation möglich.

Die algorithmische Lösung des Tilgungsproblems lässt sich andererseits als Baustein verwenden, um zu einer völlig elementaren Lösung auch des vierten Problemtyps zu kommen. Man setzt dazu die Funktion `AnnuitätenTilgung` als Modul in ein Suchprogramm zur näherungsweisen Bestimmung der gefragten Größe ein.

```
Algorithmus Zinssatz(D, A, L);
  (* Bisektionsverfahren *)
  Setze die Hilfsvariablen  PMin auf 0  und
                            PMax auf 100.
  Wiederhole
    [ Ersetze P durch (PMin + PMax) / 2.
      Ermittle die Laufzeit K von AnnuitätenTilgung(D, P, A);
      Wenn  K > L,  dann ersetze PMax durch P.
      Wenn  K < L,  dann ersetze PMin durch P.  ]
  bis K = L.
  Gib den Wert von P als Funktionswert zurück.
Ende (Zinssatz).
```

Es kam bei der Formulierung des Suchalgorithmus nicht primär auf die elegante Formulierung oder gar auf die Laufzeiteffizienz an, sondern auf die Elementarität und Durchsichtigkeit des Algorithmus, die in der Tat kaum zu überbieten sein dürften. (Auch die Tatsache, dass es in Abhängigkeit von der zur Schlusszahlung vorgesehenen letzten nichtnegativen Restschuld i.a. eine ganze Bandbreite möglicher Zinssätze gibt, welche zu der vorgeschriebenen Laufzeit führen, halte ich nicht für gravierend. Denn diese Bandbreite kann durch die Forderung „Schlusszahlung möglichst klein“ bzw. „Schlusszahlung gleich Null“ beliebig schmal gemacht werden.)

Das dargestellte Verfahren dient u.a. auch der Verfolgung des Lernziels „systematisches Suchen“ von Lösungen und ist auch an anderen Stellen des Mathematikunterrichts von Bedeutung; etwa bei der Bestimmung der Quadratwurzel bzw. allgemeiner bei der Behandlung von Intervallschachtelungen – besonders nach der Halbierungs-Methode (Bisektionsverfahren). Gelegentlich wird die Anwendung solcher Suchverfahren bei „ernsthaften“ Problemen als „nicht mathematisch genug“ kritisiert. Diese Kritiker übersehen dabei allerdings, dass die Auswertung der Logarithmus- und Exponentialfunktion, gegen deren Verwendung sie i.a. nichts einzuwenden haben, ebenfalls auf derartigen Suchverfahren basiert.

Auch der Algorithmus `Zinssatz` lässt sich ohne weiteres in praktisch jeder Programmiersprache in ein lauffähiges Programm umsetzen. Eine Klasse von Programmierwerkzeugen, die für derartige finanzmathematische Probleme besonders gut geeignet sind, sind die *Tabellenkalkulationssysteme*. Sie eignen sich aufgrund ihrer hochgradigen Interaktivität vor allem für das operative, experimentelle und explorative Arbeiten.

Die Umsetzung des Suchalgorithmus zur Ermittlung des Zinssatzes ist in Tabellenkalkulationsysstemen i.a. sogar in automatisierter Form möglich (z.B. in der Form einer expliziten Programmierung oder in der Form einer vom System angebotenen „Zielwertsuche“). Besonders reizvoll und im Rahmen einer „Lehr-Lernsituation“ erhellend ist es aber, diesen Suchprozess interaktiv „von Hand“ nachzuspielen.

Ein weiterer Vorteil des Programmierwerkzeugs „Tabellenkalkulationssystem“ liegt darin, dass die üblichen Ausnahmen, welche die Erstellung eines auf Formeln basierenden Modells oder eines klassischen Programms in sehr unangenehmer Weise komplizieren (wie z.B. die Berücksichtigung von Gebühren, Sonderzahlungen, speziellen Zahlungs- und Wertstellungsmodalitäten, ...), in der Regel sehr leicht in das jeweilige Tabellenkalkulationsblatt integriert werden können. Und schließlich: Im Vergleich zur Nutzung von „vorgefertigten Softwarepaketen“ hat der Nutzer zu jeder Zeit jeden Parameter und alle Wirkungsmechanismen des Modells im Griff; das Modell ist völlig transparent.

