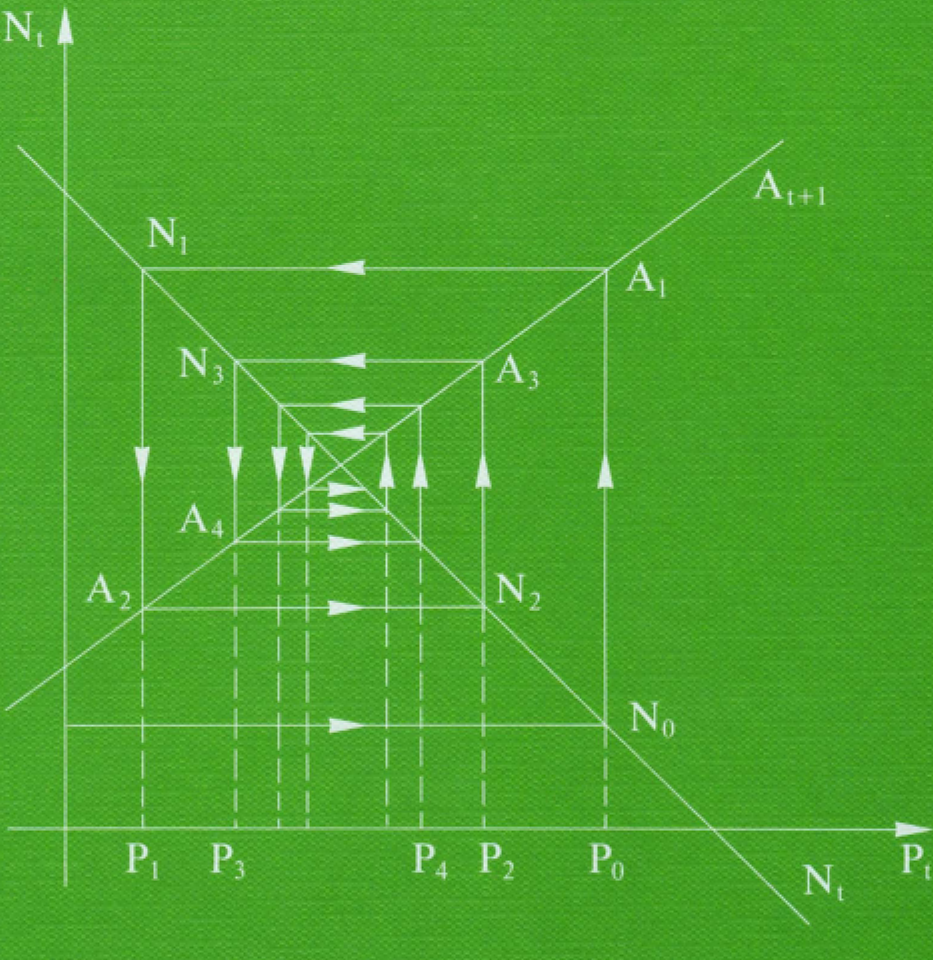
Rolf Dürr / Jochen Ziegenbalg

Mathematik für Computeranwendungen

Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen



Ferdinand Schöningh

Mathematik für Computeranwendungen

Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung
durch Differenzengleichungen

Rolf Dürr / Jochen Ziegenbalg

Mathematik für Computeranwendungen

Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen

2., verbesserte Auflage

Ferdinand Schöningh

Die Verfasser:

Rolf Dürr
Amundsenstraße 21
7410 Reutlingen 26

Prof. Dr. Jochen Ziegenbalg
Stelläckerstraße 17
7410 Reutlingen 3

2., verbesserte Auflage.
Die erste Auflage des Buches erschien unter dem Titel:
Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen

(Verlag Ferdinand Schöningh, Jühenplatz 1, D 4790 Paderborn)

Printed in Germany. Herstellung Ferdinand Schöningh.

Druck 5 4 3 2 1 Jahr 93 92 91 90 89

ISBN 3-506-37562-8

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 9

I Einführung in die Problematik 11

§ 1 Arithmetische Folgen 11

§ 2 Einige Bemerkungen zur Verwendung von Taschenrechnern und Computern 15

§ 3 Geometrische Folgen 19

3.1 Geometrisches Wachstum 19
3.2 Graphische Darstellung geometrischer Folgen 22

§ 4 Vollständige Induktion 25

§ 5 Folgen und Differenzen 31

5.1 Erste und zweite Differenzen 31
5.2 Folgen mit konstanten zweiten Differenzen 32
5.3 Höhere Differenzen 33
5.4 Umkehrung der Fragestellung: Folgen, die durch Polynome gegeben sind 36
5.5 Differenzen bei geometrischen Folgen 39

§ 6 Zum Begriff der Differenzengleichung 40

II Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung 46

§ 7 Die Tilgungsgleichung (lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten) 46

§ 8 Die Tilgungsgleichung im Lichte graphischer Verfahren 52

§ 9 Angebot-Nachfrage-Zyklen 61

§ 10 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen erster Ordnung 64

§ 11 Lineare inhomogene Differenzengleichungen erster Ordnung 72

11.1 Die empirische Methode zum Auffinden von Einzellösungen 72
11.2 Diskussion der Lösungsgesamtheit am Spezialfall der Tilgungsgleichung 75
11.3 Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen linearen Gleichung erster Ordnung 78
11.4 Die Methode der unbestimmten Koeffizienten, erläutert am Beispiel der Dynamischen-Prämien-Gleichung 80

§ 12 Homogenisierung 82

12.1 Konstante Inhomogenität 82
12.2 Lineare Inhomogenität 83
12.3 Polynomiale Inhomogenität 84

III Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung 87

§ 13 Die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung (lineare homogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten) 87

§ 14 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung 91
14.1 Der allgemeine Fall: nicht konstante Koeffizienten 91
14.2 Die Lösung der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung (im Falle verschiedener Wurzeln des charakteristischen Polynoms) 98
14.3 Ein Fundamentalsystem der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung im Falle einer Doppelwurzel des charakteristischen Polynoms 100

§ 15 Komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung 103
15.1 Die Problemstellung: komplexe Lösungsfolgen trotz reeller Koeffizienten 103
15.2 Kleiner Exkurs über komplexe Zahlen 104
15.3 Die Rückführung komplexer auf reelle Lösungsfolgen 108

§ 16 Lineare inhomogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung 112
16.1 Der allgemeine Fall: nicht konstante Koeffizienten 112
16.2 Die Lagerhaltungs-Gleichung (lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität) 113

IV Der Ausbau induktiver Techniken zur Behandlung von linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung 114

§ 17 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen beliebig hoher Ordnung 114
17.1 Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ 114
17.2 Lineare Gleichungssysteme 115
17.3 Die Grundzüge des Gaußschen Algorithmus 117
17.4 Bemerkung zu Determinanten 126
17.5 Das charakteristische Polynom 129
17.6 Mehrfachwurzeln der charakteristischen Gleichung 134
17.7 Komplexe Wurzeln 139

§ 18 Die Lösungsgesamtheit inhomogener linearer Differenzengleichungen 142
18.1 Konstante Inhomogenität 143
18.2 Das charakteristische Polynom im Prozeß der Homogenisierung 143
18.3 Diskussion von Beispielen und speziellen Funktionstypen 146
18.4 Versuchslösungen 151
18.5 Konvergenz, Stabilität, Gleichgewicht 153

V Innermathemathische Anwendungen 158

§ 19 Figurierte Zahlen 158
19.1 Polygonalzahlen 161
19.2 Pyramidalzahlen 162

§ 20 Summierung 163

§ 21 Flächeninhalte 165

§ 22 Irrfahrten 171

22.1 Die symmetrische Irrfahrt 171
22.2 Die asymmetrische Irrfahrt 175
22.3 Untersuchung von Strategien bei Glücksspielen 178

§ 23 Mittelwerte und gleitende Durchschnitte 183

§ 24 Das Verfahren von Heron 190

VI Wachstumsprozesse in rekursiver Darstellung 193

§ 25 Vorbemerkungen zu Fragen der Begriffsbildung; Abgrenzung der behandelten Problemkreise 193

§ 26 Einige Typen vorwiegend endogen erklärter Wachstumsprozesse von isolierten Populationen 197

26.1 Freies Wachstum und Tilgungswachstum 198
26.2 Logistisches Wachstum 201
26.3 Ertrag, Phasenkurve, Gleichgewicht 203
26.4 Wachstum bei Selbstvergiftung 206

§ 27 Einige Typen vorwiegend exogen erklärter Wachstumsprozesse von isolierten Populationen 210

27.1 Sättigungswachstum 210
27.2 Sättigungswachstum mit Schwellenwert 211
27.3 Abhängigkeit der Zuwachsrate von der Populationsgröße; Linearisierung 213

§ 28 Zwei interagierende Populationen 216

28.1 Räuber-Beute-Systeme (Modellbeschreibung) 217
28.2 Gleichgewichtszustände in Räuber-Beute-Systemen 219
28.3 Konkurrenz 223

§ 29 Modelle mit drei Populationen 225

29.1 Wachstum und Absterben einer Bakterienkultur 225
29.2 Stoffmengenänderungen bei chemischen Reaktionen 226

VII Anwendungen wirtschaftlicher Natur 232

§ 30 Beschreibung, Gliederung und Abgrenzung der behandelten Problemkreise 232

§ 31 Die Zuteilung von Bausparverträgen anhand des Saldensummen-Kriteriums 232

§ 32 Ein Lagerhaltungsmodell 237

32.1 Die allgemeine Modellbeschreibung 237
32.2 Ein spezielles Zahlenbeispiel 241

§ 33 Die Darstellung periodischer Lösungen durch Amplitude und Phasenverschiebung 245

§ 34 Grundbegriffe aus der Theorie des Wirtschaftskreislaufs und des Volkseinkommens 247

34.1 Die Darstellung des Wirtschaftsprozesses im Kontensystem 248
34.2 Der Begriff der autonomen und der induzierten Investitionen 252
34.3 Bemerkungen zur "ex-post"-Gleichheit von Investition und Ersparnis und zu den Beschränkungen des begrifflichen Rahmens 253

§ 35 Modelle ohne induzierte Investitionen 254

35.1 Einmaliger Investitionsstoß 254
35.2 Arithmetisch steigende Investitionen 255
35.3 Geometrisch wachsende Investitionen 256

§ 36 Modelle mit induzierten Investitionen 258

36.1 Die Grundannahmen der Modelle von Samuelson, Harrod und Hicks 258
36.2 Das Modell von Samuelson 259
36.3 Das Modell von Hicks 261

VIII Anwendungen in der Physik 264

§ 37 Beschreibung von Bewegungen 264

37.1 Registrierung von Bewegungen 264
37.2 Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit 266
37.3 Bewegungen mit nichtkonstanter Geschwindigkeit 267

§ 38 Die Grundgleichung der Mechanik 271

38.1 Herleitung der Gleichung 271
38.2 Fallbewegungen 272

§ 39 Harmonische Schwingungen 275

39.1 Freie, ungedämpfte Schwingungen 276
39.2 Gedämpfte Schwingungen 280
39.3 Erzwungene Schwingungen; Resonanz 281

§ 40 Himmelsmechanik 283

40.1 Das Gravitationsgesetz 283
40.2 Satelliten- und Planetenbahnen 284

§ 41 Radioaktivität 288

41.1 Zerfallsprozesse 288
41.2 Produktion radioaktiver Substanzen 290
41.3 Zerfallsreihen 291

IX Schlußbemerkungen 294

§ 42 Methodologische Bemerkungen 294

42.1 Integration, Kontinuität, Ausgewogenheit 296
42.2 Heuristik und Methodologie 298

§ 43 Das Arbeiten mit Modellen 304

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Im Vorwort seines 1958 erschienenen Buches mit dem Titel „*Introduction to Difference Equations with Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*" schreibt S. Goldberg, er hoffe, daß das Buch auch bei Studenten und Lehrern des Faches Mathematik Anklang finden werde. Zumindest im Hinblick auf die Bundesrepublik Deutschland sind wir der Auffassung, daß der Themenkreis „Differenzengleichungen (bzw. rekursive Gleichungen) und ihre Anwendungen" noch nicht seiner Bedeutung gemäß in der Lehrerbildung verankert ist. Dies ist einer der Gründe, warum wir ein vorrangig an Lehrer und Lehramtsstudenten gerichtetes Buch zu diesem Themenkreis geschrieben haben.

Die Idee zu einer derartigen Darstellung kam uns bei der Diskussion unserer Erfahrungen aus verschiedenen Vorlesungen und Seminaren (bei R. Dürr aus einem Lehrauftrag am Wirtschaftswissenschaftlichen Institut der Universität Tübingen, bei J. Ziegenbalg aus Lehrveranstaltungen vorrangig im Fachbereich Mathematik/Naturwissenschaften der Pädagogischen Hochschule Reutlingen).

Eines unserer Hauptziele ist die Darstellung der vielfältigen Anwendungsbereiche für Differenzengleichungen bzw. rekursive Gleichungen. Insofern hat das Buch die Struktur eines Wurzelbaumes, und es braucht nicht in linearer Abfolge gelesen zu werden. Die ersten vier Kapitel stellen die mathematische Fundierung für das folgende dar. Kapitel I hat propädeutischen Charakter; das gilt insbesondere für §§ 1 - 4. Ob und wie intensiv die dort dargestellten Inhalte durchzuarbeiten sind, hängt ganz vom Vorwissen der Adressaten ab. Im engeren Sinne ist aus diesem Kapitel nur § 6 mit der Definition des Begriffes der Differenzengleichungen als Voraussetzung für die folgenden Kapitel anzusehen. Für den Anfang reicht aber auch die informelle Verwendung dieses Begriffes entsprechend Kapitel II und III aus. Diese beiden Kapitel sind von besonderer Bedeutung und sollten bei jeder Form der Lektüre gründlich durchgearbeitet werden. Kapitel IV kann bei der ersten Lektüre zunächst übergangen werden; die dortige Behandlung von Gleichungen höherer Ordnung ist besonders im Hinblick auf das in § 12 entwickelte Homogenisierungsverfahren von Bedeutung, das es ermöglicht, gewisse Inhomogenitäten (allerdings bei Erhöhung der Ordnung) zu eliminieren. Die weiteren Kapitel sind voneinander unabhängig.

Bei der Verwendung des Buches in Hochschulkursen sind etwa die folgenden Varianten möglich:

- mathematisch orientierter Kurs: Kapitel II, III, V, beliebige Fortsetzung;
- naturwissenschaftlich orientierter Kurs: Kapitel II, III, VI, VIII;
- wirtschaftswissenschaftlich orientierter Kurs: Kapitel II, III, (VI), VII.

Die Programmierung von Computern stand nicht im Zentrum unserer Zielsetzungen. Dennoch ist sie heutzutage bei einem derartigen Themenkreis unentbehrlich. Die hier auftretenden Algorithmen sind im allgemeinen sehr einfach und durchsichtig, so daß an die syntaktischen Möglichkeiten der Programmiersprachen keine großen Anforderungen gestellt werden. Trotzdem empfehlen wir, alle Programme ausgiebig zu strukturieren.

Die Planung des gesamten Buches erfolgte in intensiver Zusammenarbeit der Autoren. Der physikalische Teil des Buches wurde von R. Dürr, der nichtphysikalische Teil von J. Ziegenbalg verfaßt.

Als besonders heikel erwies sich die Gestaltung von § 34 „Grundbegriffe aus der Theorie des Wirtschaftskreislaufs und Volkseinkommens". Wir sind Herrn Dr. F. Müller deshalb besonders dankbar, daß er uns diesbezüglich vor den gröbsten Schnitzern bewahrt hat; alle verbliebenen Unzulänglichkeiten gehen ausschließlich auf das Konto der Verfasser.

Herrn Prof. E. Wittman danken wir für seine konstruktiven Bemerkungen zum Manuskript. Unser ganz besonderer Dank geht an Frau E. Schleh für ihre außerordentlich präzise, zügige und umsichtige Arbeit beim Schreiben des Manuskripts.

Reutligen, im Oktober 1980

Rolf Dürr
Jochen Ziegenbalg

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Die erste Auflage der *Dynamischen Prozesse* wurde Mitte bis Ende der siebziger Jahre geschrieben. Obwohl es kein Computerbuch in dem Sinne ist, daß der Leser möglichst schnell an ein konkretes System oder eine konkrete Programmiersprache herangeführt werden soll, spielte der Aspekt des Einsatzes von Computern aus einer *inhaltlichen* Perspektive heraus eine entscheidende Rolle bei der Planung des Buches. Inzwischen hat sich bei den Computern einiges geändert: die Systeme sind größer und „benutzerfreundlicher" geworden; es gibt mehr und bessere Programmiersprachen; jeder PC-Benutzer, der es für wichtig hält, kann einen Text mit erstaunlich geringem Aufwand in „desktop-publishing"-Qualität an seinem eigenen Schreibtisch erstellen.

Trotz dieser rasanten Entwicklungen haben die *Dynamischen Prozesse* nichts von ihrer Aktualität verloren – ganz im Gegenteil. Das Buch ist kein Schulbuch in engerem Sinne; es steht aber im Kontext vorrangig des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und der Lehrerbildung. Aus dieser Position heraus hat es auch in die Fortschreibung und Weiterentwicklung der Lehrpläne gewirkt. Besonders im Lehrplan „Informatik-Themen im Grundkurs Mathematik SII" des Freistaates Bayern ist (bis hin zur Terminologie) eine Fülle von Anregungen aus den *Dynamischen Prozessen* eingeflossen.

Neuere Lehrplanentwicklungen, die besonders gut mit den Zielsetzungen der *Dynamischen Prozesse* harmonieren, sind:

- der verstärkte Einsatz des Computers im Mittelstufen- und Oberstufenunterricht
- die verstärkte Berücksichtigung der Themenkreise *mathematische Modellbildung*, *diskrete Mathematik* und *Simulation* im Unterricht
- das verstärkte Auftreten von Arbeitsgemeinschaften, insbesondere auch solcher zur Begabtenförderung, in allen Schulstufen – das Buch paßt z. B. sehr gut zu den baden-württembergischen Richtlinien für Arbeitsgemeinschaften zur Begabtenförderung: Behandlung von Themen, die am klassischen Schulstoff anknüpfen, ihn aber vertiefen und verbreitern und die es insbesondere ermöglichen, Brücken zu anderen Unterrichtsfächern zu schlagen.

Reutlingen, im Juni 1988

Rolf Dürr
Jochen Ziegenbalg

I EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMATIK

§ 1 Arithmetische Folgen

In Rätselecken von Zeitschriften, Schulbüchern und auch in gewissen Eignungstests findet man gelegentlich Aufgaben der folgenden Art:

Ergänze die Zahlenfolgen:

(a) 1, 8, 15, 22, 29,...
(b) 2, 6, 18, 54, 162, 486,...
(c) 3, 14, 33, 60, 95, 138,...
(d) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,...
(e) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...
(f) 1, -1, 1, -1, 1, -1,...

Hierbei geht der Aufgabensteller stillschweigend davon aus, daß den gesuchten Zahlenfolgen jeweils ein bestimmtes, einfaches, möglichst durch eine Formel zu beschreibendes Bildungsgesetz zugrunde liegen soll. Vom rein mathematischen Standpunkt aus gesehen, gibt es viele Möglichkeiten, die Anfangsglieder zu einer Folge fortzusetzen; so etwa im Beispiel (a) in Form der "konstanten" Fortsetzung:

(a') 1, 8, 15, 22, 29, 29, 29,...

Diese Fortsetzung hat sich unser fiktiver Aufgabensteller aber wahrscheinlich nicht als Lösung vorgestellt, obwohl ihr durchaus ein recht einfaches Bildungsprinzip zugrunde liegt; nämlich:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_2 &= 8\\
a_3 &= 15\\
a_4 &= 22\\
a_n &= 29 \text{ (für } n = 5, 6, 7,\ldots)
\end{aligned}
$$

Vermutlich dürfte der Aufgabensteller die folgende Fortsetzung erwartet haben:

(a") 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57,...

Ihr liegt das nachstehende einfache und ästhetische Bildungsgesetz zugrunde:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Das Anfangsglied der Folge ist 1, und die Differenz}\\ \text{je zweier aufeinanderfolgender Glieder ist stets}\\ \text{gleich groß (hier gleich 7).}\end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

Mathematisch läßt sich das kürzer ausdrücken durch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1, \text{ und}\\ a_{n+1} - a_n = 7 \text{ (für } n = 1, 2, 3,\ldots) \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

Die Folgeglieder ergeben sich aus dieser Vorschrift sukzessive:

$$\left.\begin{array}{rl} a_1 &= 1\\ a_2 - a_1 &= 7\\ a_2 &= 7 + a_1 = 8\\ a_3 - a_2 &= 7\\ a_3 &= 7 + a_2 = 15; \text{ und so weiter.} \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

Wir wollen der Folge noch eine spezielle Deutung geben: Der erste Tag des Jahres 1978 war ein Sonntag; demzufolge auch der 8., 15., 22. Tag usw. Die Folge in (a) gibt uns also an, auf welche der fortlaufend numerierten Tage des Jahres 1978 die Sonntage fallen.

In Betrieben ist der Jahreskalender oft fortlaufend numeriert. Die Weihnachtsfeier eines Betriebes soll am 49. Sonntag des Jahres stattfinden. Auf welchen Tag des (fortlaufend numerierten) Jahreskalenders fällt dieser Sonntag?

Mathematisch gesprochen, lautet die Frage: Wie lautet das 49. Glied a_{49} der Folge in (a)? Zur Beantwortung dieser Frage könnte man das Rechenschema (1.3) bis zur Zahl a_{49} fortsetzen. Dies wäre allerdings sehr mühsam. Die Analyse des Bildungsgesetzes führt hier schneller zum Ziel:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 + 7 = 1 + 7 \\
a_3 &= a_2 + 7 = 1 + 7 + 7 = 1 + 2 \cdot 7 \\
a_4 &= a_3 + 7 = 1 + 2 \cdot 7 + 7 = 1 + 3 \cdot 7 \\
a_5 &= \ldots \\
a_{49} &= 1 + 48 \cdot 7 = 337
\end{aligned}
$$

Der 49. Sonntag ist also der 337. Tag des Jahres 1978.

Aufgabe 1.1

Auf den wievielten Tag des Jahres 1978 fällt der 20., 40., 60. Sonntag?

Aufgabe 1.2

Was für ein Wochentag ist der 200. Tag des Jahres 1978?

Aufgabe 1.3

Bei einem Schulfest werden Mannschaften mit Hilfe des Abzählverses

"Ein Blatt fällt ab vom Baum her-*ab*"

gebildet. Die Schüler stellen sich dazu in eine lange Reihe. Der Lehrer beginnt mit dem Abzählvers beim ersten Schüler. Die ausgezählten Schüler kommen in eine Mannschaft. Peter steht an 32., Hans an 42. Stelle.

a) Welcher der beiden wird ausgezählt?
b) Welche Schüler kommen in die Mannschaft?
c) 100 Schüler stellen sich zu einem (10 x 10)-Quadrat auf. Welches Muster ergeben die ausgezählten Schüler, wenn jede der 10 Reihen von links nach rechts durchgezählt wird?
d) Achim steht bei dieser quadratischen Aufstellung in der 3. Reihe an 6. Stelle. Er möchte unbedingt in die ausgezählte Mannschaft und faßt deshalb einige Kandidaten für einen Platztausch ins Auge. Welcher der ausgezählten Plätze ist ihm am nächsten?

Aufgabe 1.4

Die Zahnräder A und B starten wie in Abbildung 1.1.

a) Welche Zahlen berührt der markierte Zeiger von Rad A bzw. B? Welche Zahlen werden von beiden markierten Zeigern berührt?
b) Wie lauten die Antworten auf die Fragen in a), wenn beide Zahnräder im Punkt 1 starten?

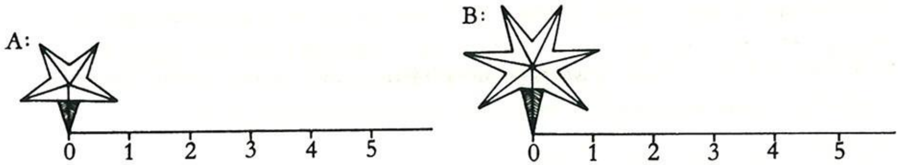


Abb. 1.1
(Die Zahnräder sind so bemessen, daß sie beim Weiterdrehen um einen Zahn jeweils gerade eine Einheit auf dem Zahlenstrahl zurücklegen.)

c) Wie lauten die Antworten, wenn Zahnrad A in 2 und Zahnrad B in 3 startet?

Aufgabe 1.5

Ein Rad hat einen Radius von 20 cm. Wie oft muß es sich drehen, wenn es 100 m, 1 km, 42 km (Marathonlauf), einmal um den Erdball (40 000 km) läuft?

Aufgabe 1.6

Ein 4 cm dickes Buch hat (ohne Einband) etwa 800 (Doppel-)Seiten.
a) Wie dick ist ein Blatt (= eine Doppelseite)?
b) Auf einem 3 m langen Regal stehen lückenlos solche Bücher nebeneinander. Wie viele Buchseiten sind das?
c) Alle Bücher einer bestimmten Bibliothek ergeben nebeneinandergestellt eine Strecke von 5 km Länge. Wie vielen Seiten entspricht das? Wie lautet die Antwort, wenn man eine Reihe von Büchern um den Erdball stellt?
(Man vernachlässige die gelegentlich dicken Einbandseiten.)

Aufgabe 1.7

Begründen Sie:
Zu jeder (noch so kleinen) Bruchzahl (= positiven rationalen Zahl) d und zu jeder (noch so großen) Bruchzahl s gibt es eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft:

$$n \cdot d > s$$

Diese Eigenschaft wird auch als die *archimedische Eigenschaft* der Bruchzahlen bezeichnet. (Entsprechende Formulierungen gelten auch für die rationalen und die reellen Zahlen.)

Aufgabe 1.8

In jeder der Aufgaben 1.1 bis 1.6 ist (mindestens) eine Folge versteckt, die mit der Folge (a) eine wichtige gemeinsame Eigenschaft besitzt. Welche Eigenschaft ist das?

Zusammenfassung

Wir haben bereits viel über Zahlenfolgen gesprochen, ohne näher zu sagen, was eine Folge überhaupt ist. Dies sei hiermit nachgeholt:

Definition 1.1

Eine *Zahlenfolge* ist eine Vorschrift, durch die jeder natürlichen Zahl n eine Zahl a_n zugeordnet wird; a_n nennt man das n-te Glied der Folge.

In der Sprache der modernen Mathematik können wir auch sagen:

Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow M; \quad n \longmapsto f(n) = a_n$$

der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in eine Zahlenmenge M.

Zum Beispiel: $M = \mathbb{N}$, $M = \mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen; $M = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen; $M = \mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen.

Für Zahlenfolgen verwendet man oft die Schreibweisen

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

oder kürzer

$(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ bzw. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

bzw. nur (a_n), falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

Die meisten der bisher betrachteten Folgen haben die folgende wichtige Eigenschaft:

Die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge ist immer gleich groß (konstant). Solche Folgen nennt man arithmetische Folgen.

Definition 1.2

Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ heißt *arithmetische Folge*, wenn es eine feste Zahl d gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Das Glied a_1 bezeichnet man als *Anfangsglied* der Folge.

Aufgabe 1.9

Von der arithmetischen Folge $(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ sei bekannt: $a_{18} = 52$; $d = 3$

a) Wie lautet das Anfangsglied a_1, das Glied a_{1000}?

b) Tritt die Zahl 999 999 als eines der Folgenglieder auf?

Aufgabe 1.10

Die arithmetische Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ habe die Schrittweite d. Stellen Sie das "allgemeine Glied" a_n nur in Abhängigkeit von a_1, d und n dar.

Aufgabe 1.11

a) Gegeben seien die beiden arithmetischen Folgen

$(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} - a_n = 3$ und
$(b_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ mit $b_1 = 4$ und $b_{n+1} - b_n = 4$.

Da man Folgen als spezielle Funktionen auffassen kann, bietet sich ihre graphische Darstellung im Koordinatensystem an, zum Beispiel nebenstehend für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

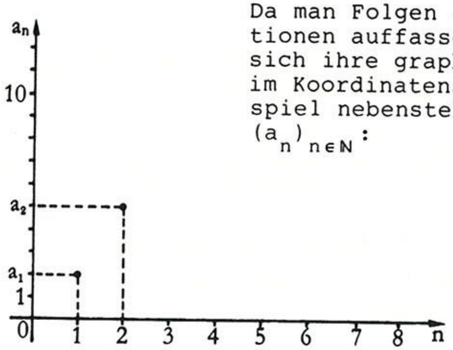


Abb. 1.2

Zeichnen Sie weitere Glieder der Folge in ein (n, a_n)-Koordinatensystem bzw. ein (n, b_n)-Koordinatensystem ein. Stellen Sie eine Vermutung über die Lage der Punkte bei arithmetischen Folgen auf.

b) Ersetzen Sie im (n, a_n)- bzw. (n, b_n)-Koordinatensystem jeweils auf beiden Koordinatenachsen die Markierung 1 durch 2, die Markierung 2 durch 4,..., die Markierung x durch $2 \cdot x$. Überprüfen Sie, ob in den Koordinatensystemen mit den neuen Markierungen die Folgenpunkte von (a_n) bzw. (b_n) noch "richtig" liegen.
Verbinden Sie die Folgenpunkte von (a_n) bzw. (b_n). Wo würden a_0 und b_0 liegen, wenn die Schrittweiten jeweils beibehalten würden?
Stellen Sie Vermutungen auf, wie das mit der "Stauchung" der Koordinatenachsen zusammenhängt.

Aufgabe 1.12

Die vier Grundaufgaben zur arithmetischen Folge: Von den in der allgemeinen Form der arithmetischen Folge auftretenden vier Variablen a_1, n, d, a_n seien jeweils drei mit festen Werten belegt. Dann läßt sich daraus der Wert der vierten Variablen berechnen.

a) Stellen Sie für jeden dieser Fälle die "Lösungsformel" auf.
b) Konstruieren Sie zu jedem der vier Fälle in a) eine Aufgabe.

§ 2 Einige Bemerkungen zur Verwendung von Taschenrechnern und Computern

Ist bei einer arithmetischen Folge die Schrittweite d mehrstellig, (etwa d = 8,5397283), so wird die sukzessive Berechnung der Folgenglieder a_2, a_3, a_4,... unangenehm. Hier befreit uns der Taschenrechner von langwieriger routinemäßiger Rechenarbeit, insbesondere dann, wenn er einen *Konstantenspeicher* (für die Addition) hat. Wir wollen die Funktionsweise des Konstantenspeichers an dem einfachen Rechenbeispiel 3 + 2,5 = 5,5 erläutern.

Bei Rechnern mit der am meisten verbreiteten "algebraischen Notation" müssen wir tippen:

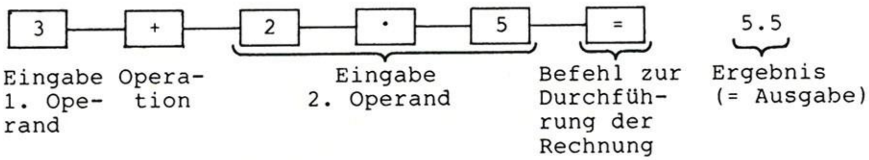


Abb. 2.1

Wir wollen die Eingabe der Übersichtlichkeit halber jeweils in einem Parallelogramm zusammenfassen:

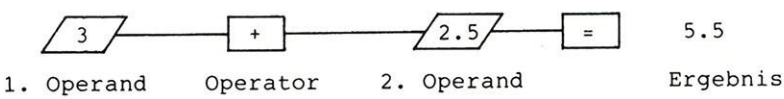
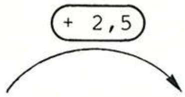


Abb. 2.2

Bei vielen Rechnern läßt sich die wiederholte Addition des Wertes 2,5 in vereinfachter Weise durchführen:

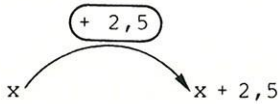
Mit der Ausführung der Rechnung werden zugleich die Operation und der zweite Operand intern gespeichert. Durch unsere obige Rechnung haben wir also nicht nur das Ergebnis 5.5 erhalten, sondern den Rechner zugleich als "Additionsmaschine" "programmiert".

Abb. 2.3



Der Rechner führt nun bei beliebiger Eingabe x auf das Kommando $\boxed{=}$ die Rechnung

Abb. 2.4



durch.

Beispiel

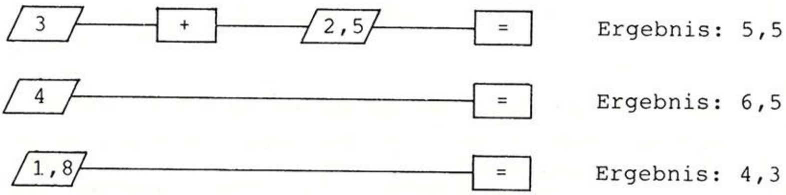


Abb.2.5

In der Sprechweise des modernen Mathematikunterrichts können wir sagen: Der Rechner ist als (+ 2,5) -Operator (Maschine) programmiert worden. Diese Operatorauffassung wollen wir auch in der graphischen Darstellung des Rechenvorganges, dem *Rechenablaufplan*, wie folgt zum Ausdruck bringen:

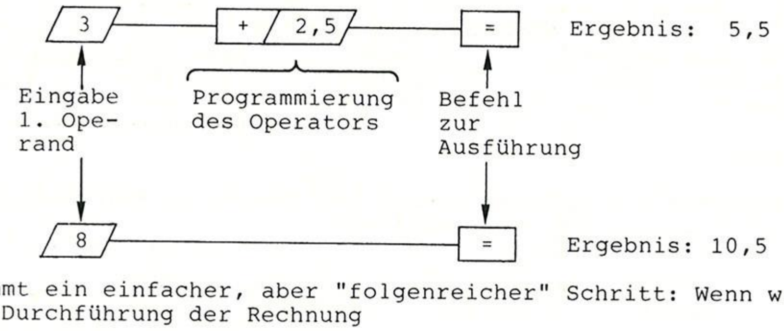


Abb. 2.6

Jetzt kommt ein einfacher, aber "folgenreicher" Schritt: Wenn wir nach der Durchführung der Rechnung

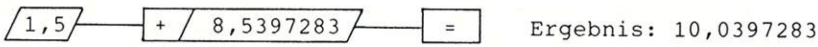


Abb. 2.7

durch die zugleich der Operator

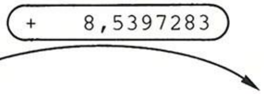


Abb. 2.8

programmiert wird, keine neue Eingabe vornehmen, so wird automatisch die alte Ausgabe (hier 10,0397283) zur neuen Eingabe. Die Fortsetzung dieses Prozesses führt zu folgendem Rechenschema:

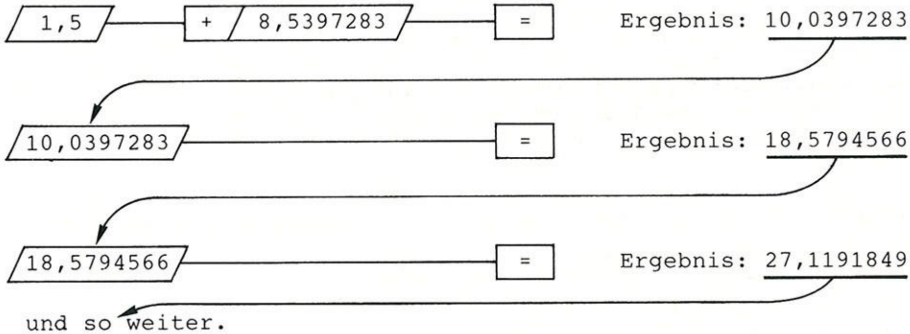


Abb. 2.9

Die Folge der Ergebnisse ist somit eine arithmetische Folge mit Anfangswert 1,5 und Schrittweite 8,5397283, womit unser ursprünglich gestelltes Problem der Verminderung von Routinearbeit mit Hilfe des Taschenrechners gelöst ist.

VORSICHT:

*Obwohl sehr viele Taschenrechner über Konstantenspeicher verfügen, gibt es große Unterschiede in der Speicher-*Technik. *So wird zum Beispiel gelegentlich der erste Operand (statt wie hier beschrieben der zweite Operand) abgespeichert.*

Das allgemeine Rechenschema (Anfangswert a_1, Schrittweite d) stellt sich ganz entsprechend dar:

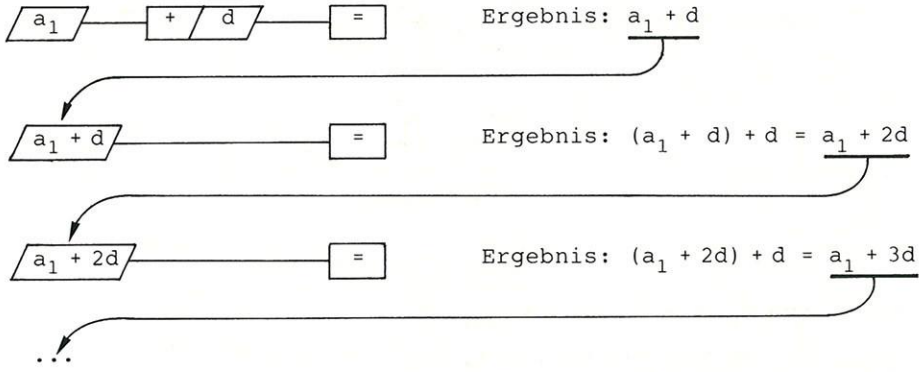


Abb. 2.10

Diese Darstellung wird nun meist in naheliegender Weise zu dem folgenden Rechenablaufplan zusammengefaßt:

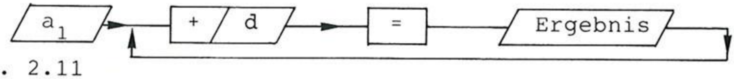


Abb. 2.11

Hierbei ist der Operator [+ / d] nur beim erstmaligen Durchlaufen der Schleife zu tippen, falls der Rechner eine Konstantenautomatik besitzt.