8.3 Begriffliche Vereinfachung durch Algorithmieren – am Beispiel des effektiven Zinssatzes bei Ratenkrediten

Wenn man bis zum Jahre 1981 einen Vertrag über einen Ratenkredit mit einer Bank abschließen wollte, so konnten die Vertragsverhandlungen zwischen dem Kunden und der Bank etwa folgendermaßen ablaufen:

Kunde: Ich benötige einen Kredit in Höhe von 12.000,00 DM für die Beschaffung einer Möbelgarnitur.

Bank: Ist im Prinzip kein Problem, wir kennen Sie ja als guten Kunden. Es sind natürlich ein paar kleinere Formalitäten zu erledigen.

Kunde: Wie sehen denn die Konditionen im Einzelnen aus?

Bank:

Kredithöhe	12.000,00
Gebühren (2%)	240,00
Gesamtschuld	12.240,00

Die Rückzahlung der Gesamtschuld erfolgt in 36 monatlich zu zahlenden Raten in Höhe von jeweils 420,00 DM.

Die Ratenzahlungen enthalten einen Zinsanteil von 80,00 DM. Dies entspricht einem Jahreszinssatz von 8 %.

Probe: (12.000,00 DM * 8 %) / 12 = 80,00 DM.

Die Gesamtzinsen machen also 36 * 80,00 DM = 2.880,00 DM aus.

Gesamtschuld + Gesamtzinsen: 12.240,00 DM + 2.880,00 DM = 15.120,00 DM

Gesamtrückzahlung: 36 * 420,00 DM = 15.120,00 DM

Dies klingt alles plausibel; der Kunde schließt den Kreditvertrag ab und zahlt die Raten zurück. Der dabei entstehende Geldfluss kann etwa folgendermaßen dargestellt werden.

Zahlung Nr.	**Betrag**
1	420,00
2	420,00
3	420,00
...	...
34	420,00
35	420,00
36	420,00
Gesamtrückzahlung	15.120,00

Tabelle 1

Nachdem der Kunde einige Zahlungen geleistet hat, kommt er ins Grübeln: Wie war das eigentlich mit dem Zinssatz von 8 % ? Der daraus berechnete Zinsanteil von 80,00 DM an jeder Ratenzahlung ist zwar im Hinblick auf die erste Ratenzahlung korrekt, aber danach verringert sich doch die Höhe der Restschuld – und zum Ende des Abzahlungsprozesses ist die Restschuld nahe bei Null. Irgend etwas stimmt mit den 80,00 DM für die Zinsen nicht !

Eine Nachfrage bei der Bank bringt nur das Ergebnis, dass die 8 % eben der sogenannte *nominelle* Zinssatz seien – und so wie bei diesem Kreditvertrag würde stets verfahren; so sähen es die gesetzlich festgelegten Verordnungen vor.

Der Versuch des Kunden, mit der Bank eine inhaltliche Diskussion über die Frage zu führen, inwieweit der nominelle Zinssatz eine korrekte oder eine geschönte Angabe sei, verläuft ergebnislos.

Die Kritik der Kunden häufte sich. Als im Laufe der Zeit die Unhaltbarkeit der alten Preisangabenverordnung (nach der sog. *Uniformmethode*) immer deutlicher wurde, entschloss sich der Gesetzgeber, eine neue Preisangabenverordnung zu erlassen, die dann im Jahre 1981 in Kraft trat.

Der *effektive Zinssatz* eines Ratenkredits berechnet sich nach der Preisangabenverordnung von 1981 folgendermaßen (vgl. [Bank-Verlag 1980]):

> Es seien K die Höhe des Kredits, r die monatliche Rate, J die Anzahl der vollen Laufzeitjahre, m die Zahl der Restmonate, i eine formale Variable und $q := 1+i$. Man suche eine Lösung i der Gleichung
>
> $$\left(K \cdot q^J - r \cdot \left(\frac{11}{2} + \frac{12}{i}\right) \cdot (q^J - 1)\right) \cdot \left(1 + \frac{m}{12} \cdot i\right) - r \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{24} \cdot i\right) = 0 \qquad \text{(P)}$$
>
> Dann ist $e := 100 \cdot i$ der **effektive Zinssatz** des Ratenkredits.

Im obigen Beispiel ergibt das einen effektiven Jahreszinssatz von 15,39 %.