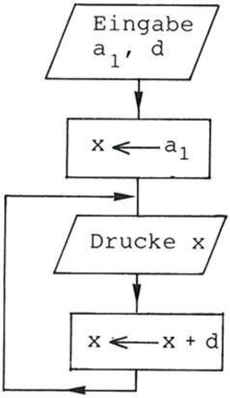
Der Rechenablaufplan in Abbildung 2.11 ist die unmittelbare Vorstufe für die Behandlung des Problems mit frei programmierbaren Taschenrechnern oder Kleincomputern. Solchen Maschinen muß eine eindeutige und in einer normierten Sprache abgefaßte Kette von Anweisungen, ein *Programm*, vorgegeben werden. Der Erstellung eines normierten Programms sollte stets zunächst die alltagssprachliche, nicht normierte Beschreibung des Rechenablaufs oder Bearbeitungsvorgangs vorangehen. Eine solche eindeutige Beschreibung eines Bearbeitungsvorganges nennt man einen *Algorithmus*.

Ein Algorithmus zur sukzessiven Berechnung der Glieder einer arithmetischen Folge (a_n) kann zum Beispiel folgendermaßen aussehen (vgl. jedoch die Aufgaben 2.3 und 2.4):

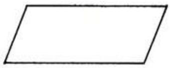
1. Lege die Variablen a_1, d, x wie folgt fest:
   a_1 = Anfangsglied der Folge (a_n)
   d = Schrittweite der Folge
   x = a_n = allgemeines Glied der Folge
2. Bringe den Anfangswert a_1 und die Schrittweite d in Erfahrung. (2.1)
3. Ersetze x durch a_1.
4. Drucke x.
5. Berechne x + d und ersetze x durch x + d.
6. Fahre bei Schritt 4 fort.

Eine graphische Darstellung derartiger Algorithmen wird sehr häufig in Form eines Flußdiagramms gegeben:

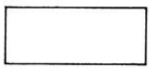
Variable: a_1, d, x



Parallelogramm:
Symbol für *Ein-* und *Ausgabe*



Rechteck:
Symbol für *allgemeine Operation* (Verarbeitung)



Pfeil: $x \longleftarrow a_1$
Symbol für *Wertzuweisung* (der Variablen x wird der Wert von a_1 zugewiesen; "x wird durch a_1 ersetzt")

Ablauflinien:
sie geben die Richtung des Programmablaufes an

Abb. 2.12

Ein Programm in der Programmiersprache BASIC zur Berechnung der Werte einer arithmetischen Folge sieht zum Beispiel folgendermaßen aus (man beachte jedoch Aufgabe 2.4):

```
10  INPUT  A1
20  INPUT  D
30  LET  X = A1
40  PRINT  X
50  LET  X = X+D
60  GOTO  40
```

(2.2)

Zeilennummern der Anweisungen   Anweisungen

Aufgabe 2.1

Stellen Sie fest, ob Ihr Taschenrechner eine Konstantenautomatik für die Addition besitzt und ob der erste oder der zweite Operand zur Programmierung des Additionsoperators verwendet wird.
Übertragen Sie die Berechnungsschemata aus Abbildung 2.6 und 2.7 auf Ihren Taschenrechner.

Aufgabe 2.2

Falls Ihnen ein frei programmierbarer Rechner zur Verfügung steht, setzen Sie den Algorithmus (2.1) in ein Programm für Ihren Rechner um.

Aufgabe 2.3

Der Algorithmus (2.1) weist eine Unzulänglichkeit auf: er läuft endlos weiter.
Ändern Sie den Algorithmus so ab, daß er nach dem Ausdruck des 100. Folgengliedes stoppt.

Aufgabe 2.4

Falls Sie Zugang zu einem in BASIC oder einer ähnlichen bzw. reichhaltigeren Sprache programmierbaren Rechner haben, übertragen und verbessern Sie das BASIC-Programm (2.2) so, daß es stoppt und daß zur besseren Lesbarkeit der Ausgabe ein erläuternder Text ausgedruckt wird.

§ 3 Geometrische Folgen

[3.1] Geometrisches Wachstum

Für die Folge (b) aus § 1

2, 6, 18, 54, 162, 486,...

gilt das fundamentale Wachstumsprinzip, das die arithmetischen Folgen auszeichnet, nicht mehr. Wir erkennen jedoch schnell, daß sich die Glieder der Folge jeweils verdreifachen:

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$18 = 3 \cdot 6$$
$$54 = 3 \cdot 18, \quad \text{und so weiter.}$$

Es liegt nahe, die Folge entsprechend dem Prinzip

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n \tag{3.1}$$

fortzusetzen.

Wachstumsprozesse laufen häufig nach Gesetzen ab, die der Vorschrift (3.1) sehr verwandt sind.

Aufgabe 3.1

Ein Blatt Papier wird fortlaufend gefaltet. Wie viele Schichten liegen nach der 1., 2., 5., 10. Faltung übereinander?

Aufgabe 3.2

Informieren Sie sich in einem Schulbuch oder einem Buch zur Elementarmathematik über die "Schachbrettaufgabe".

Aufgabe 3.3

Eine Bakterienkultur besteht aus 10 000 Spaltpilzen. Pro Stunde nimmt die Anzahl der Bakterien durch Spaltung um die Hälfte zu. Stellen Sie das Wachstum der Kultur über den Zeitraum eines Tages in einem Schaubild dar.

Die zuletzt betrachteten Folgen fallen unter die

Definition 3.1

Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ heißt *geometrische Folge*, wenn es eine feste Zahl q gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Die Zahl q heißt der *Wachstumsfaktor* der Folge. Falls alle $a_n \neq 0$ sind, läßt sich q deuten als (fester) Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (\text{für } a_n \neq 0)$$

Die vorigen Beispiele haben bereits gezeigt, daß die sukzessive Berechnung der Glieder einer geometrischen Folge, selbst bei "glatten" Wachstumsfaktoren, sehr aufwendig wird. Es liegt nahe, auch hier wieder bewährte Rechenhilfsmittel, insbesondere den Taschenrechner einzusetzen. Im Rechenablaufplan in Abbildung 2.11 haben wir nur die Operation zu ändern, um den Plan zur Berechnung der Glieder einer geometrischen Folge zu erhalten:

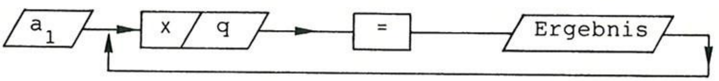
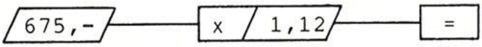


Abb. 3.1

(Die Multiplikation ist hier der Deutlichkeit halber durch ein Kreuz gekennzeichnet.)

Geometrische Folgen hängen auch sehr eng mit Fragen des *prozentualen* Wachstums zusammen. Will man zum Nettoverkaufspreis von 675,- DM den um die Mehrwertsteuer (12 %) erhöhten Bruttoverkaufspreis berechnen, so empfiehlt es sich, die Rechnung nach dem folgenden

Rechenablaufplan durchzuführen:



Ergebnis: 756.- DM

Abb. 3.2

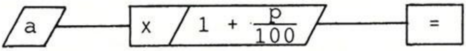
Allgemein berechnet sich eine prozentuale Erhöhung um p% entsprechend dem Schema:

$$a \xrightarrow{\cdot\,(1 + \frac{p}{100})} a(1 + \frac{p}{100})$$

$$= a + \frac{p}{100}\,a$$

Abb. 3.3

bzw. bei Verwendung des Taschenrechners entsprechend dem Rechenablaufplan:



Ergebnis: $a + \frac{p}{100}\,a$

Abb. 3.4

Beispiel: Zinseszinsrechnung

Ein Sparer legt ein Kapital von 1 000,- DM zum Jahreszinssatz von 4,5% an. Er läßt die jährlich ausgezahlten Zinsen stehen, wodurch sich sein Kapital jährlich vergrößert. Entsprechend Abbildung 3.3 ist der Wachstumsfaktor hier 1,045.

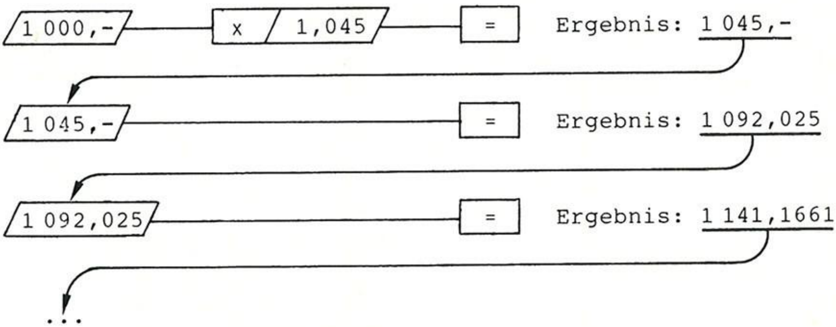


Abb. 3.5
(Die Ergebnisse wurden hier nicht gerundet, damit der Schleifenbildungsprozeß nicht gestört wird und damit sich die Rundungsfehler nicht unnötig stark anhäufen.)

Aufgabe 3.4

Berechnen Sie die die Flächeninhalte der nebenstehenden ineinandergeschachtelten Kreise und Quadrate, beginnend mit dem innersten Quadrat der Seitenlänge 1 cm.

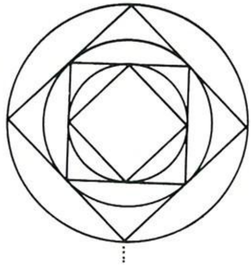


Abb. 3.6

Aufgabe 3.5

Der Baumbestand eines Waldes von 20 km^2 schrumpft jährlich um 5%, bezogen auf die Fläche.

a) Welche Fläche bedeckt der Baumbestand nach 1, 2, 3,... Jahren?
b) Wann ist der Bestand auf die Hälfte reduziert?

Aufgabe 3.6

Ein Kapital K verzinse sich jährlich mit p%. Begründen Sie: Der Zeitraum, in dem sich das Grundkapital K durch Zinseszinswachstum verdoppelt, hängt nur von p, nicht jedoch von K ab.

Aufgabe 3.7

a) Legen Sie eine Tabelle der Verdoppelungszeiten bei prozentualem Wachstum von p% an für p = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 6; 7; 8; 9; 10.
b) Berechnen Sie für jeden dieser Prozentsätze p und die dazugehörige Verdoppelungszeit d das Produkt $p \cdot d$.
c) Stellen Sie eine allgemeine Vermutung auf und überprüfen Sie diese an weiteren Beispielen.

[3.2] Graphische Darstellung geometrischer Folgen

Ähnlich wie die arithmetische Folge läßt sich auch die geometrische Folge $(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ im (n, a_n)-Koordinatensystem darstellen.

Abb. 3.7

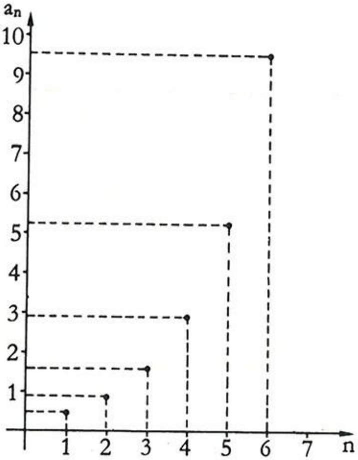
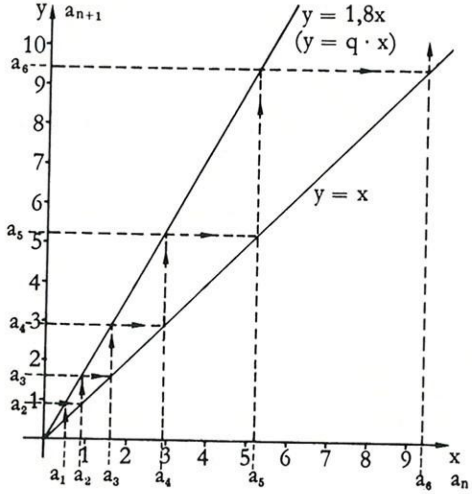


Abb. 3.8



Beispiel: $a_{n+1} = 1,8 \cdot a_n$; $a_1 = 0,5$ (Abbildung 3.7)

Die nicht-lineare "Kurve", die wir nur an ganzzahligen Stellen der n-Achse betrachten, läßt sich nach Aufstellung einer Wertetafel (etwa mit dem Taschenrechner) zeichnen. Es wäre jedoch wünschenswert, wenn man die Werte für a_n mit rein graphischen Methoden unter Umgehung der Wertetafel ermitteln könnte. Da a_{n+1} durch konstante Multiplikation von a_n mit $q = 1,8$ entsteht, ist das im (a_n, a_{n+1})-Koordinatensystem möglich (Abbildung 3.8).

Algorithmus zur graphischen Ermittlung der geometrischen Folge $a_{n+1} = q \cdot a_n$ mit $a_1 = a$
1. Zeichne ein (x, y)- bzw. (a_n, a_{n+1})-Koordinatensystem. 2. Zeichne die Geraden $y = x$ (erste Winkelhalbierende) und $y = q \cdot x$ ein. 3. Trage a_1 auf der x-Achse ab. 4. Setze $n = 1$. 5. Schneide die Parallele zur y-Achse durch a_n mit der Geraden $y = q \cdot x$. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (a_n, a_{n+1}). 6. Übertrage a_{n+1} mit Hilfe der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ auf die x-Achse. 7. Ersetze n durch n + 1. 8. Fahre bei Schritt 5 fort.

(3.2)

Aufgabe 3.8

Führen Sie den obigen Algorithmus in den folgenden Fällen durch:

a) $a_1 = 1$, $q = 2,5$

b) $a_1 = 10$, $q = 0,8$

c) $a_1 = 1$, $q = -1,5$

d) $a_1 = 10$, $q = -0,7$

Die folgenden Aufgaben sollten soweit möglich sowohl rein arithmetisch (rechnerisch) als auch graphisch (zeichnerisch) gelöst werden.

Aufgabe 3.9

Ein Teich ist durch Algenwachstum bedroht. Messungen ergeben, daß sich das Volumen des Algenbestandes täglich um 20% vergrößert. Am 17. Dezember wird näherungsweise ein Algenbestand von 100 m^3 ermittelt. Wie groß war der Bestand am 1. Dezember?

Aufgabe 3.10

Kettenbriefe: Ein Feinschmecker verfällt auf die folgende Idee, um neue Rezepte zu erhalten und zu verbreiten. Er schreibt auf einer Liste die Namen von sechs Bekannten mit Anschriften untereinander. Der Liste legt er die folgende Anweisung bei:
1. Schicke der Person, die oben auf der Liste steht, ein Rezept.
2. Streiche den Namen dieser Person und füge den eigenen Namen unten an.
3. Kopiere die Liste und die Anweisung und schicke sie vier Bekannten zu, die noch nicht auf der Liste stehen.

Der Feinschmecker schickt nun Rezept und Briefe entsprechend seiner eigenen Anleitung ab. Wie viele Rezepte erhält er, wenn niemand die Kette unterbricht?
(Man könnte meinen, daß man sich eine ergiebige Geldquelle erschließt, wenn man das Verfahren mit 10-DM-Scheinen statt mit Rezepten durchführt. Kettenbriefe dieser Art sind jedoch gesetzlich verboten.)

Aufgabe 3.11

Die vier Grundaufgaben zur geometrischen Folge
Von den in der allgemeinen Form der geometrischen Folge auftretenden vier Variablen a_1, q, n, a_n seien jeweils drei gegeben. Dann läßt sich daraus der Wert der vierten Variablen berechnen.
a) Stellen Sie für jeden dieser Fälle die allgemeine Lösungsformel auf.
b) Geben Sie in a) für den Fall, wo n gesucht ist, ein Verfahren an, das ohne die Verwendung von Logarithmen auskommt.
c) Führen Sie die Verfahren, mit Ausnahme der Bestimmung von q, jeweils graphisch durch.
d) Konstruieren Sie zu jedem der vier Fälle in a) eine Aufgabe.

Aufgabe 3.12

Von einem radioaktiven Präparat werden durch Zerfall täglich 2,5% seiner Masse in Folgeprodukte umgewandelt. Wie groß ist die "Halbwertszeit" des Präparates, d. h. die Zeit, in der die Hälfte seiner Substanz zerfallen ist?

Aufgabe 3.13

Die Halbwertszeit einer Substanz beträgt 100 Jahre. Wie groß ist der jährliche Zerfallsfaktor?

Aufgabe 3.14

Altersbestimmung mit Hilfe der Halbwertszeit
Unter dem Einfluß der kosmischen Strahlung entsteht in der Atmosphäre aus Stickstoff das Kohlenstoffisotop C 14, das mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt. Bis zum Beginn dieses Jahrhunderts war der Anteil des radioaktiven Isotops C 14 am gesamten Kohlenstoff der Atmosphäre konstant ($1{,}5 \cdot 10^{-12}$). Solange ein Organismus, Pflanze oder Tier, seinen Stoffwechsel aufrechterhält, enthält er C 14 in derselben Konzentration wie die Atmosphäre. Nach seinem Absterben zerfällt das in ihm enthaltene C 14, ohne daß neues C 14 aufgenommen wird. Der Anteil des radioaktiven Isotops am gesamten Kohlenstoff im Organismus nimmt also vom Zeitpunkt des Absterbens an ständig ab.
Bei der Analyse einer Leinenumhüllung von biblischen Schriftenrollen vom Toten Meer fand man einen C-14-Gehalt von $1{,}19 \cdot 10^{-12}$. Berechnen Sie daraus das Alter der Leinenumhüllung.

Aufgabe 3.15

Begründen Sie:

a) Das sukzessive Wachstum einer Substanz um erst p% und danach um q% ist *nicht* gleichwertig einem Gesamtwachstum um (p + q)%. Geben Sie das zusammengefaßte Wachstum richtig wieder.

b) Warum könnte man bei rein empirischer Betrachtungsweise von kleinen Prozentsätzen p und q (p, q $\leq$ 10) dennoch zunächst den in a) angedeuteten Sachverhalt vermuten?

§ 4 Vollständige Induktion

Wir betrachten die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
&1\\
&1 + 8 = 9\\
&1 + 8 + 27 = 36\\
&1 + 8 + 27 + 64 = 100\\
&1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225
\end{aligned}$$

Wie könnte die nächste Zeile lauten? Ist ein allgemeines Bildungsgesetz erkennbar?

Schauen wir uns den jeweils hinzukommenden Summanden an:

$$\begin{aligned}
8 &= 2^3\\
27 &= 3^3\\
64 &= 4^3\\
125 &= 5^3
\end{aligned}$$

Wir können also auch schreiben:

$$\begin{aligned}
&1\\
&1^3 + 2^3 = 9\\
&1^3 + 2^3 + 3^3 = 36\\
&1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100\\
&1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225
\end{aligned}$$

Die nächste Zeile lautet also offenbar:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441$$

Dies ist auf den ersten Blick nicht weiter aufregend. Irgendeine Summe müssen die links stehenden dritten Potenzen ja ergeben. Aber schauen wir uns die Summen jeweils etwas genauer an:

$$1 = 1^2, \quad 9 = 3^2, \quad 36 = 6^2, \quad 100 = 10^2, \quad 225 = 15^2, \quad 441 = 21^2$$

Es sind lauter Quadratzahlen! Aber damit nicht genug: Die Basis ergibt sich als Summe der links stehenden Basen der dritten Potenzen:

$$\begin{aligned}
&1^3 = 1^2\\
&1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2\\
&1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2\\
&1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2
\end{aligned}$$

Auch die beiden folgenden Gleichungen erfüllen diese Gesetzmäßigkeit.

Geht es so weiter?

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 784 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2$$

Es sieht so aus. Wenn wir entsprechend dem Bildungsgesetz weitere Gleichungen aufschreiben, werden wir feststellen, daß die beobachtete Gesetzmäßigkeit erhalten bleibt. Können wir nun behaupten, daß für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 \tag{4.1}$$

richtig ist? Dies wäre eine Aussage über *unendlich* viele Zahlen. Eine Überprüfung des Gesetzes (4.1) anhand von konkreten Beispielen kann sich jedoch nur auf endlich viele Fälle erstrecken.

Ein allgemeiner Beweis von (4.1) muß sich also auf grundsätzlich andere Mittel stützen. In ihn müssen die fundamentalen Eigenschaften einfließen, die zur Konstruktion der natürlichen Zahlen herangezogen werden.

Eines dieser grundlegenden Merkmale der natürlichen Zahlen ist das

Prinzip der vollständigen Induktion

> Enthält eine Menge M von natürlichen Zahlen die Zahl 1 und mit jeder natürlichen Zahl k auch deren Nachfolger k + 1, so enthält M alle natürlichen Zahlen. (IND 1)

Eine gleichwertige Formulierung lautet:

> Ist $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ eine Folge von Aussagen und gilt
>
> A_1 ist wahr und
>
> wenn A_k wahr ist, so ist auch A_{k+1} wahr,
>
> so ist jede Aussage der Folge wahr. (IND 2)

Der Zusammenhang zwischen (IND 1) und (IND 2) ergibt sich aus der Festsetzung:

> M = Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k wahr ist.

(IND 2) wird in etwas laxerer Formulierung gelegentlich auch folgendermaßen wiedergegeben:

> Gilt eine Aussage für die Zahl 1 und folgt aus der Gültigkeit für k auch stets die Gültigkeit für k + 1, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Eine schöne bildliche Wiedergabe des Induktionsprinzips (siehe z. B. A. Kirsch, Elementare Zahlen- und Größenbereiche) ist in der folgenden Veranschaulichung gegeben.

Man stelle sich eine Reihe von Dominosteinen vor:

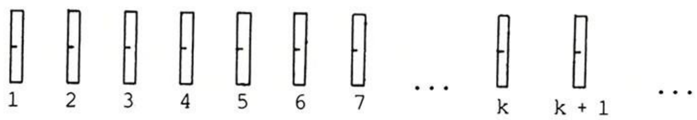


Abb. 4.1

Fällt der k-te Stein nach rechts, so fällt auch der (k + 1)-te Stein. Der k-te Stein kann fallen oder auch nicht. Wenn jedoch der 1. Stein fällt, so fallen alle Steine. Wir können nun den 1., 2. und 3. Stein stehen lassen und erst den 4. Stein umstoßen. Dann fallen alle Steine ab dem 4. Stein.

Entsprechendes gilt auch beim allgemeinen Induktionsprinzip:

Enthält eine Menge von ganzen Zahlen die Zahl a und mit jeder ganzen Zahl z auch die Zahl z + 1, so enthält M alle ganzen Zahlen, die größer oder gleich a sind. (IND 3)

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion ergibt sich das folgende Beweisschema für Aussagen, die natürliche oder ganze Zahlen enthalten:

Induktionsverankerung

Man zeige, daß die Aussage für die natürliche Zahl 1 bzw. für die ganze Zahl a gilt.

Induktionsannahme

Man nehme die Gültigkeit der Aussage für eine beliebige Zahl k $(k \geq a)$ an.

Induktionsschluß

Man folgere aus der Induktionsannahme die Gültigkeit der Aussage für die Zahl k + 1.

Bemerkung: An Stelle der obigen Induktionsannahme wird oft auch die (nur scheinbar stärkere) Annahme verwendet:

Man nehme die Gültigkeit der Aussagen für alle Zahlen i mit $1 \leq i \leq k$ (bzw. $a \leq i \leq k$) an.

Beispiel 1: Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.2}$$

Von C. F. Gauß (1777 - 1855), einem der größten Mathematiker aller Zeiten, wird berichtet, daß er als Schuljunge die vom Lehrer gestellte Aufgabe: "Addiert alle Zahlen von 1 bis 100" nach dem folgenden Schema löste:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + \ldots + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + \ldots + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Also ist $100 \cdot 101$ das Doppelte der gesuchten Summe. Das Gaußsche Verfahren ist unmittelbar auf den allgemeinen Fall übertragbar. Es läßt sich auch geometrisch veranschaulichen:

Drehung der "Treppe"

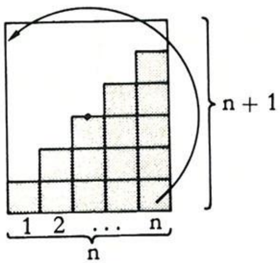


Abb. 4.2

Obwohl man also offenbar nicht jeden Beweis, in dem natürliche Zahlen vorkommen, formal mit vollständiger Induktion durchführen muß, sei dies für (4.2) zur Verdeutlichung des Induktionsbeweises hier trotzdem getan.

Induktionsverankerung

Für n = 1 ist die Aussage richtig: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Induktionsannahme

Sei k eine beliebige natürliche Zahl, und es gelte:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktionsschluß

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) =$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Wenden wir uns nun wieder dem nicht so leicht durchschaubaren Ausgangsbeispiel zu:

Beispiel 2: Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Induktionsverankerung

Für $n = 1$ erhält man $1^3 = 1^2$, also eine wahre Aussage.

Induktionsannahme

Für $k \geq 1$ gelte:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2$$

Induktionsschluß

Es ist zu zeigen, daß damit auch

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1))^2$$

gilt. Nun ist

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3 =$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3$$

Nach (4.2) können wir $(1 + 2 + 3 + \ldots + k)$ ersetzen durch $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$; es ist also:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$
$$= (k+1)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) = (k+1)^2 \cdot \frac{k^2 + 4k + 4}{4} =$$
$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 =$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1))^2$$

Der letzte Schritt folgt wiederum aus (4.2).

Damit ist der Induktionsschluß erbracht und die Aussage (4.1) bewiesen.

Aufgabe 4.1

Beweisen Sie:

a) Für jede natürliche Zahl n und für jede reelle Zahl x gilt:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1} \tag{4.3}$$

b) Für jede natürliche Zahl n und für beliebige ganze Zahlen a und b gilt:

$a - b$ ist ein Teiler von $a^n - b^n$.

Letzteres soll heißen: Es gibt eine ganze Zahl c mit der Eigenschaft:

$$(a-b)\cdot c = a^n - b^n$$

Geben Sie c in Abhängigkeit von a und b an.

Aufgabe 4.2

Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl n und für jede reelle Zahl x (mit $x > -1$) gilt:

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx \tag{4.4}$$

Bemerkung: (4.4) heißt auch die "Bernoullische Ungleichung".

Aufgabe 4.3

Untersuchen Sie, für welche natürlichen Zahlen r die Ungleichung $r^2 < 2^r$ gilt.

Aufgabe 4.4

Zeigen Sie: Eine Landkarte, deren Ländergrenzen aus Geraden bestehen, die von Rand zu Rand verlaufen, läßt sich mit zwei Farben so färben, daß benachbarte Länder stets verschieden gefärbt sind.

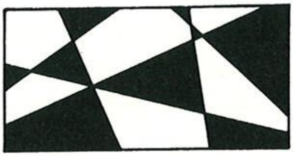


Abb. 4.3

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Neben dem Beweis durch Induktion spielt in der Mathematik auch das Prinzip der "Definition durch Induktion", das meist als "rekursive" Definition bezeichnet wird, eine wichtige Rolle. Die Berechtigung dieses Verfahrens basiert auf dem "Rekursionssatz", siehe zum Beispiel Oberschelp, Seite 19.

Beispiel 3: Potenzen

Es sei a eine beliebige reelle Zahl. Wir definieren:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Diese rekursive Definition stellt eine Art "Maschine" dar, die uns beliebige Potenzen liefert, z. B. a^5.

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a^3 \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^5 = a^4 \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Beispiel 4: Die Fakultät

Die rekursive Definition $1! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ liefert:

$$1! = 1$$
$$2! = 1! \cdot 2 = 2$$
$$3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$$

Beispiel 5: Das Summenzeichen $\sum$ (griech.: "Sigma")
Es sei eine Folge $(a_i)_{i=1,2,3,\ldots}$ gegeben. Für viele Fragestellungen ist es wichtig, eine neue Folge, die Folge $(s_i)_{i=1,2,3,\ldots}$ der Teilsummen (Partialsummen) von (a_i) zu bilden. Dazu definieren wir:

$$s_1 = a_1$$
$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

Diese "Maschine" liefert uns:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = s_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Die Bezeichnung s_n für die Glieder der neuen Folge hat den Nachteil, daß die ursprüngliche Folge (a_i) darin nicht mehr zu erkennen ist. Man schreibt deshalb meist für s_n:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Es ist also: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

und $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$

Aufgabe 4.6

Die Folge (a_i) sei gegeben durch: $a_i = \frac{(i-1)(i-2)}{2}$

Statt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ schreibt man auch $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{2}$

a) Schreiben Sie die Anfangsglieder $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ der Folge (a_i) auf.

b) Schreiben Sie die Anfangsglieder $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ der zugehörigen Teilsummenfolge (s_i) auf.

c) Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

Bemerkung: Oft möchte man eine Folge nicht ab dem 1. Glied, sondern z. B. ab dem 5. Glied aufsummieren. Die entsprechende rekursive Fassung lautet dann:

$$\sum_{i=5}^{5} a_i = a_5 \quad \text{und} \quad \sum_{i=5}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=5}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

Aufgabe 4.7

Zeigen Sie für die Folge aus Aufgabe 4.6:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=3}^{n} a_i$$

Aufgabe 4.8

Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie sich $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ einfacher schreiben läßt, und beweisen Sie dies.

§ 5 Folgen und Differenzen

[5.1] Erste und zweite Differenzen

Die Folge (c) in § 1,

3, 14, 33, 60, 95, 138,...,

unterliegt, wie wir leicht überprüfen können, weder dem arithmetischen noch dem geometrischen Bildungsgesetz. Wir beginnen mit den Zahlen zu spielen. Da wir mit der Bildung der Differenzen aufeinanderfolgender Zahlen schon einmal erfolgreich waren, versuchen wir es noch einmal mit der Differenzenbildung nach dem Grundsatz: "Eine Methode, die einmal geholfen hat, läßt sich durch Variation, Ausbau und Vertiefung häufig nochmals nutzbringend anwenden":

	3		14		33		60		95		138
Differenzen:		11		19		27		35		43	

Abb. 5.1

Wie man durch weitere Differenzenbildung erkennt, handelt es sich bei obiger Differenzenfolge um die Anfangsglieder einer arithmetischen Folge:

Erste Differenzen:	11		19		27		35		43	...
Zweite Differenzen:		8		8		8		8		...

Zur besseren Übersicht ergänzen wir das Bild zu einem vollständigen Differenzenschema:

Folge:	3		14		33		60		95		138	...
Erste Differenzen:		11		19		27		35		43	...	
Zweite Differenzen:			8		8		8		8	...		
Dritte Differenzen:				0		0		0	...			

Im Hinblick auf die Suche nach einem einfachen Bildungsgesetz für unsere Ausgangsfolge erscheint es sinnvoll, die Folge der ersten Differenzen als eine arithmetische Folge mit Schrittweite 8 anzusetzen. Nennen wir etwa (ausgehend von der Folge $a_1 = 3$, $a_2 = 14$,

$a_3 = 33$) die Glieder der Folge der ersten Differenzen d_i, so erhalten wir:

$$d_1 = a_2 - a_1 = 11$$
$$d_2 = a_3 - a_2 = 19$$
$$d_3 = a_4 - a_3 = 27$$

und so weiter, d. h.:

$$d_2 = d_1 + 8$$
$$d_3 = d_2 + 8$$
$$d_4 = d_3 + 8$$

Was bringt uns diese Erkenntnis im Hinblick auf die Analyse der Ausgangsfolge (c) aus § 1? Wir setzen einfach ein:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 14 = a_1 + d_1 \\ a_3 = 33 = a_2 + d_2 = a_1 + d_1 + d_2 \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} + d_{n-1} = a_1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} \end{array}\right\} \quad (5.1)$$

Die Folge $(d_i)_{i = 1, 2, 3 \ldots}$ haben wir als arithmetische Folge aber im Griff. Ihr allgemeines Glied lautet (siehe Aufgabe 1.10):

$$d_i = d_1 + (i-1) \cdot 8 = 11 + (i-1) \cdot 8$$

In (5.1) eingesetzt, ergibt dies:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 11 = 14$$
$$a_3 = 3 + 11 + (11 + 8) = 33$$
$$\ldots$$
$$\begin{aligned} a_n &= 3 + 11 + (11 + 8) + (11 + 2 \cdot 8) + \ldots + (11 + (n-2) \cdot 8) = \\ &= 3 + (n-1) \cdot 11 + (1 + 2 + \ldots + (n-2)) \cdot 8 = \\ &= 3 + (n-1) \cdot 11 + \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} \cdot 8 = \\ &= 3 + 11n - 11 + 4n^2 - 12n + 8 = 4n^2 - n \end{aligned}$$

Es ist also:

$$a_n = 4n^2 - n = n \cdot (4n - 1)$$

Probe: $a_1 = 1 \cdot 3 = 3$
$a_2 = 2 \cdot 7 = 14$
$a_3 = 3 \cdot 11 = 33$
$a_4 = 4 \cdot 15 = 60$
$a_5 = 5 \cdot 19 = 95$
$a_6 = 6 \cdot 23 = 138$

[5.2] Folgen mit konstanten zweiten Differenzen

Wir wollen das vorhergehende Beispiel nun allgemein fassen. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge mit dem Differenzenschema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \dots & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n & \dots \\
& \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \\
& d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4 & & \dots & & d_{n-2} & & d_{n-1} & & \dots \\
& & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & & & & \searrow\swarrow & & & \\
& & c & & c & & c & & & \dots & & & c & & \dots &
\end{array}$$

Abb. 5.2

Für das allgemeine Glied a_n gilt dann:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + d_{n-1} = \\ &= a_{n-2} + d_{n-2} + d_{n-1} = \dots = \\ &= a_1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + d_{n-1} \end{aligned}$$

Da die d_i eine arithmetische Folge mit Schrittweite c bilden, ist $d_i = d_1 + (i-1)\cdot c$. Für a_n folgt daraus:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{n-1} = \\ &= a_1 + d_1 + (d_1 + c) + (d_1 + 2c) + \dots + (d_1 + (n-2)\cdot c), \end{aligned}$$

und somit

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot c \qquad (5.2)$$

[5.3] Höhere Differenzen

Wir wollen den Prozeß der Differenzenbildung noch weiter fortsetzen. Dazu benötigen wir aber zuerst eine übersichtliche Schreibweise.

Es sei eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ gegeben. Die Folge ihrer ersten Differenzen bezeichnen wir mit

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= a_2 - a_1 \\ a_2^{(1)} &= a_3 - a_2 \\ &\dots \\ a_i^{(1)} &= a_{i+1} - a_i \text{ ist.} \end{aligned}$$

Die Folge der zweiten Differenzen von (a_n) bezeichnen wir mit

$$a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= a_2^{(1)} - a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} &= a_3^{(1)} - a_2^{(1)} \\ &\dots \\ a_i^{(2)} &= a_{i+1}^{(1)} - a_i^{(1)} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Folge der zweiten Differenzen der Folge (a_n) zugleich die Folge der ersten Differenzen der Folge $(a_n^{(1)})$ ist.

Wir setzen den Prozeß der Folgenbildung sinngemäß fort und bilden die Folgen der dritten Differenzen, vierten Differenzen, usw.

Allgemein bezeichnen wir die Folge der r-ten Differenzen von (a_n) mit

$$a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)}, \ldots,$$

wobei $a_k^{(r)} = a_{k+1}^{(r-1)} - a_k^{(r-1)}$ ist.

(Vergleiche: Prinzip der rekursiven Definition in § 4.)

Den Prozeß der iterierten (= wiederholten) Differenzenbildung können wir übersichtlich im folgenden Differenzenschema darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 \ \ldots \\
& a_1^{(1)} & & a_2^{(1)} & & a_3^{(1)} & & a_4^{(1)} & & a_5^{(1)} & & a_6^{(1)} \ \ldots & \\
& & a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} & & a_5^{(2)} \ \ldots & & \\
& & & a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} \ \ldots & & & \\
& & & & a_1^{(4)} & & a_2^{(4)} & & a_3^{(4)} \ \ldots & & & & \\
& & & & & \ldots & & & & & & &
\end{array}$$

Wir haben bisher Situationen untersucht, in denen die Folge der ersten Differenzen und die Folge der zweiten Differenzen konstant waren. Beidesmal gelang es uns, das "allgemeine Glied" a_n der Folge durch eine geschlossene Formel auszudrücken. Wir wollen nun versuchen, ob uns dies auch in dem Falle gelingt, daß erst die Folge der dritten Differenzen konstant ist.

Gegeben sei also eine Folge $(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ mit dem folgenden Differenzenschema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 \ \ldots \\
& a_1^{(1)} & & a_2^{(1)} & & a_3^{(1)} & & a_4^{(1)} & & a_5^{(1)} \ \ldots & \\
& & a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} \ \ldots & & \\
& & & c & & c & & c \ \ldots & & & \\
& & & & 0 & & 0 \ \ldots & & & &
\end{array}$$

Es ist also $a_i^{(3)} = c$ (für alle i).

Wenn wir beachten, daß die Glieder $a_i^{(3)}$ bezogen auf die Folge $(a_n^{(1)})$ die *zweiten* Differenzen darstellen, so erhalten wir unmittelbar aus (5.2):

$$a_i^{(1)} = a_1^{(1)} + (i-1)\cdot a_1^{(2)} + \frac{(i-1)(i-2)}{2}\cdot c \qquad (5.3)$$

Nach Definition der ersten Differenzen lassen sich nun die Glieder der Folge (a_n) folgendermaßen entwickeln:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + a_1^{(1)}$$

$$a_3 = a_2 + a_2^{(1)} = a_1 + a_1^{(1)} + a_2^{(1)}$$

$$a_4 = a_3 + a_3^{(1)} = a_1 + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)}$$

...

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1}^{(1)} = a_1 + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)}$$

Mit (5.3) folgt hieraus:

$$a_n = a_1 + a_1^{(1)} + \underbrace{(a_1^{(1)} + a_1^{(2)})}_{= a_2^{(1)}} + \underbrace{(a_1^{(1)} + 2\cdot a_1^{(2)} + c)}_{= a_3^{(1)}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{(a_1^{(1)} + (n-2)\cdot a_1^{(2)} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot c)}_{= a_{n-1}^{(1)}}$$

Durch Umordnung der Summanden erhalten wir:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + (1+2+3+\ldots+(n-2))\,a_1^{(2)} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{(i-2)(i-1)}{2}\cdot c \quad (5.4)$$

Hierbei ist zunächst wieder:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Weiterhin ist nach Aufgabe 4.6 und 4.7:

$$\sum_{i=3}^{n-1} \frac{(i-2)(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Insgesamt erhalten wir das Ergebnis:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\, a_1^{(2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot c \quad (5.5)$$

ist das allgemeine Glied der Folge (a_n) mit Anfangsglied a_1, den Anfangsdifferenzen $a_1^{(1)}$ und $a_1^{(2)}$ und den konstanten dritten Differenzen $a_i^{(3)} = c$ (für alle i).