Es gibt jedoch Probleme mit der neuen Preisangabenverordnung und der Gleichung (P):

- Die Begründung für die Gleichung ist nicht einfach. Die Rechtfertigung der Gleichung ist auf der Basis der üblichen Mittelstufenkenntnisse in Mathematik praktisch nicht nachzuvollziehen.

  Kaum jemand ist in der Lage, die Gleichung (P) zu erläutern, geschweige denn inhaltlich zu begründen. Bei den Banken würde man jedenfalls vergeblich suchen; dort verwendet man in der Regel (inzwischen auch computerisierte) Tabellen, denen die entsprechenden Werte entnommen werden. Ansonsten beruft man sich dort auf Expertenwissen: *„Das haben Spezialisten so ausgerechnet; das wird wohl schon stimmen.“*
- Gleichung (P) lässt sich in der Regel nicht in geschlossener Form nach der Variablen i auflösen. Man findet mit Hilfe geeigneter Iterationsverfahren bestenfalls approximative numerische Lösungen.
- Am gravierendsten ist jedoch der Einwand: Selbst wenn man die Versuche, die neue Preisangabenverordnung zu begründen, studiert und verstanden hat, dann bleiben immer noch Zweifel, ob diese Methode als ein angemessenes Verfahren zur Bestimmung des „effektiven“ Zinssatzes für Ratenkredite angesehen werden kann (vgl. [Kirsch 1982, Teil 2 und Teil 3]).

An diesem Beispiel lässt sich besonders gut zeigen, wie sich die Situation durch eine auch nur minimale Vertrautheit mit den heuristischen Grundprinzipien des algorithmischen Problemlösens auf der Basis bescheidenster mathematischer Vorkenntnisse erhellen lässt.

Das Hauptproblem bei der Angabe des Zinssatzes von Ratenkrediten liegt darin, dass der ursprünglich verwendete (nominelle) pro-Monat-Zinssatz die erfolgten Teilrückzahlungen unberücksichtigt ließ. Bei der unter 8.1 diskutierten Kreditform „Annuitäten-Tilgungs-Verfahren“ tritt dieses Problem dagegen gar nicht auf, denn dort erfolgt die Berechnung der angefallenen Zinsen stets auf der Basis der *aktuellen* Restschuld.

Dem Geldfluss (vgl. *Tabelle 1*) sieht man nicht an, ob ihm ein Ratenkredit-Verfahren oder ein Annuitäten-Tilgungs-Verfahren zugrunde gelegen hat. Was liegt also näher, als schlichtweg einmal zu vergessen, dass es sich bei *Tabelle 1* um einen Ratenkredit handelt und sich vorzustellen, es handle sich statt dessen um den Tilgungsplan einer Annuitäten-Tilgung. Von dieser Annuitäten-Tilgung sind die folgenden Parameter bekannt: die Höhe K des Anfangskredits (12.240,00 DM), die Höhe A der Annuität (420,00 DM) und die Laufzeit L (36 Monate). Die Zahlungen erfolgen monatlich.

Unbekannt ist zunächst der (Monats-) Zinssatz, der sich aber leicht durch das in 8.2 beschriebene Suchverfahren ermitteln lässt. Dies führt zur folgenden Definition eines neuen „wirklichen" effektiven Zinssatzes:

> *Annuitäten-Tilgungs-Methode*: Der **wirkliche effektive Monatszinssatz** m eines Ratenkredits ist derjenige Zinssatz, bei dem der (monatliche) Geldfluss des Ratenkredits mit dem Geldfluss des entsprechenden Annuitäten-Tilgungs-Darlehens übereinstimmt.
>
> Ermittelt wird dieser Zinssatz mit Hilfe der oben dargestellten („kanonischen") Algorithmen `Zinssatz` und `AnnuitätenTilgung`.
>
> Der **wirkliche effektive Jahreszinssatz** p eines Ratenkredits berechnet sich dann nach der untenstehenden Formel (GW-2).