Wenn wir beachten, daß 2 = 2! und 6 = 3! ist, können wir die Gleichung (5.5) zunächst auch etwas umständlicher schreiben:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!}\, a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\, a_1^{(2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\cdot c$$

Diese Fassung ist besser geeignet als (5.5), um Vermutungen anzustellen, wie es weitergeht:

Vermutung 1: Ist (a_n) eine Folge, deren vierte Differenzen konstant sind, etwa $a_i^{(4)} = c$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, so gilt:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!}\, a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\, a_1^{(2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\, a_1^{(3)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}\cdot c \quad (5.6)$$

Vermutung 2: Ist (a_n) eine Folge, deren r-te Differenzen konstant sind, etwa $a_i^{(r)} = c$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, so gilt:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!}\, a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\, a_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r)}{r!}\cdot c \quad (5.7)$$

Aufgabe 5.1

Beweisen Sie die beiden obigen Vermutungen.

Multipliziert man in (5.6) bzw. (5.7) die Klammern aus, so erhält man Ausdrücke der Form:

$$a_n = c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \ldots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

mit festen Zahlen c_i. Die rechte Seite dieser Gleichung nennt man auch ein *Polynom* in der Variablen n. Die Zahlen c_i heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Ist c_r von Null verschieden, so heißt r der *Grad* des Polynoms.

Unter etwas anderem Blickwinkel spricht man aus algebraischer Sicht meist eher von einer "Unbestimmten" als - wie oben - von einer "Variablen". Wir wollen auf diesen Unterschied hier jedoch nicht eingehen.

Aufgabe 5.2

Bestimmen Sie die höheren Differenzen zu der Folge mit den Anfangsgliedern

4516, 6788, 9307, 12 009, 14 830.

a) Geben Sie ein Polynom f(n) an, das diese Werte an den Stellen n = 1, 2, 3, 4, 5 annimmt.
b) Drücken Sie f(n) als Polynom h(k) in der Variablen k aus, wo $k = \frac{6n-1}{10}$ ist.
c) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle mit $m = 10\,000 \cdot k + 16\,000$:

n	k	m	f(n) = h(k) = g(m)
1	0,5	21 000	4516
2			6788
3			9307
4			12 009
5			14 830

Abb. 5.3

d) Ermitteln Sie die Einkommensteuer zu den in der Spalte unter m gegebenen Jahreseinkommen nach der Tabelle des Grundtarifs (Einkommensteuergesetz von 1975, § 32 a).
e) Vergleichen Sie das Polynom h(k) mit dem gesetzlich vorgegebenen Polynom zur Berechnung der Steuer zwischen 16 020 und 48 000 DM.
f) Erklären Sie die geringfügigen Abweichungen bei den Koeffizienten.
g) Berechnen Sie die Einkommensteuer (nach Grundtarif) für die Einkommen von 24 000,- DM und 36 390,- DM.

[5.4] Umkehrung der Fragestellung: Folgen, die durch Polynome gegeben sind

Bei den Untersuchungen in Abschnitt 5.3 waren wir von der Frage ausgegangen, wie die geschlossene Darstellung einer Folge lautet, die eine konstante Differenzenfolge besitzt. Wir erhielten Lösungen, die eine furchteinflößende Länge besaßen, z. B. (5.7):

Für $a_i^{(r)} = c$ ist:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!} a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} a_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{r!} \cdot c$$

Wir wollen dieses Ungetüm einmal respektlos zerlegen. Für eine fest vorgegebene Folge sind

$$a_1$$
$$a_1^{(1)} = a_2 - a_1$$
$$a_1^{(2)} = a_2^{(1)} - a_1^{(1)} = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = a_3 - 2a_2 + a_1$$
$$\ldots$$

feste Zahlen, die zur Berechnung von a_n einzusetzen sind. Dasselbe gilt für c.

Zum Beispiel galt für unsere zuerst betrachtete Folge

3, 14, 33, 60, 95, 138,...:

$$a_1 = 3; a_1^{(1)} = a_2 - a_1 = 14 - 3 = 11$$
$$a_1^{(2)} = a_2^{(1)} - a_1^{(1)} = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = 8$$

In diesem speziellen Fall war bereits $a_1^{(2)} = c$, es war also $c = 8$, und das allgemeine Glied lautete:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!} a_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} c$$

Daraus folgt

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 11 + (n-1)(n-2)\cdot 4$$

und somit

$$a_n = 4n^2 - n$$

Das Beispiel und die Vorüberlegung dazu zeigen, daß bei jeder vorgegebenen Folge mit konstanten r-ten Differenzen das allgemeine Glied a_n in ganz bestimmter Weise von der Variablen n abhängt. Wenn wir in der Gleichung (5.7) die Klammern ausmultiplizieren, sehen wir, daß n in a_n in verschiedenen Potenzen vorkommt. Fassen wir noch Summanden mit derselben Potenz von n zusammen und ordnen wir die Potenzen von n, so erhalten wir für a_n einen Ausdruck der Form:

$$k_r n^r + k_{r-1} n^{r-1} + \ldots + k_2 n^2 + k_1 n + k_0 \qquad (5.8)$$

Dabei sind $k_1, \ldots, k_r$ feste Zahlen (Konstanten). Der Ausdruck (5.8) stellt somit ein Polynom vom Grade r in der Variablen n dar. Je nachdem, aus welchem Zahlbereich die Glieder der Folge (a_n) stammen, sind die Koeffizienten k_i ganze Zahlen, Brüche, reelle oder komplexe Zahlen.

Die Quintessenz des Abschnitts [5.3] war die Erkenntnis: Ist für die Folge (a_n) die r-te Differenzenfolge konstant, etwa $a_i^{(r)} = c$ $(c \neq 0)$, so ist a_n als ein Polynom vom Grade r in n darstellbar.

Speziell gilt: Ist insbesondere $r = 1$ (arithmetische Folge), so ist das Polynom vom Grade 1:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (d = a_i^{(1)})$$

Polynome vom Grade 1 nennt man auch *linear*.

Es liegt nahe, die Frage nach der Umkehrung des oben betrachteten Sachverhalts zu stellen:

Es sei $(a_n)_{n=1,2,3,...}$ eine Folge, deren allgemeines Glied a_n die Form eines Polynoms in n hat, etwa:

$$a_n = c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \ldots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

Kann man hieraus Schlüsse über die Konstanz der Differenzenfolgen von (a_n) ziehen?

Beispiel: Es sei $a_n = 2n^3 - n^2 + 4$. Die Anfangsglieder der Folge lauten dann:

	5		16		49		116		229		400		641	...
Erste Differenzen:		11		33		67		113		171		241		...
Zweite Differenzen:			22		34		46		58		70		...	
Dritte Differenzen:				12		12		12		12		...		

In diesem Beispiel gilt also auch die Umkehrung: Das allgemeine Glied der Folge (a_n) ist ein Polynom dritten Grades in n, und die dritten Differenzen erweisen sich als konstant.

Wir wollen den allgemeinen Fall zunächst noch einmal sauber formulieren:

Satz 5.1

> Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge, deren Glieder a_n sich als Werte eines Polynoms vom Grade r in n ergeben, etwa
>
> $$a_n = c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \ldots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$
>
> Dann ist die Folge der r-ten Differenzen der Folge (a_n) konstant.

Beweis mit vollständiger Induktion nach dem Grade r des Polynoms:

Induktionsverankerung

Es sei r = 1. Dann gilt für alle n:

$$a_n = c_1 n + c_0$$

Es liegt eine arithmetische Folge mit konstanten ersten Differenzen vor, denn

$$a_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n = c_1(n+1) + c_0 - (c_1 n + c_0) = c_1$$

Induktionsannahme

Die Aussage sei richtig für Polynome vom Grade k (oder von kleinerem Grade).

Induktionsschluß

Die Glieder a_n seien gegeben durch:

$$a_n = c_{k+1} n^{k+1} + c_k n^k + \ldots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

Für die Folge der ersten Differenzen $a_n^{(1)}$ gilt:

$$a_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n =$$

$$\left.\begin{aligned} &= c_{k+1}(n+1)^{k+1} + c_k(n+1)^k + \ldots + c_2(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_0 - \\ &- c_{k+1}n^{k+1} - c_k n^k - \ldots - c_2 n^2 - c_1 n - c_0 \end{aligned}\right\} \quad (5.9)$$

Auch vor diesem Ausdruck sollte man nicht respektvoll zur Salzsäule erstarren. Wir müssen uns nur klarmachen, was wir eigentlich wollen. Falls es uns nämlich gelingt, zu zeigen, daß die Glieder der Folge $(a_n^{(1)})_{n=1,2,3,\ldots}$ Werte von Polynomen in n vom Grade k (oder kleiner) sind, dann wissen wir nach Induktionsannahme, daß die k-te Differenzenfolge der Folge $(a_n^{(1)})$ und somit die (k+1)-te Differenzenfolge der Folge (a_n) konstant ist.

Es bleibt also nur zu zeigen, daß der Grad von $a_n^{(1)}$ kleiner als $k+1$ ist. Die einzigen Summanden in (5.9), die dies verhindern könnten, sind

$$c_{k+1}(n+1)^{k+1} \quad \text{und} \quad -c_{k+1}n^{k+1}.$$

Nun ist $(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + p(n)$, wobei p(n) ein Polynom vom Grade k ist. Also heben sich die beiden Terme

$$c_{k+1}n^{k+1} \quad \text{und} \quad -c_{k+1}n^{k+1} \quad \text{auf.}$$

$a_n^{(1)}$ ist somit ein Polynom von kleinerem Grad als $k+1$, und die Aussage ist bewiesen.

[5.5] Differenzen bei geometrischen Folgen

Schon das Differenzenschema

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 && 2 && 4 && 8 && 16 && 32 && 64 \;\ldots \\ & 1 && 2 && 4 && 8 && 16 && 32 \;\ldots & \\ && 1 && 2 && 4 && 8 && 16 \;\ldots && \\ &&& 1 && 2 && 4 && 8 \;\ldots &&& \end{array}$$

zeigt uns, daß die Verhältnisse bei geometrischen Folgen offenbar anders liegen als bei den polynomialen (= durch Polynome definierbaren) Folgen des vorigen Abschnitts.

Allgemein sieht das Differenzenschema der durch

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

gegebenen geometrischen Folge mit Anfangsglied a_1 folgendermaßen aus:

Folge	a_1	qa_1	q^2a_1	q^3a_1	q^4a_1	$q^5a_1 \ldots$
Erste Differenzen	$a_1(q-1)$	$a_1q(q-1)$	$a_1q^2(q-1)$	$a_1q^3(q-1)$	$a_1q^4(q-1) \ldots$	
Zweite Differenzen	$a_1(q-1)^2$	$a_1q(q-1)^2$	$a_1q^2(q-1)^2$	$a_1q^3(q-1)^2 \ldots$		
Dritte Differenzen	$a_1(q-1)^3$	$a_1q(q-1)^3$	$a_1q^2(q-1)^3 \ldots$			

Die Folge der r-ten Differenzen ist dann entsprechend obigem Schema:

$$a_1(q-1)^r, \quad a_1 q(q-1)^r, \quad a_1 q^2(q-1)^r, \ldots$$

Diese Folge ist natürlich im allgemeinen nicht konstant. Konstanz liegt nur vor, falls

$$a_1(q-1)^r = a_1 q^n (q-1)^r \qquad \text{(für alle n)},$$

das heißt, falls

(1.) $a_1 = 0$ oder (2.) $q = 1$ ist.

§ 6 Zum Begriff der Differenzengleichung

Wir haben gesehen, daß man aus vorgegebenen Folgen Gleichungen gewinnen kann, in denen gewisse Differenzen der Folgenglieder auftreten.

Umgekehrt konnten wir aus Gleichungen, in denen solche Differenzen auftraten, die gesamte Folge (ausgehend von gewissen Anfangswerten) wiedergewinnen.

Schematisch haben wir die folgende Situation:

Folge		Gleichung
Beispiele:		
$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d, \ldots$	$\longleftrightarrow$	$a_{n+1} - a_n = d$; Anfangsglied: a_1
$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2, \ldots$	$\longleftrightarrow$	$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$; Anfangsglieder: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$
$a_1,\ q\,a_1,\ q^2 a_1,\ q^3 a_1, \ldots$	$\longleftrightarrow$	$a_{n+1} = q\,a_n$; Anfangsglied: a_1

Abb. 6.1

Gleichungen, wie sie rechts auftreten, wollen wir als Differenzengleichungen bezeichnen.

Definition 6.1

> Eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen den Werten einer Folge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$ an je $n+1$ aufeinanderfolgenden Stellen $a_k, \ldots, a_{k+n}$ herstellt, heißt *Differenzengleichung* (DG) der Ordnung n.

(Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, daß wir in obiger Definition als Laufvariable für die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Variable k an Stelle der bisher verwendeten Variablen n gewählt haben. Dies tun wir, um die Variable n für die Ordnung der Differenzengleichung frei zu halten, wie es meist der in der Literatur gebräuchlichen Terminologie entspricht.)

Bei der Mathematisierung verschiedenster Probleme stößt man häufig zunächst auf rekursive Beschreibungen der Probleme, die sich dann meist ziemlich direkt in konkrete Differenzengleichungen übersetzen lassen.

Beispiel: Eine Treppe hat 10 Stufen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Treppe hinaufzugehen, wenn man beim Hinaufsteigen entweder eine oder zwei Stufen auf einmal nehmen kann?

Bei einer Treppe mit 3 Stufen gibt es die folgenden Möglichkeiten:

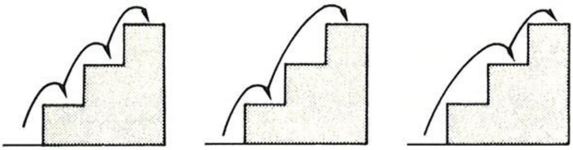


Abb. 6.2

Würde man die Anzahl der Möglichkeiten bei 8- und 9stufigen Treppen kennen, so ergäbe sich daraus

$$a_{10} = a_8 + a_9$$

für die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten. Denn von der 8. Stufe führt noch ein Doppelschritt und von der 9. Stufe noch ein einfacher Schritt zur 10. Stufe. (Man mache sich klar, daß der Weg "..., 8. Stufe, 9. Stufe, 10. Stufe" dabei durch die zweite Variante erfaßt ist.)

Entsprechend gibt es bei einer Treppe mit k Stufen

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \tag{6.1}$$

Möglichkeiten, die Treppe (ein- oder zweistufig) hinaufzugehen.

Für kleine Treppen erkennen wir leicht:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 3$$

Hieraus ergibt sich mit der obigen Rekursionsbedingung:

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 8$$
$$a_6 = 13; \quad a_7 = 21; \quad a_8 = 34; \quad a_9 = 55; \quad a_{10} = 89$$

Wie aber lautet a_{50} oder a_{100}?

Wir könnten den iterativen (= sich ständig nach demselben Schema wiederholenden) Prozeß natürlich fortsetzen, was aber sehr mühselig wäre. Tatsächlich hat man oft keine andere Möglichkeit. Man sollte in einem solchen Falle dafür sorgen, daß man einen programmierbaren Taschenrechner oder einen Kleincomputer zur Hand hat, der einem die eintönige, sich immer wiederholende Rechenarbeit abnimmt.

Noch besser wäre es allerdings, wenn wir eine Möglichkeit hätten, a_k direkt in Abhängigkeit von k (an Stelle von a_{k-1} und a_{k-2}) zu berechnen. Eine Formel, die eine solche direkte Berechnung von a_k ermöglicht, nennt man auch eine *explizite*, im Gegensatz zu der in (6.1) gegebenen *rekursiven* Darstellung.

Eine solche ist für unser Treppenproblem:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right] \tag{6.2}$$

Wir überprüfen einige Werte:

$$a_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1+2\sqrt{5}+5)-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+3\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}^2+\sqrt{5}^3}{8} - \frac{1-3\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}^2-\sqrt{5}^3}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{8}\right] = \frac{16}{8} = 2$$

$$a_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{11} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{11}\right] = ?$$

Wertet man den Ausdruck für a_{10} mit dem Taschenrechner unter Zuhilfenahme der y^x-Taste aus, so erhält man den in Anbetracht der unvermeidbaren Rechenungenauigkeit sehr brauchbaren Wert:

$$a_{10} \cong 89{,}000\,081$$

Unterschiedliche Taschenrechnerfabrikate können - je nach dem verwendeten Näherungsverfahren - auch hiervon abweichende Werte geben.

Durch das Überprüfen von Einzelwerten kann man natürlich nie die Allgemeingültigkeit der Formel (6.2) beweisen.

Aufgabe 6.1

Beweisen Sie die Formel (6.2).

Selbst wenn die Gültigkeit der expliziten Formel unserer rekursiven Fassung allgemein bewiesen ist, wird man sich in Anbetracht der Kompliziertheit der Formel fragen: Wie kommt man auf solch einen Ausdruck?

Dafür gibt es kein Patentrezept. Man kann hier aber - wie auch auf anderen Gebieten üblich - nach dem "Baukastenprinzip" vorgehen:

1. Zerlege ein gegebenes komplexes Problem in kleinere, leichter überschaubare Teilprobleme.
2. Löse die einzelnen Teilprobleme.
3. Stimme (notfalls) die gefundenen Einzellösungen aufeinander ab.
4. Setze die Teillösungen zu einer Lösung des Gesamtproblems zusammen.

(6.3)

Ein solches "blockweise" vorgehendes Verfahren bezeichnet man auch als *modulares Problemlöseverfahren*.

Es findet in der Mathematik und besonders auch in der Informatik häufig Verwendung. Einige der höheren Programmiersprachen, die sogenannten "strukturierten Sprachen", sind so konzipiert, daß sie diese modulare Vorgehensweise beim Problemlösen besonders gut unterstützen. Zur Zeit (1982) ist dies unter anderen bei den Sprachen PASCAL, ELAN und LOGO in hohem Maße der Fall. Die Sprache BASIC hat zwar andere Vorzüge, besonders den der leichten Lernbarkeit, sie unterstützt jedoch modulare Konzepte nicht so gut wie die obengenannten Sprachen.

Wir wollen nun die Haupttypen von Differenzengleichungen beschreiben. Aus Gründen der einheitlichen Darstellung, auch im Hinblick auf die Literatur zu diesem Thema, werden wir im folgenden die allgemeinen Glieder einer Folge, die wir bisher meist mit a_k, gelegentlich auch mit b_k und d_k, bezeichnet haben, im Normalfall mit y_k bezeichnen.

Zwei besonders einfache Fälle haben wir bereits gelöst, ohne uns vielleicht des rekursiven Charakters allzu bewußt zu sein:

Die zur arithmetischen Folge gehörende Differenzengleichung

$$y_{k+1} - y_k = d \tag{6.4}$$

hat die Lösung

$$y_k = y_1 + (k-1)\cdot d.$$

Im Hinblick auf den Tausch der Laufvariablen, k statt n, sei hier nochmals an die Bemerkung im Anschluß an Definition 6.1 erinnert.