Zwischen dem Monatszinssatz m und dem entsprechenden Jahreszinssatz p gilt nach dem Gesetz des *geometrischen Wachstums* die Beziehung:

$$(1+\frac{p}{100}) = (1+\frac{m}{100})^{12} \qquad \text{(GW)}$$

Also:

$$p = 100 \cdot \left((1+\frac{m}{100})^{12} - 1 \right) \qquad \text{(GW-2)}$$

Aus Gründen der Tradition wird von den Banken und Sparkassen aber häufig noch die (sachlich untaugliche) Formel

$$p = 12 \cdot m \qquad \text{(SK)}$$

verwendet. Man bezeichnet diese Art der Umrechnung von Monats- in Jahreszinssatz auch als „Sparkassenkonvention". Ursprünglich lag der Sinn der Sparkassenkonvention darin, dass die Formel (SK) erheblich leichter auszuwerten ist als die Formel (GW). Heutzutage sollten diese Probleme aber keine Rolle mehr spielen; die Sparkassenkonvention hat ihre inhaltliche Berechtigung verloren – es ist nur noch eine reine Konvention.

Wendet man das Annuitäten-Tilgungs-Verfahren auf den eingangs (in *Tabelle 1*) beschriebenen Ratenkredit an, so erhält man einen wirklichen effektiven Monatszinssatz von 1,18999 %. Dies entspricht auf der Basis des geometrischen Wachstums einem wirklichen effektiven Jahreszinssatz von 15,25 % (nach der Sparkassenkonvention wären es 14,28 %).

Nach der Preisangabenverordnung von 1981 ergibt sich ein effektiver Zinssatz von 15,39 %. Diese Preisangabenverordnung hat also nicht den Effekt, dass die Zinssatz-Angaben „geschönt" werden (wie es bei der alten Uniformmethode noch der Fall war). Sie ist einfach nur unangemessener und ungeschickter als die hier dargestellte Annuitäten-Tilgungs-Methode.

8.4 Zum Aspekt der Überprüfung eigener und fremder Problemlösungen

Es passiert immer wieder, dass mathematische Lösungen gelegentlich nur teilweise richtig, unplausibel, wenig sinnvoll, fragwürdig, lückenhaft oder auch schlichtweg falsch sind. Dies betrifft sowohl die hohen Sphären der aktuellen mathematischen Forschung als auch die Niederungen der „Gebrauchsmathematik für Jedermann im Alltagsgeschäft". Es ist also eine gute Praxis, eigenen und fremden Lösungsvorschlägen mit einer gesunden Portion Skepsis zu begegnen und immer wieder nach Möglichkeiten der Überprüfung zu suchen. Dabei spielt auch die Gültigkeit der vorgeschlagenen Lösung in Rand- und Sonderfällen eine wichtige Rolle.

Auch hierbei weist die algorithmische Darstellung Vorteile auf. Nehmen wir einmal an, jemand will den effektiven Zinssatz eines Ratenkredits nach der Formel (P) ermitteln. Dazu muss er ein Näherungsverfahren in Gang setzen, mit dem er denjenigen Wert der Variablen i bestimmt, der die linke Seite von (P) zu Null macht. In diesem Prozess gibt es eine ganze Reihe möglicher Fehlerquellen; angefangen mit der Möglichkeit, dass die Formel in der Quelle, aus der er sie entnommen hat, falsch gesetzt worden ist (dies ist gar nicht so unwahrscheinlich wie es zunächst aussehen mag) über die Möglichkeit, dass er (P) falsch auswertet oder dass die Logik der Approximation nicht stimmt bis hin zur Möglichkeit, dass sich je nach verwendetem Werkzeug (z.B. Taschenrechner) Rundungsfehler akkumulieren und das „wahre“ Ergebnis stark verzerren. Nehmen wir weiterhin an, dass dieser jemand am Ergebnis merkt, dass „etwas nicht stimmen kann“. (Dass es solche Fälle von „unplausiblen“ Ergebnissen gibt, wird z.B. in [Jahnke 1987] aufgezeigt und in [Ziegenbalg 1988] diskutiert.) Welche Möglichkeiten hat er zu Überprüfung seiner Vorgehensweise? Er muss versuchen, die Einzelschritte seines Verfahrens zu überprüfen; angefangen mit der Frage, ob er die Formel richtig verwendet und interpretiert hat bis hin zur Frage, ob sein Approximationsverfahren richtig „läuft“. All dies ist zweifellos möglich; aber nicht auf der Basis der intellektuellen Voraussetzungen, welche etwa im Mittelstufenunterricht bereitgestellt werden.