Die zur geometrischen Folge gehörende Differenzengleichung

$$y_{k+1} = q\cdot y_k \qquad (\text{bzw.} \quad y_{k+1} - q\cdot y_k = 0) \tag{6.5}$$

hat die Lösung

$$y_k = q^{k-1}y_1.$$

Als weitere Differenzengleichung erster Ordnung haben wir in § 4 bereits das Beispiel

$$y_{k+1} = (k+1)\cdot y_k \qquad (\text{bzw.} \quad y_{k+1} - (k+1)\cdot y_k = 0) \tag{6.6}$$

kennengelernt.

Diese drei Beispiele unterscheiden sich von der Gleichung

$$y_{k+1}^2 + e^{y_k} = \sin(k) \tag{6.7}$$

dadurch, daß die Folgenglieder y_k nicht als Argumente von Funktionen und insbesondere nur in der ersten Potenz vorkommen. Man nennt die Gleichungstypen (6.4) bis (6.6) deshalb auch *linear*.

Definition 6.2

a) Eine Differenzengleichung der Form

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k)$$

(mit von k abhängigen Funktionen

$$f_1, f_0, g \;:\; \mathbb{N} \longrightarrow M,$$

wobei $M = \mathbb{Q}$ oder $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$ sei), heißt *linear*.

Allgemeiner:

b) Sei n eine feste natürlich Zahl und f_i $(i = 0,\ldots,n)$ bzw. g Funktionen vom Typ

$$f_i\,,\, g \;:\; \mathbb{N} \longrightarrow M$$

(mit $M = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann heißt die Differenzengleichung der Form

$$f_n(k)\cdot y_{k+n} + f_{n-1}(k)\cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_2(k)\cdot y_{k+2} + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k) \quad (6.8)$$

linear.

Falls die Funktionen $f_n(k)$ und $f_0(k)$ nie den Wert Null annehmen, erstreckt sich die "Spannweite" der Differenzengleichung (6.8) stets über die volle Länge n. Man sagt dann, die Differenzengleichung hat die *Ordnung* n.

c) Falls die Funktionen f_i $(i = 0,\ldots, n)$ alle konstant sind, etwa:

$$\begin{aligned} f_0(k) &= a_0 && \text{(für alle } k) \\ f_1(k) &= a_1 && \text{(für alle } k) \\ &\ldots \\ f_n(k) &= a_n && \text{(für alle } k), \end{aligned}$$

nennt man die Differenzengleichung

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = g(k) \quad (6.9)$$

eine *lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten*.

Wenn in (6.9) die Konstanten a_n und a_0 von Null verschieden sind, hat die Gleichung die *Ordnung* n.
Diese Annahme wird man bei einer Schreibweise wie in (6.9) im Normalfall natürlich stets machen, da man im Falle von $a_n = 0$ bzw. $a_0 = 0$ die Glieder $a_n y_{k+n}$ bzw. $a_0 y_k$ gleich hätte weglassen können.

Wenn also $a_n \neq 0$ ist, können wir auch die Gleichung (6.9) ohne Veränderung der Lösungsgesamtheit mit a_n "durchdividieren", d. h., wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Koeffizient von y_{k+n} gleich 1 ist.

Entsprechendes gilt auch in bezug auf Definition 6.2 b), wo wir im Falle von $f_n(k) \neq 0$ (für alle k) die Gleichung (6.8) mit $f_n(k)$ durchdividieren können.

d) Ist auch noch die in (6.9) auf der rechten Seite auftretende Funktion g(k) konstant, etwa:

$$g(k) = b \quad \text{(für alle } k),$$

so nennt man die Gleichung

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \quad (6.10)$$

eine Differenzengleichung mit *konstanter Inhomogenität*.
Ist darüber hinaus $b = 0$, so nennt man die Gleichung *homogen* (andernfalls: inhomogen).

Wir sollten uns noch den Lösungsbegriff für Differenzengleichungen klar vor Augen führen. Wie wir in § 1 sahen, ist die Lösung der Folge

$$y_{k+1} = y_k + d \quad (6.11)$$

mit Anfangsglied y_1 gegeben durch:

$$y_k = y_1 + (k-1)\cdot d \qquad (k = 1, 2,\ldots)$$

Die Lösung einer Differenzengleichung ist also stets eine Folge $(y_k)_{k=1, 2, 3,\ldots}$ von rationalen, reellen oder auch komplexen Zahlen.

Wenn wir den Anfangswert y_1 nicht vorgeben, sondern nur die Gleichung (6.11) betrachten, kommen noch weitere Lösungen in Frage, z. B. (y_k) mit $y_k = kd$ oder $y_k = 17 + kd$.

Die Lösung einer Differenzengleichung ist im allgemeinen erst durch die Vorgabe von Anfangswerten eindeutig bestimmt. Wie wir uns an den betrachteten Beispielen klarmachen können, benötigt man im Falle einer Differenzengleichung n-ter Ordnung n Anfangswerte $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Eine detailliertere Betrachtung der Lösungsbedingungen und Lösungsmengen von Differenzengleichungen werden wir in den folgenden Abschnitten durchführen.

Aufgabe 6.2

Diskutieren Sie die Begriffe "Ordnung" und "Lösung" an den folgenden Differenzengleichungen:

a) $(k+3)\,a_{k+1} - a_k = 0; \quad a_1 = 840$

b) $(k-3)\,a_{k+1} - a_k = 0; \quad a_1 = -4$

c) $(k-3)\,a_{k+1} - a_k = 0; \quad a_1 = 0$

II LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

§ 7 Die Tilgungsgleichung (lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Beispiel: Tilgung von Darlehen

Ein Bauherr nimmt bei einer Bank oder Bausparkasse ein Darlehen von 100 000,- DM auf, das er im Laufe mehrerer Jahre durch periodische Zahlungen zu gleichen Beträgen zurückzuzahlen hat. Als Zahlungsperiode nehmen wir der Einfachheit halber ein Jahr an; der Bauherr zahlt stets zum Ablauf des jeweiligen Jahres. Da in dem abgelaufenen Jahr aber auch Zinsen für das Darlehen bzw. für die jeweilige Restschuld angefallen sind, werden die periodischen Rückzahlungen (Ratenzahlungen) so angesetzt, daß sie erstens die angefallenen Zinsen decken und zweitens einen im Laufe der Zeit größer werdenden Teil des Darlehens bzw. der Restschuld tilgen. Die periodischen Zahlungen heißen deshalb auch "Tilgungsraten". Dieser Prozeß wird so lange fortgesetzt, bis das gesamte ursprünglich ausgezahlte Darlehen getilgt (zurückgezahlt) ist.

Nehmen wir an, der Bauherr muß für das Darlehen jährlich 5% Zins (auf die jeweilige Restschuld) zahlen. Dann muß die jährliche Rückzahlungsrate über 5 000,- DM liegen, die allein zur Deckung der Zinsen notwendig sind. Nehmen wir an, die Tilgungsrate ist auf 10 000,- DM jährlich festgesetzt.

Nach Ablauf des ersten Jahres beträgt die Restschuld somit in DM:

$$D_1 = (1 + \frac{5}{100}) \cdot D - 10\,000 = 95\,000$$

(Beachte I, § 3 zum prozentualen Wachstum.)

Nach Ablauf der zweiten Periode:

$$D_2 = (1 + \frac{5}{100}) \cdot D_1 - 10\,000 = 89\,750$$

und so weiter.

Wir stellen diesen Prozeß der Übersichtlichkeit halber in Tabellenform dar. Man nennt diese Tabelle auch einen Tilgungsplan.

Nach Ablauf des $(k+1)$-ten Jahres ist (mit $D_0 := D$):

$k+1$	$(1 + \frac{5}{100}) \cdot D_k$	$D_{k+1} = (1 + \frac{5}{100}) \cdot D_k - 10\,000$ (Restschuld)
1	105 000,-	95 000,-
2	99 750,-	89 750,-
3	94 237,50	84 237,50
4	88 449,36	78 449,36
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Abb.7.1

Aufgabe 7.1

Stellen Sie für Ihren Taschenrechner unter Ausnutzung eventueller Speichermöglichkeiten einen "optimalen" Rechenablaufplan zur sukzessiven Berechnung der Tabellenwerte in Abbildung 7.1

auf. Diskutieren Sie dabei verschiedene mögliche Kriterien, nach denen der Rechenablaufplan als optimal bezeichnet werden kann.

Nehmen wir nun an, die Bank gewährt ein Darlehen vom Betrage D (in DM) zum Jahreszinssatz von p%. Die jährliche Tilgungsrate sei R (in DM). Entsprechend der Kopfzeile von Abbildung 7.1 erhalten wir für die Restschuld nach Ablauf des (k + 1)-ten Jahres die rekursive Gleichung

$$D_{k+1} = (1 + \frac{p}{100}) \cdot D_k - R \tag{7.1}$$

mit dem Anfangswert

$$D_0 = D$$

Ersetzen wir in (7.1) D_i durch y_i, $(1 + \frac{p}{100})$ durch $-a_0$ und $-R$ durch b, so erhalten wir die Gleichung

$$y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b \tag{7.2}$$

Wir erkennen somit, daß unsere rekursive Beschreibung des Problems zu einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität geführt hat. Mit der Lösung derartiger Gleichungen beherrschen wir also zugleich sämtliche Tilgungsprobleme der im Eingangsbeispiel dargestellten Art.

Die allgemeine Form einer Gleichung vom erwähnten Typ ist nach I, § 6:

$$a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b \qquad (\text{mit } a_1,\ a_0 \neq 0) \tag{7.3}$$

Da wir die Folgenwerte - ausgehend von festen Anfangswerten y_0 oder y_1 - häufig rekursiv berechnen, ist es günstig, (7.3) in eine Form überzuführen, wo y_{k+1} isoliert ist:

$$y_{k+1} = -\frac{a_0}{a_1} y_k + \frac{b}{a_1}$$

Mit den neuen Koeffizienten $A = -\frac{a_0}{a_1}$ und $B = \frac{b}{a_1}$ erhält der betrachtete Gleichungstyp somit die Gestalt:

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \tag{7.4}$$

Die Darstellung (7.1) bzw. (7.4) ist also gleichwertig der allgemeinen Form der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität. Da letzteres Wortungetüm so scheußlich klingt, wollen wir bei (7.4) im folgenden kurz von der *Tilgungsgleichung* sprechen.

Ist nun etwa der Anfangswert y_0 vorgegeben, so berechnen sich die weiteren Folgenglieder aus y_0 nach dem folgenden Schema:

$$\begin{aligned}
&y_0\\
&y_1 = A \cdot y_0 + B\\
&y_2 = A \cdot y_1 + B = A \cdot (A \cdot y_0 + B) + B = A^2 y_0 + AB + B\\
&y_3 = A \cdot y_2 + B = A \cdot (A^2 y_0 + AB + B) + B = A^3 y_0 + A^2 B + AB + B\\
&y_4 = A \cdot y_3 + B = A^4 y_0 + A^3 B + A^2 B + AB + B
\end{aligned}$$

Der Aufbau weiterer Folgenglieder ist völlig durchsichtig, und wir erkennen sofort:

$$y_k = A^k y_0 + A^{k-1}B + A^{k-2}B + \ldots + A^2B + AB + B$$

bzw.

$$y_k = A^k y_0 + (A^{k-1} + A^{k-2} + \ldots + A^2 + A + 1)\cdot B \tag{7.5}$$

Aufgabe 7.2

Beweisen Sie (7.5) unter expliziter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion.

Nach (4.3) ist nun, mit A statt x und k - 1 statt n,

$$(A^{k-1} + A^{k-2} + \ldots + A^2 + A + 1)(1 - A) = 1 - A^k$$

Falls $A \neq 1$ ist, können wir diese Gleichung mit $(1 - A)$ durchdividieren, und wir erhalten so das Ergebnis:

Satz 7.1

Die Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = A\cdot y_k + B$$

hat in Abhängigkeit vom Anfangswert y_0 die Lösung

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + \dfrac{1 - A^k}{1 - A}\cdot B & \text{(falls } A \neq 1 \text{ ist)} \\ y_0 + k\cdot B & \text{(falls } A = 1 \text{ ist)} \end{cases} \tag{7.6}$$

Aufgabe 7.3

Spezialisieren Sie die Koeffizienten A und B in Satz 7.1 so, daß der Satz zur Aussage über arithmetische bzw. geometrische Folgen wird.

Aufgabe 7.4

a) Stellen Sie einen Algorithmus zur sukzessiven Berechnung der Folgenwerte y_i aus der Tilgungsgleichung (7.4) auf. Halten Sie dabei die Koeffizienten A, B und den Anfangswert y_0 variabel.
b) Durchlaufen Sie den Algorithmus anhand einiger Beispielswerte unter Zuhilfenahme eines nicht programmierbaren Taschenrechners. Legen Sie übersichtliche Tabellenschemata an.
c) Setzen Sie den Algorithmus in ein Programm für einen Kleincomputer oder programmierbaren Taschenrechner um, falls Sie zu derartigen Geräten Zugang haben.

Aufgabe 7.5

Zum Tilgungsproblem
Häufig erfolgen die periodischen Zahlungen der Tilgungsraten nicht jährlich, sondern monatlich, vierteljährlich oder halbjährlich. Die Zinsen mögen in jedem dieser Fälle, auf die entsprechende Tilgungsperiode bezogen, nach der folgenden Sparkassenkonvention abgerechnet werden. Ist p% der Jahreszinssatz, so wird der Monatszinssatz auf $\frac{p}{12}$%, der Vierteljahres-

zinssatz auf $\frac{p}{4}$ % und der Halbjahreszinssatz auf $\frac{p}{2}$ % festgesetzt. Man spricht in diesen Fällen von *unterjährigen* Ratenzahlungen

a) Stellen Sie für den Jahreszinssatz von 12% und ein Darlehen von 30 000,- DM die Tilgungspläne zu den folgenden Rückzahlungsbedingungen auf:

(i)	jährlich	12 000,- DM;
(ii)	halbjährlich	6 000,- DM;
(iii)	vierteljährlich	3 000,- DM;
(iv)	monatlich	1 000,- DM.

b) Begründen Sie, warum sich die Tilgungszeiten (Zeiten bis zur vollständigen Rückzahlung des Darlehens) unterscheiden, obwohl die jährlich gezahlten Beträge in allen vier Fällen gleich groß sind.

c) Schätzen Sie den Verlauf des Funktionsgraphen der Restschuld im (k,D_k)-Koordinatensystem qualitativ - ohne Rückgriff auf die Werte aus Aufgabe a) - und fertigen Sie eine Handskizze dazu an.
Zeichnen Sie die Werte aus a) in ein (k, D_k)-Koordinatensystem ein und vergleichen Sie den Funktionsverlauf mit Ihrer Schätzung.

Aufgabe 7.6

In einem Fischteich befinden sich im Jahre 1979 600 Karpfen, die sich mit einer halbjährlichen Wachstumsrate von 60 % vermehren. Im Halbjahresabstand werden dem Teich jeweils 300 Karpfen entnommen.

a) Wie viele Karpfen befinden sich nach 2 Jahren im Teich?

b) Stellen Sie die Anzahl der Karpfen im Teich zwischen 1979 und 1986 in Halbjahresabständen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

c) Versuchen Sie, eine Erklärung dafür zu finden, daß die errechneten Anzahlen für längere Zeiträume gegenüber "realistischen" Werten viel zu groß werden.

Aufgabe 7.7

Finnische Forstwirtschaft

Dem Buche "Finnland stellt sich vor" aus dem Otava-Verlag (Helsinki, 10. Auflage 1978) sind die folgenden Angaben zur Forstwirtschaft des Landes zu entnehmen:

Waldfläche:	22,4 Millionen Hektar (entspricht 73 % der Landfläche)
Holzbestand:	1501 Millionen Festmeter (ohne Rinde)
jährlicher Zuwachs:	56,9 Millionen Festmeter
jährlicher Gesamteinschlag:	54,0 Millionen Festmeter

a) Entwickeln Sie ein Modell für das Wachstum des finnischen Waldbestandes; diskutieren Sie verschiedene Modellannahmen (arithmetisches Wachstum, geometrisches Wachstum,...).

b) Diskutieren Sie die Grenzen des Modells.

c) Ermitteln Sie, wann bei uneingeschränkter Extrapolation (Projektion) Ihres Modells in die Zukunft ganz Finnland zu 100 % bewaldet sein wird.

Beispiel: Rentenrechnung

In Abweichung vom alltagssprachlichen Gebrauch des Wortes bezeichnet man in den Wirtschaftswissenschaften jeden festen Geldbetrag, der in gleichbleibenden Zeitabständen gezahlt wird, als eine *Rente*. Wir wollen der Einfachheit halber als Zeitraum ein Jahr annehmen. Man unterscheidet:

- Renten, bei denen die Zahlung zum Jahresbeginn erfolgt (*vorschüssige* Renten), und
- Renten, bei denen die Zahlung zum Jahresende erfolgt (*nachschüssige* Renten).

Wir wollen uns hier auf die nachschüssige Rente beschränken. Weiterhin wollen wir annehmen, daß die Rente auf ein festes Konto gebucht wird, das vor Beginn der Rentenzahlung leer war und von dem nicht abgebucht wird. Wird das Konto mit p % jährlich verzinst, so ist der aufgelaufene Kontostand in DM bei einer Rate von R DM:

- nach Ablauf des 1. Jahres: $S_1 = R$
- nach Ablauf des k-ten Jahres: S_k
- nach Ablauf des (k + 1)-ten Jahres: $S_{k+1} = (1 + \frac{p}{100}) \cdot S_k + R$ (7.

Die rekursive Rentengleichung (7.7) ist also vom selben Typ wie die Tilgungsgleichung (7.1) bzw. (7.4). Aus Satz 7.1 folgt sofort für von Null verschiedene Zinssätze (mit $S_0 = 0$) unter Verwendung des Zinsfaktors $q = 1 + \frac{p}{100}$:

$$S_k = \frac{1 - q^k}{1 - q} \cdot R \qquad (7.\!\!$$

S_k nennt man auch den *Endwert* der Rente nach Ablauf des k-ten Jahres. Der sogenannte *Renten-Endwertfaktor* $\frac{1 - q^k}{1 - q}$ ist zur bequemeren Berechnung für verschiedene Jahreswerte von k vielfach tabelliert.

Aufgabe 7.8

Ein Elternpaar zahlt von der Geburt seines Kindes an jährlich 500,- DM nachschüssig auf ein mit 5,5 % verzinstes Sparbuch ein. Welcher Betrag hat sich auf dem Konto angesammelt, wenn das Kind 20 Jahre alt ist?

Aufgabe 7.9

a) Herr M. möchte ab sofort 20 Jahre lang eine Rente von jährlich 10 000,- DM beziehen. Welchen Betrag B muß er jetzt dafür einzahlen, wenn sowohl B als auch die Rente zum Zinssatz von 4,75 % verzinst werden?
(Man nennt B auch den *Barwert* der Rente.)

b) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwertes B aus der Rente R, dem Zinsfaktor q und der Laufzeit l auf.

Aufgabe 7.10

Der Ansparvorgang bei Bausparverträgen entspricht häufig einer Rentenzahlung.
Ein Bausparer schließt einen Bausparvertrag über 50 000,- DM ab.

a) Er zahlt darauf monatlich 125,- DM ein. (Das sind 2,50 DM pro tausend DM Bausparsumme.) Das Bausparguthaben wird mit 3 % jährlich verzinst. Wie groß ist es nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Jahren? (Zur Berechnung der unterjährigen Zinsen nach der Sparkassenkonvention siehe Aufgabe 7.5.)

b) Der Bausparer möchte durch seine monatlichen Einzahlungen nach 3 Jahren 40 % der Bausparsumme von 50 000,- DM angespart haben. Welchen Sparbeitrag muß er monatlich leisten? (Zinssatz 3 % jährlich.)