Die oben dargestellte Methode der algorithmische Ermittlung des effektiven Zinssatzes kann dagegen auch mit den Kenntnissen des Mittelstufenunterrichts kritisch verfolgt und im konkreten Fall verifiziert werden. Entscheidend dafür ist, dass im „Kernalgorithmus“ `AnnuitätenTilgung` nur elementarste arithmetische und logische Operationen vorkommen, die man zudem Schritt für Schritt durch Ausdrucken des kompletten Tilgungsplans überprüfen kann. Auch die Logik des Suchalgorithmus Zinssatz ist wegen der Anwendbarkeit naheliegender Monotoniebetrachtungen erheblich durchsichtiger als etwa die Logik eines allgemeinen Approximationsverfahrens zur Ermittlung der Lösung i der Gleichung (P). Wegen dieser realen (oder auch nur potentiellen) besseren Überprüfbarkeit wird man i.a. einer Lösung, die durch Anwendung eines elementaren algorithmischen Verfahrens zustande gekommen ist, mehr Vertrauen entgegenbringen als einer Lösung, die mit Hilfe einer undurchsichtigen geschlossenen Formel und eines nicht oder nur halb verstandenen Approximationsverfahrens ermittelt wurde.

8.5 Schlussbemerkungen

Der Einsatz algorithmischer Darstellungsformen ermöglicht eine besonders elementare, konkrete und konstruktive Formulierung mathematischer Problemlösungen. In der Vergangenheit gab es kaum geeignete Werkzeuge, um beliebige Algorithmen in einer praktikablen Form abzuarbeiten. Deshalb musste man versuchen, andere Darstellungsformen zu finden. Dies ist sicher eine der Ursachen für die Fixierung ganzer mathematischer Schulen auf die Suche nach „geschlossenen Darstellungen“. Man denke z.B. auch an die Darstellung der Fibonacci-Zahlen mit Hilfe der Binet'schen Formel. Diese geschlossenen Darstellungen sind durchaus von innermathematischem Interesse. Sie eignen sich häufig z.B. besonders gut für Symmetriebetrachtungen oder zur globalen Klassifizierung des jeweiligen Funktionstyps. Aber sie stellen i.a. wesentlich höhere Anforderungen an die Lernvoraussetzungen, die zum Verständnis dieser Vorgehensweisen notwendig sind als die rekursiven algorithmischen Formulierungen. Darüber hinaus eignen sich geschlossene Darstellungen häufig nicht gut zur numerischen Auswertung – und zwar sowohl was die Laufzeit als auch was die Fehlertoleranz betrifft.

Durch die Möglichkeit, Algorithmen von Computern abarbeiten zu lassen, wird die algorithmische Methode *praktikabel*. Es besteht nicht mehr die Notwendigkeit, möglichst frühzeitig auf geschlossene Darstellungen loszusteuern – das zu bearbeitende Problem kann zunächst algorithmisch auf einer sehr viel elementareren Stufe erschlossen werden. Häufig werden Anwendungssituationen, wie oben am Beispiel der Annuitätentilgung gezeigt, erst so einer breiteren Gruppe von Schülern zugänglich.

Das Beispiel des Effektivzinssatzes zeigt, dass die algorithmische Methode nicht nur für die Formulierung von Problemlösungen und zur konkreten numerischen Auswertung von Bedeutung ist, sondern dass sie auch dazu beitragen kann, *Begriffe* (wie z.B. den des effektiven Zinssatzes) zugänglich und auf elementarer Basis verständlich zu machen. Algorithmische, computerorientierte Methoden des mathematischen Arbeitens können so dazu beitragen, einer breiteren Öffentlichkeit zu Einsichten und zu einer Urteilsfähigkeit in Anwendungsbereichen zu verhelfen, die ihr bei einer Beschränkung auf traditionelle Verfahren verschlossen bleiben würden.

Besonders im Finanz- und Kreditgeschäft kommt dies immer wieder vor, wie die folgende Pressemeldung zeigt (die damit verbundene kleine Werbung für die Sparda-Bank sei mir an dieser Stelle bitte nachgesehen – in diesem Fall handelt es sich ja in der Tat eher um eine legitime und nützliche Information).

Zinsberechnung bei Krediten

Tilgungsklauseln im Rechtsstreit

Das Landgericht Stuttgart hat kürzlich eine Entscheidung gefällt, die vielen Darlehensnehmern veränderte Kreditbedingungen bringen kann.