Aufgabe 7.11

Grundaufgaben der Rentenrechnung
In der Rentengleichung (7.8) kommen die vier Variablen R, q, k und S_k vor. Lösen Sie (7.8) nach R und k auf. Diskutieren Sie die Auflösung der Gleichung nach q.

Aufgabe 7.12

Häufig ist der Anfangswert eines Problems nicht durch y_0, sondern durch y_1, y_2 oder allgemein durch y_a ($a \in \mathbb{Z}$) gegeben. Stellen Sie entsprechend zu Satz 7.1 die explizite Lösung der Gleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \qquad \text{(mit } k \geq a\text{)}$$

in Abhängigkeit vom Anfangswert y_a dar.

Auch Spiele haben häufig einen rekursiven Charakter, wie z. B.
Die Türme von Hanoi (gelegentlich auch Türme von Benares).
Einem alten buddhistischen Mönch soll einst die folgende Aufgabe gestellt worden sein:
Im Tempelvorhof waren drei Pflöcke aufgestellt; auf Pflock Nummer 1 waren 100 flache Scheiben der Größe nach von unten nach oben aufgereiht.

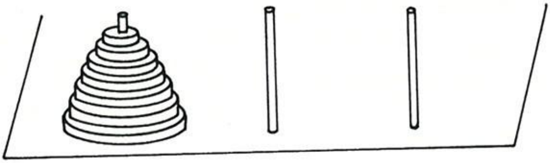


Abb.7.2

Der Mönch sollte nun diesen aus Scheiben bestehenden Turm unter Beachtung der folgenden Regeln auf Pflock 2 übertragen:
1. Die Scheiben dürfen nur auf einer der drei durch die Pflöcke gekennzeichneten Positionen zu liegen kommen.
2. Es darf immer nur eine Scheibe transportiert werden.
3. Es darf nie eine größere auf einer kleineren Scheibe liegen.

Die folgende schöne Schilderung der rekursiven Lösungsstrategie findet man bei Balzert, Informatik 1. Die dortige Darstellung ist auch zeichnerisch sehr informativ ausgestaltet.

Der Mönch überlegte: Die gesamte Aufgabe würde für ihn allein wohl zu umfangreich sein. Er beauftragte deshalb seinen ältesten Schüler, die obersten 99 Scheiben auf Pflock Nummer 3 zu transportieren. Dann würde er selber die ursprünglich ganz unten liegende hundertste Scheibe von Pflock 1 auf Pflock 2 legen und danach seinen Schüler bitten, die 99 Scheiben von Pflock 3 auf Pflock 2 zu übertragen.
Ist A_{100} bzw. A_{99} die Anzahl der für 100 bzw. 99 Scheiben notwendigen Züge, so ergibt sich aus obiger Prozedur

$$A_{100} = A_{99} + 1 + A_{99} = 2 \cdot A_{99} + 1.$$

Entsprechend gilt dann allgemein für k Scheiben:

$$A_{k+1} = 2 \cdot A_k + 1$$

Diese Gleichung ist vom Typ (7.4), und mit dem Anfangswert $A_1 = 1$

folgt nach (7.6) bzw. Aufgabe 7.12:

$$A_k = 2^{k-1}\cdot A_1 + \frac{2^{k-1}-1}{2-1}\cdot 1 = 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2\cdot 2^{k-1} - 1,$$

also

$$A_k = 2^k - 1.$$

Für die Umschichtung der 100 Scheiben sind also $2^{100} - 1 \cong 1{,}27\cdot 10^{30}$ Züge notwendig.

Aufgabe 7.13

Wir haben uns bisher keine Gedanken darüber gemacht, ob die Turmaufgabe unter den angegebenen Bedingungen überhaupt lösbar ist. Füllen Sie die Argumentationslücke.

§ 8 Die Tilgungsgleichung im Lichte graphischer Verfahren

Wie wir gesehen haben, führt die Beschreibung vieler dynamischer Prozesse auf die Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = A\cdot y_k + B. \qquad (8.$$

Bei fast allen Anwendungen ist man nicht nur an der punktuellen Auswertung mit Hilfe der geschlossenen Lösung (7.6), sondern auch an einem Überblick über den globalen Verlauf des Prozesses interessiert. Wir fassen hierfür wie bei der geometrischen Folge die Koordinatendarstellung ins Auge. Ebenso wie dort gibt es auch bei der Tilgungsgleichung wieder die Möglichkeiten der Darstellung im (k, y_k)- oder im (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystem. Wir wollen beides für die Gleichung

$$y_{k+1} = 0{,}6\cdot y_k + 4 \qquad (8.2$$

durchführen. Wie in der Mehrzahl der bisher betrachteten Anwendungsbeispiele wollen wir die Variable k als Zeitvariable deuten.

Im Falle des (k, y_k)-Koordinatensystems spricht man von einer Darstellung der Folge in Abhängigkeit von der Zeit (Abbildung 8.2). Dazu ist es zunächst notwendig, die Folgenglieder über eine Wertetafel zu ermitteln. Da wir eine lückenlose Berechnung der Folgenglieder benötigen, bietet sich zu diesem Zwecke die Verwendung der rekursiven Gleichung (8.2) an.

Aufgabe 8.1

Begründen Sie, warum man für die Aufstellung einer lückenlosen Wertetafel nicht die explizite Lösung aus Satz 7.1 benutzen sollte.

Wertetafel zur Folge aus (8.2) mit Anfangswert $y_0 = 0{,}5$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_k	0,5	4,3	6,58	7,95	8,77	9,26	9,56	9,73	9,84	9,90	9,94

Abb. 8.1

Schaubild im (k, y_k)-Koordinatensystem

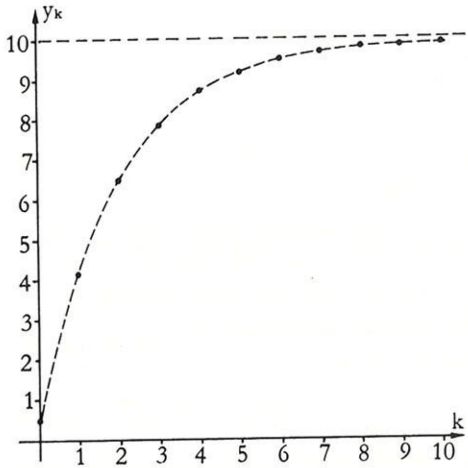


Abb. 8.2

Schaubild im (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystem

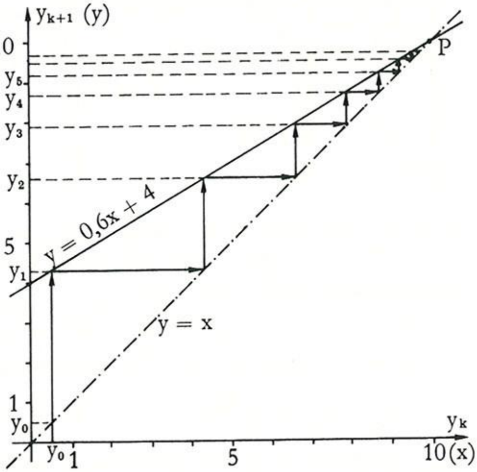


Abb. 8.3

Da y_{k+1} entsprechend (8.2) linear von y_k abhängt, ist die graphische Behandlung im (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystem analog zur geometrischen Folge leicht möglich (vgl. I, § 3). Insbesondere ermöglicht diese Darstellung die rein graphische Ermittlung der Folgenglieder, und die Wertetafel kann entfallen.

Wir entnehmen der Abbildung 8.3, daß die Folge (y_k) beim Anwachsen von k ein ganz charakteristisches Verhalten aufweist. Man spricht auch vom Grenzwertverhalten der Folge (y_k) für $k \longrightarrow \infty$ (sprich: "k gegen unendlich"). Der Graphik können wir unmittelbar entnehmen, daß sich die Punkte der Folge immer stärker dem dort eingezeichneten Punkt P nähern. Welche Koordinaten hat der Punkt P? Hierzu ist es günstig, wenn wir uns das (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystem vorübergehend (wie sonst üblich) als (x, y)- Koordinatensystem vorstellen. Dann ist P der Schnittpunkt der Geraden

$$y = A \cdot x + B$$

mit der ersten Winkelhalbierenden y = x. Aus

$$y = A \cdot y + B$$

folgt dann für $A \neq 1$: $\quad y = \frac{B}{1 - A}$

und wegen y = x: $\quad x = \frac{B}{1 - A}.$

Der Punkt P hat also die Koordinaten $P = (\frac{B}{1 - A}; \frac{B}{1 - A})$.

Wenn der Punkt P im Ursprung des Koordinatensystems wäre, dann läge eine Situation vor, wie wir sie von der Diskussion der geometrischen Folge her aus Aufgabe 3.8 bereits kennen. Da P im allgemeinen nicht im Ursprung des (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystems liegt, müssen wir eben den Ursprung nach P verlegen (Abbildung 8.4).

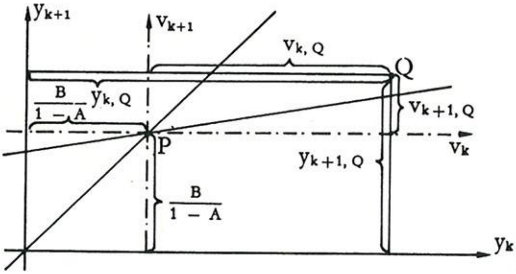


Abb. 8.4

Wir bezeichnen die neuen, durch P laufenden Koordinatenachsen mit v_k und v_{k+1}. Wie man aus Abbildung 8.4 entnehmen kann, sind die neuen Koordinatenwerte $(v_{k,Q};v_{k+1,Q})$ eines beliebigen Punktes Q, verglichen mit seinen ursprünglichen Koordinatenwerten $(y_{k,Q};y_{k+1,Q})$, jeweils um den Wert $\frac{B}{1-A}$ vermindert, d. h.:

$$v_k = y_k - \frac{B}{1-A} \qquad \text{und} \qquad v_{k+1} = y_{k+1} - \frac{B}{1-A} \tag{8.3}$$

Man beachte die Besonderheit dieser Koordinatentransformation: sie gilt gleichzeitig für alle k.

Um das Grenzverhalten der Folge (y_k) auf die neue Folge (v_k) zurückspielen zu können, benötigen wir noch die zu (v_k) gehörende rekursive Gleichung.

Aus der Transformationsgleichung (8.3) - an der Stelle k + 1 - folgt mit (8.1):

$$v_{k+1} = A\cdot y_k + B - \frac{B}{1-A} = \underbrace{A\cdot y_k \overbrace{- A\cdot\frac{B}{1-A}}}_{= A\cdot v_k} \overbrace{+ B - \frac{B}{1-A} + A\cdot\frac{B}{1-A}}^{= 0} =$$

$$= A\cdot v_k + \frac{B(1-A) - B + AB}{1-A} = A\cdot v_k$$

Wir erhalten also das Ergebnis

$$v_{k+1} = A\cdot v_k \tag{8.4}$$

und sehen, daß unser ursprünglich gestecktes Ziel, die Übersetzung des Tilgungsproblems in eine Fragestellung aus dem Bereiche der geometrischen Folgen, tatsächlich erreicht ist.

Das nächste anzusteuernde Teilziel liegt somit klar vor Augen: Wir müssen Kriterien dafür finden, wie das Wachstumsverhalten der Folge (v_k) mit

$$v_{k+1} = A\cdot v_k$$

vom Koeffizienten A abhängt. Anschauungsmaterial dazu kennen wir bereits aus I, § 3. Von dort wissen wir, daß das Wachstumsverhalten der Folge (8.4) wesentlich vom Betrag $|A|$ der reellen Zahl A abhängt.

Beim Rechnen mit Beträgen gilt die Gleichung

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b| \tag{8.5}$$

für alle reellen Zahlen a und b.

Aufgabe 8.2

Beweisen Sie (8.5).

Die beiden folgenden Rechengesetze für beliebige reelle Zahlen a und b werden klar, wenn man sich das Produkt $a \cdot b$ als Verlängerung bzw. Verkürzung der Strecke b um den Faktor a vorstellt. Dann gilt:

$$\text{Ist } a > 1 \text{, so ist } a \cdot b > b \text{, und} \qquad (8.6)$$
$$\text{ist } 0 < a < 1 \text{, so ist } a \cdot b < b.$$

Insgesamt folgt hieraus

Satz 8.1

Gegeben sei die rekursive Gleichung $v_{k+1} = A \cdot v_k$.

Ist $|A| > 1$, so wachsen die Folgenglieder dem Betrage nach:

$$|v_{k+1}| > |v_k| > |v_{k-1}| > \dots$$

b) Ist $|A| < 1$, so fallen die Folgenglieder dem Betrage nach:

$$|v_{k+1}| < |v_k| < |v_{k-1}| < \dots$$

Beweis: a) Für alle k ist: $|v_{k+1}| = |A \cdot v_k| = |A| \cdot |v_k| > |v_k|$.

b) Für alle k ist: $|v_{k+1}| = |A \cdot v_k| = |A| \cdot |v_k| < |v_k|$.

Dieser Sachverhalt führt zur

Definition 8.1

Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Die Folge (a_k) heißt *monoton wachsend*, wenn für alle k gilt: $a_{k+1} \geq a_k$. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn für alle k gilt: $a_{k+1} > a_k$.

Aufgabe 8.3

Definieren Sie die Begriffe *monoton fallend* und *streng monoton fallend*.

Aufgabe 8.4

Gegeben seien die Folgen (a_k) und (b_k) mit $a_k = 2^k$ und $b_k = (\frac{1}{3})^k$ für alle k. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine natürliche Zahl k_0, so daß $a_m > 1\,000\,000$ für alle $m \geq k_0$.

b) Zu jeder noch so großen vorgegebenen reellen Zahl r gibt es eine natürliche Zahl $k_1 = k_1(r)$, so daß $a_m > r$ für alle $m \geq k_1$.

c) Es gibt eine natürliche Zahl k_2, so daß $b_m < \frac{1}{1\,000\,000}$ für alle $m \geq k_2$.

d) Zu jeder noch so kleinen vorgegebenen reellen Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl $k_3 = k_3(\varepsilon)$, so daß $b_m < \varepsilon$ für alle $m \geq k_3$.

Die Glieder der Folge $(\frac{1}{3})^k$ sind alle positiv; sie werden immer kleiner und unterschreiten dabei jede vorgegebene noch so kleine reelle Zahl. Sie nähern sich also immer stärker der Zahl 0.

Definition 8.2

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft: Zu jeder noch so kleinen vorgegebenen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl k_0, so daß

$$|a_m| < \varepsilon$$

für alle $m > k_0$ ist.

Dann heißt die Folge (a_k) eine *Nullfolge*. Man sagt dann, die Folge (a_k) *konvergiert gegen Null* oder der *Grenzwert* der Folge (a_k) für $k \longrightarrow \infty$ ist Null.

In Zeichen: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ bzw. $a_k \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$; lim ist das Symbol für Limes (lat.: Grenze).

Man sagt, die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die reelle Zahl a wenn die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = a_k - a$ gegen Null konvergiert

In Zeichen: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$.

Die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es eine (reelle) Zahl gibt, gegen die sie konvergiert; andernfalls heißt die Folge *divergent*.

In dieser Sprechweise können wir den in Aufgabe 8.4 exemplarisch behandelten Sachverhalt prägnant formulieren:

Satz 8.2

Jede durch $v_{k+1} = A \cdot v_k$ gegebene rekursive Folge konvergiert für $v_0 \neq 0$ genau dann gegen Null, wenn $|A| < 1$ ist.

Beweis: Es sei ε eine feste positive reelle Zahl. ε darf dabei beliebig klein sein, etwa $\varepsilon = \dfrac{1}{10^{10}}$.

Wir haben zu zeigen, daß ab einer Stelle k_0 gilt:

$$|v_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m > k_0. \tag{8.7}$$

Für alle $s \in \mathbb{N}$ ist $|v_s| = |A^s| \cdot |v_0| = |A|^s \cdot |v_0|$. Zur Erfüllung der Bedingung (8.7) ist somit notwendig:

$$|A|^m < \frac{\varepsilon}{|v_0|}$$

Letzteres ist wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion gleichwertig zu: $\ln |A|^m < \ln\left(\frac{\varepsilon}{|v_0|}\right)$, d. h., $m \cdot \ln |A| < \ln\left(\frac{\varepsilon}{|v_0|}\right)$.

Wählt man $k_0 \geq \dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{|v_0|}\right)}{\ln |A|}$, so ist die Bedingung (8.7) erfüllt für alle $m > k_0$.

Von den Beispielen in Aufgabe 3.8 her wissen wir, daß eine Folge monoton fallend, monoton steigend sein, aber auch stets das Vorzeichen wechselnd gegen Null konvergieren kann. (Das sind natürlich längst nicht alle Möglichkeiten der Konvergenz von Folgen.)

Definition 8.3

Eine Folge reeller Zahlen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, bei der die ersten Differenzen stets das Vorzeichen wechseln, heißt *oszillierend* (Oszillation = Schwingung).

Beispiel: Die Folge $(-\frac{1}{2})^k$ konvergiert oszillierend gegen Null. Der folgende Satz ist unmittelbar einsichtig:

Satz 8.3

Jede durch $v_{k+1} = A \cdot v_k$ gegebene rekursive Folge mit von Null verschiedenem Anfangswert oszilliert genau dann, wenn $A < 0$ ist.

Die Kombination von Satz 8.1, 8.2 und 8.3 liefert uns nun einen detaillierten Überblick über das Wachstumsverhalten der Folge (v_k) mit $v_{k+1} = A \cdot v_k$. In dieses Verhalten geht allerdings noch der Anfangswert der Folge ein, den wir der Einfachheit halber durchweg mit v_0 bezeichnen werden.