Viele Hypothekenkredite enthalten eine Vertragsklausel, die sich auf die Berücksichtigung der geleisteten Zahlungen bezieht. Das heißt, wann die Zahlung eines Tilgungsbetrages die Schuldsumme mindert, auf die sich der berechnete Zinsbetrag bezieht.

Beanstandet wird in diesem Verfahren die bisher vielfach übliche jährlich einmalige Verrechnung von Tilgungen nur zum Jahresende. Das bedeutet nämlich, daß der Kunde noch Zinsen auf bereits getilgte Kreditbeträge entrichtet.

Eine solche Klausel benachteiligt nach Ansicht des Gerichtes den Darlehensnehmer erheblich. Setzt sich diese Rechtsauffassung durch (das Urteil ist noch nicht rechtskräftig), dann wird die Transparenz von Kreditkosten steigen. Dem Kunden würde es damit leichter fallen, die Angebote von Baufinanzierungen zu vergleichen.
Für die Kreditverträge der Kunden bei der Sparda-Bank hat dieses Urteil keine Auswirkungen. Der beanstandete Passus ist in den Verträgen nicht enthalten. Bei der Sparda-Bank wird seit jeher jede Tilgung sofort angerechnet und folglich auch der Zins immer nur für den jeweils verbleibenden Restkredit berechnet. Es kommt bei einer Finanzierung eben nicht nur auf den Zinssatz an.

Interessant ist der Umstand, der zu diesem Gerichtsverfahren geführt hatte: Ein Kreditnehmer hatte seinen persönlichen Kredit mit Hilfe eines Kleincomputers und einem kleinen selbstgeschriebenen Programm (damals noch in BASIC; Tabellenkalkulationssoftware gab es noch nicht) nachgerechnet. Dabei waren ihm Diskrepanzen zu den Daten aufgefallen, die er auf den entsprechenden Kontoauszügen seiner Bank gefunden hatte. Hartnäckiges Nachbohren führte zu der Erkenntnis, dass die Ursache der Diskrepanz darin lag, dass die Bank „unterjährige“ Tilgungsleistungen des Kunden nicht bei der Zinsberechnung berücksichtigte. Dagegen klagte dann der Kunde – mit Recht und mit Erfolg.

Die unterschiedlichen Verfahren für die Buchung der Tilgungsbeträge können bei längeren Laufzeiten zu erheblichen Differenzen führen.

Ein Beispiel: Ein Darlehen mit den Ausgangsdaten

Anfangsdarlehen:	100.000,00 DM
Jahres-Zinssatz:	6,19 %
Annuität:	845,00 DM pro Monat (10.140,00 DM pro Jahr)

ist bei monatlicher Zahlungsweise und monatlicher Aktualisierung der Restschuld nach genau 15 Jahren getilgt. Unterschiedliche (verzögernde) Verfahrensweisen bei der Verbuchung der Tilgungsbeträge wirken sich jedoch folgendermaßen aus:

Verbuchung der Tilgungsbeträge	**Restschuld nach 15 Jahren**
monatlich	0,00 DM
vierteljährlich	1.231,14 DM
halbjährlich	3.070,13 DM
jährlich	6.720,29 DM

Je höher der Zinssatz ist, desto stärker wird dieser Effekt sichtbar. Einzelne Kunden klagten gegen die versteckt ausgeübte Praxis der verzögerten Verbuchung und bekamen Recht (siehe obige Pressemitteilung „Tilgungsklauseln ...“).

Bezeichnend ist, dass es die Verfügbarkeit von (leicht zu programmierenden) Kleincomputern war, die zu diesem Ergebnis führte. Die Kunden hätten entsprechendes ja im Prinzip auch mit Hilfe der geschlossenen Formel tun können – nur kein einziger hat dies wirklich getan.

In diesem Sinne kann der Einsatz algorithmischer, computerorientierter Methoden auch die *genetische Methode* des mathematischen Arbeitens und Problemlösens unterstützen, die nach E. Wittmann dadurch charakterisiert ist, dass sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist (vgl. [Wittmann 1976], S. 106).

Man muss sich allerdings vor der Illusion hüten, zu glauben, dies geschehe alles automatisch, sobald jemand nur auf den Tasten eines Computers tippt. Es erstaunt mich immer wieder zu sehen, dass Chancen zur Elementarisierung auch von solchen Autoren nicht erkannt bzw. nicht genutzt werden, denen das Lösen von Problemen mit Hilfe des Werkzeugs Computer durchaus vertraut sein müsste. Die Möglichkeiten zur Elementarisierung werden nicht automatisch schon dann genutzt, wenn die entsprechenden Werkzeuge bereit stehen. Das Denken „in geschlossenen Formeln“ scheint, wohl nicht zuletzt auch bedingt durch traditionelle Formen der mathematischen Bildung, tief verwurzelt zu sein.

Darüber hinaus gibt es in manchen Anwendungsbereichen durchaus auch eine Tendenz, sich unnötigerweise mit möglichst furchterregenden mathematischen Formeln zu „schmücken“. Dies signalisiert Tiefe und Bedeutungshaltigkeit und schützt vor lästigen Nachfragen allzu kecker Laien.

Verständnis und Bewusstsein für die Chancen zur Vereinfachung und zur Erhöhung der Transparenz durch algorithmische und computerorientierte Methoden müssen vielfach erst noch entwickelt werden.

Literaturhinweise

Bank-Verlag: Erläuterungen zur Effektivverzinsung von Konsumenten-Ratenkrediten mit Monatsraten und p.M.-Zinssatz; Bank-Verlag, Köln 12/80

Becker G.: Zu der Verordnung über die Berechnung der Effektiv-Verzinsung mit Wirkung vom 1.1.1981; mathematica didactica, 5, 1982, 43-49

Dibbern K.: Effektivverzinsung von Ratenkrediten; Die Bank – Zeitschrift für Bankpolitik und Bankpraxis, Nummer 9, September 1980

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Mathematik für Computeranwendungen – Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen; Paderborn 1989

Edwards H. M.: An Appreciation of Kronecker, Mathematical Intelligencer, 1, 1987, 28–35

Engel A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt; Klett Verlag, Stuttgart 1977

Engel A.: Mathematisches Experimentieren mit dem PC; Klett Verlag, Stuttgart 1991

Enzensberger H. M.: Gedichte 1955-1970, suhrkamp taschenbuch 4, 1971

Euklid: Die Elemente, Buch I-XIII; Friedr. Vieweg Verlag, Braunschweig 1973 und Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1991

Ganzhorn K. / Walter W.: Die geschichtliche Entwicklung der Datenverarbeitung; IBM Deutschland, München 1975

Hermes H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit; Springer-Verlag, Berlin 1971 (2. Aufl.)

Jacobs K.: Resultate – Ideen und Entwicklungen in der Mathematik: Band 2: Der Aufbau der Mathematik; Vieweg Verlag, Braunschweig 1990

Jahnke T.: Überraschungen bei der Berechnung des „Effektiven Zinssatzes“; Journal für Mathematik-Didaktik, 8, 1987, 191-204

Kirsch A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht; Didaktik der Mathematik, 4, 1976, 257-284

Kirsch A.: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht; Didaktik der Mathematik, 2, 1977, 87-101

Kirsch A.: Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten;
Teil 1: Praxis der Mathematik, 24 (1982), 65-71
Teil 2: Praxis der Mathematik, 24 (1982), 164-172
Teil 3: Praxis der Mathematik, 25 (1983), 73-77

Minsky M.: The Society of Mind; New York 1985:

Steen L. A.: Mathematics Today; Springer-Verlag, New York 1978

Vollrath H.-J.: Die ärgerlichen sieben Jahre, DMV-Mitteilungen 1, 1996, 14–19

Wittmann E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1976

Wußing H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik; Berlin 1979

Wußing H.: Adam Ries; Leipzig 1989

Zemanek H.: AL-KHOREZMI – His Background, His Personality, His Work and His Influence; in: Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science (Hrsg. A. P. Ershov and D. E. Knuth), Berlin 1981

Ziegenbalg J.: Informatik und allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts; Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1983, 215-220

Ziegenbalg J.: Algorithmen als Hilfsmittel zur Elementarisierung mathematischer Lösungsverfahren und Begriffsbildungen, in: Computer in der Schule 2 (Hrsg. K.-D. Graf), Stuttgart 1988, 149-174

Ziegenbalg J.: Algorithmen – von Hammurapi bis Gödel; Heidelberg Berlin Oxford 1996

Kontakte zum Autor:

Email: ziegenbalg.edu@gmail.com

Homepage: https://Jochen-Ziegenbalg.GitHub.io/homepage-JZ