Satz 8.4

Die durch $v_{k+1} = A \cdot v_k$ mit Anfangswert v_0 gegebene Folge weist das folgende Wachstums- und Grenzverhalten auf:

	$v_0 > 0$	$v_0 < 0$	$v_0 = 0$
$A > 1$	streng monoton wachsend (gegen $+\infty$)	streng monoton fallend (gegen $-\infty$)	konstant gleich Null
$A = 1$	konstant $= v_0$		- " -
$0 < A < 1$	streng monoton fallend, gegen Null konvergierend	streng monoton wachsend, gegen Null konvergierend	- " -
$A = 0$	ab v_1 konstant gleich Null		- " -
$-1 < A < 0$	gedämpft oszillierend gegen Null konvergierend		- " -
$A = -1$	abwechselnd zwischen v_0 und $-v_0$ oszillierend		- " -
$A < -1$	mit (gegen ∞) wachsender Amplitude oszillierend		- " -

Abb. 8.5

Die Rückübersetzung der Sprechweise der geometrischen Folgen in die Tilgungsgleichung erfolgt mit Hilfe der Bedingung

$$y_k = v_k + \frac{B}{1-A}.$$

1. Fallstudie zur Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

im (k, y_k)-Koordinatensystem

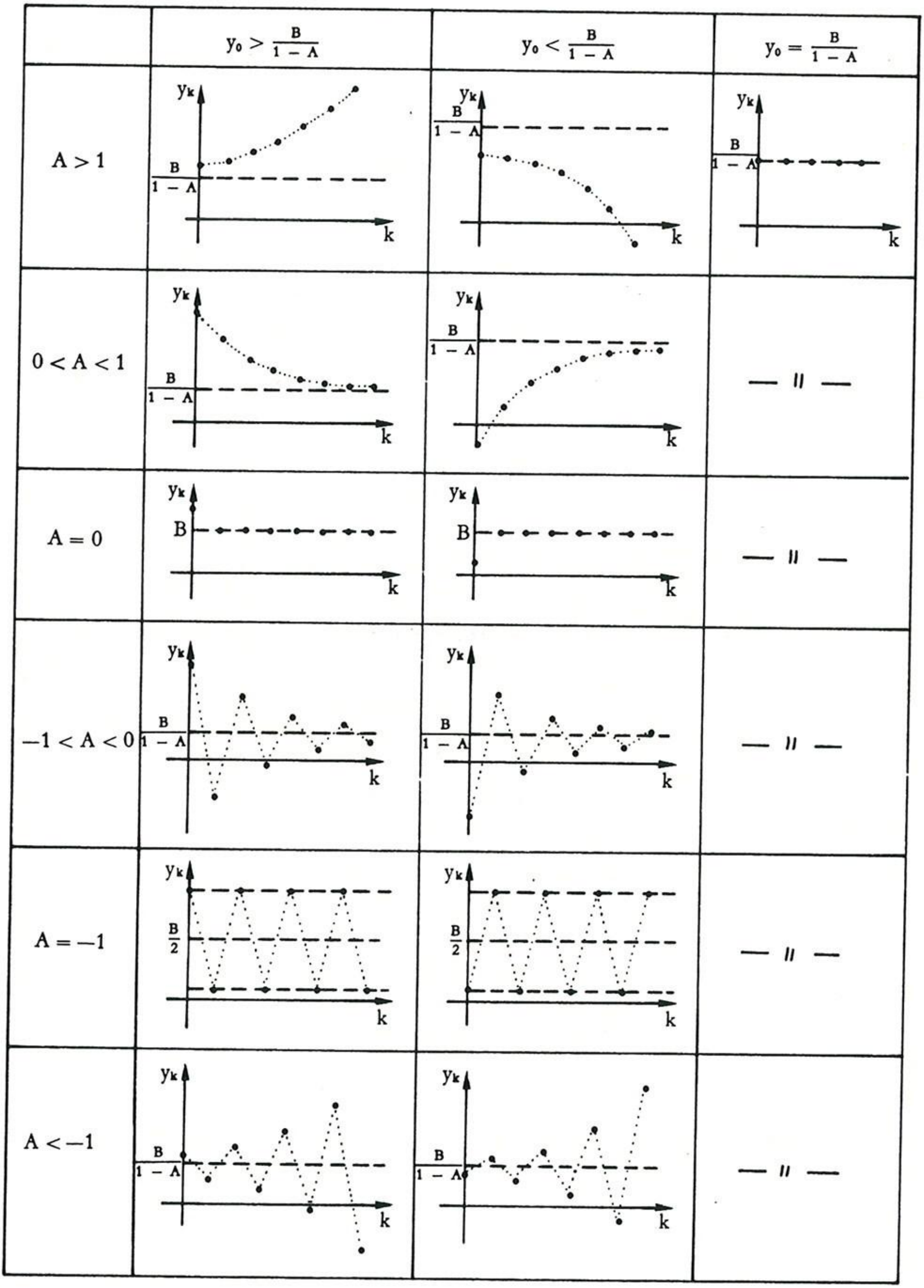


Abb. 8.6

2. Fallstudie zur Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

im (y_k, y_{k+1})-Koordinatensystem

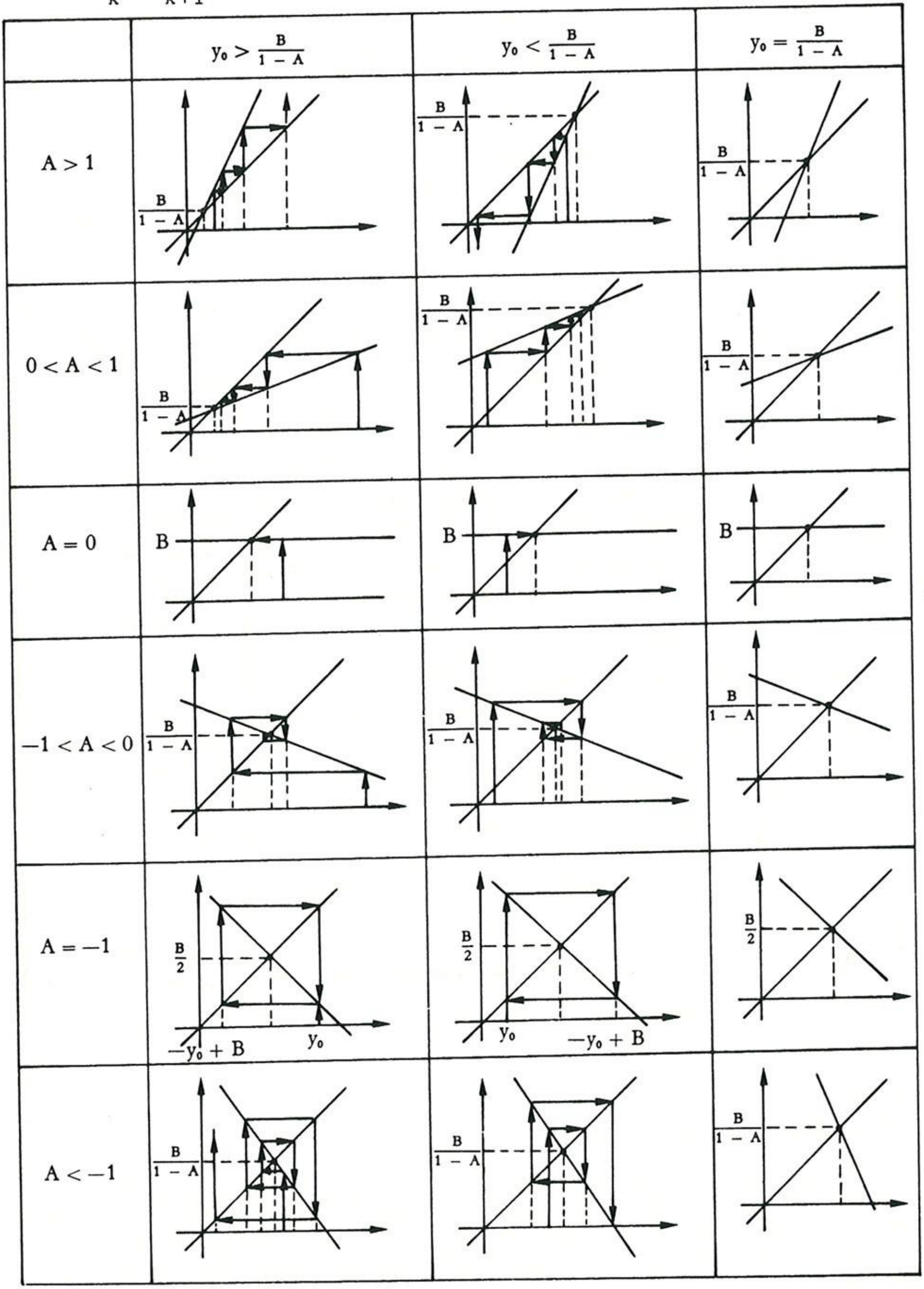


Abb. 8.7

Aufgabe 8.5

Zeigen Sie:

a) $v_0 = 0$ genau dann, wenn $y_0 = \frac{B}{1-A}$.

b) $v_0 > 0$ genau dann, wenn $y_0 > \frac{B}{1-A}$.

c) $v_0 < 0$ genau dann, wenn $y_0 < \frac{B}{1-A}$.

d) $v_k = v_0$ genau dann, wenn $y_k = y_0$.

e) $v_k = -v_0$ genau dann, wenn $y_k = -y_0 + 2\cdot\frac{B}{1-A}$.

Bemerkung zu e): Ist speziell $A = -1$, so folgt $v_k = -v_0$, genau dann, wenn $y_k = -y_0 + B$.

Satz 8.5

Die Tilgungsgleichung $y_{k+1} = A\cdot y_k + B$ mit Anfangwert y_0 weist für $A \neq 1$ das folgende Wachstums- und Grenzverhalten auf:

	$y_0 > \frac{B}{1-A}$	$y_0 < \frac{B}{1-A}$	$y_0 = \frac{B}{1-A}$
$A > 1$	streng monoton wachsend (gegen $+\infty$)	streng monoton fallend (gegen $-\infty$)	konstant gleich $\frac{B}{1-A}$
$0 < A < 1$	streng monoton fallend, gegen $\frac{B}{1-A}$ konvergierend	streng monoton wachsend, gegen $\frac{B}{1-A}$ konvergierend	- " -
$A = 0$	ab y_1 konstant gleich B		
$-1 < A < 0$	gedämpft oszillierend gegen $\frac{B}{1-A}$ konvergierend		konstant gleich $\frac{B}{1-A}$
$A = -1$	abwechselnd zwischen y_0 und $-y_0 + B$ oszillierend (beachte Aufgabe 8.5 d) und e) für $A = -1$)		- " -
$A < -1$	mit (gegen ∞) wachsender Amplitude oszillierend		- " -

Abb. 8.8

Aufgabe 8.6

Diskutieren Sie den Fall $A = 1$.

Die Aussage von Satz 8.5 wird durch die beiden die qualitativen Verhältnisse wiedergebenden Darstellungen in Abbildung 8.6 und 8.7 veranschaulicht. Der besseren Übersicht wegen sind dabei die Werte von B in Abhängigkeit von A so gewählt, daß $\frac{B}{1-A}$ stets positiv wird.

§ 9 Angebot-Nachfrage-Zyklen

Volkswirtschaftliche Erhebungen und Messungen werden häufig in festen periodischen Zeitabständen vorgenommen. Die so gewonnenen Daten sind also von vornherein in einer zeitlich aufeinanderfolgenden Weise aneinandergereiht, d. h., sie bilden eine Folge. Volkswirtschaftliche Modelle sind in natürlicher Weise dieser Folgenbildung angepaßt; es überrascht daher nicht, daß viele dieser Modelle rekursiver Natur sind. Eine weitere Grundidee der Modellbildung ist neben der Rekursivität die *Linearität*, denn lineare Modelle sind rechentechnisch am besten zu bewältigen. Ein typisches Beispiel dafür ist das folgende, in ähnlicher Form bereits 1930 von A. Hanau diskutierte Modell eines Angebot-Nachfrage-Zyklus. Um konkrete Vorstellungen entwickeln zu können, nehmen wir an, daß es sich um die Beschreibung von Preisen für Schlachtschweine handelt ("Schweinezyklus").

Die Modellvariablen sind:

- t : Zeitvariable (in Aufzuchts-Zyklen: ca. 14 Monate)
- P_t : Preis zum Zeitpunkt t
- N_t : Nachfragemenge zum Zeitpunkt t
- A_t : Angebotsmenge zum Zeitpunkt t

Im Modell gibt es Anbieter und Käufer. Die Höhe des jeweiligen Angebots und die Nachfrage werden in der folgenden Weise sehr stark durch den Preis bestimmt: Nachfrage und Preis zum Zeitpunkt t reagieren ohne Verzögerung ("vollkommen elastisch") aufeinander; sie bedingen sich gegenseitig in linearer Abhängigkeit voneinander:

$$N_t = \alpha + a \cdot P_t \tag{9.1}$$

Es ist sinnvoll, anzunehmen, daß der Koeffizient $a < 0$ ist, denn ein höherer Preis zum Zeitpunkt t wird im allgemeinen eine geringere Nachfrage zur Folge haben, und umgekehrt.

Auch das Angebot hängt linear vom Preis ab. Wegen der notwendigen Aufzuchtzeit können die Anbieter ihr Angebot nicht auf den augenblicklichen Preis abstimmen ("vollkommen unelastische" Reaktion). Sie orientieren sich daher am Preis der Vorperiode:

$$A_t = \beta + b \cdot P_{t-1} \tag{9.2}$$

Da hohe Preise im allgemeinen die Hoffnung auf gute Geschäfte im folgenden Jahr bestärken und umgekehrt, ist hier die Annahme $b > 0$ sinnvoll.

Die Nachfragemenge wird von der angebotenen Menge derselben Periode t über den "Transmissionsriemen" Preis beeinflußt. Falls etwa das Angebot A_t sehr stark über der augenblicklichen Nachfrage N_t liegt, müssen die Anbieter Preiszugeständnisse machen, um die Nachfrage anzuheben. Liegt andererseits das Angebot sehr stark unter der Nachfrage, so wird dem Anbieter die Ware auch noch zu einem höheren Preis, allerdings dann in geringerer Menge abgenommen. Man vergleiche diesen Angebot-Nachfrage-Mechanismus etwa auch mit der Entwicklung auf dem Rohölmarkt. Der Marktpreis P_t pendelt sich also so ein, daß sich zwischen Angebotsmenge und Nachfragemenge ein Gleichgewicht einstellt:

$$A_t = N_t \tag{9.3}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung (9.3) folgt mit (9.1 und (9.2) für den Preis:

$$\beta + b \cdot P_{t-1} = \alpha + a \cdot P_t$$

Also ist

$$P_t = \frac{b}{a} \cdot P_{t-1} + \frac{\beta - \alpha}{a} \tag{9.4}$$

Weiter ist mit (9.1):

$$P_t = \frac{N_t - \alpha}{a}$$

In (9.4) eingesetzt, ergibt das für die Nachfrage:

$$\frac{N_t - \alpha}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{N_{t-1} - \alpha}{a} + \frac{\beta - \alpha}{a}$$

Also ist:

$$N_t = \frac{b}{a} \cdot N_{t-1} + (\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha) \tag{9.5}$$

Ebenso folgt aus (9.2):

$$P_t = \frac{A_{t+1} - \beta}{b}$$

und durch Einsetzen in (9.4) wie im Falle von N_t:

$$A_{t+1} = \frac{b}{a} \cdot A_t + (\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha) \tag{9.6}$$

Wegen der Gleichgewichtsbedingung (9.3) ist es nicht verwunderlich, daß Angebot und Nachfrage derselben Rekursionsgleichung genügen.

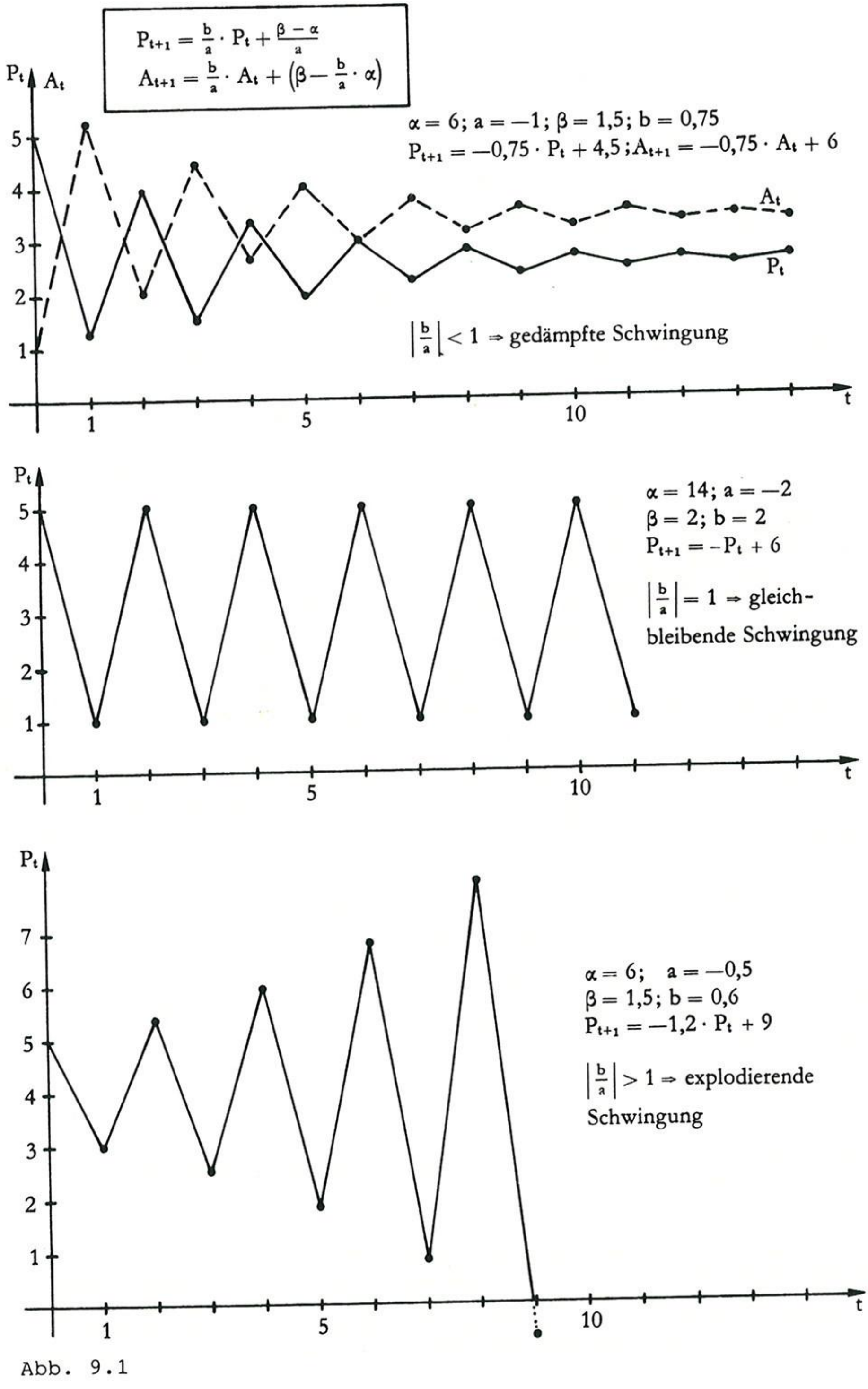
Die zunächst gekoppelten Modellbedingungen haben es uns also erlaubt, autonome Rekursionsgleichungen für Preis, Nachfrage und Angebot zu entwickeln, die darüber hinaus alle vom Typ der Tilgungsgleichung sind. Denn $\frac{b}{a}$, $\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha$ und $\frac{\beta - \alpha}{a}$ sind konstante Koeffizienten. Da $a < 0$ und $b > 0$ angenommen werden konnte, ist insbesondere $\frac{b}{a} \neq 1$, und Satz 7.1 liefert in Abhängigkeit von den Anfangswerten P_0, A_0 und N_0 die expliziten Lösungen:

$$P_t = (\frac{b}{a})^t \cdot P_0 + \frac{1 - (\frac{b}{a})^t}{1 - \frac{b}{a}} \cdot \frac{\beta - \alpha}{a}$$

$$N_t = (\frac{b}{a})^t \cdot N_0 + \frac{1 - (\frac{b}{a})^t}{1 - \frac{b}{a}} \cdot (\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha)$$

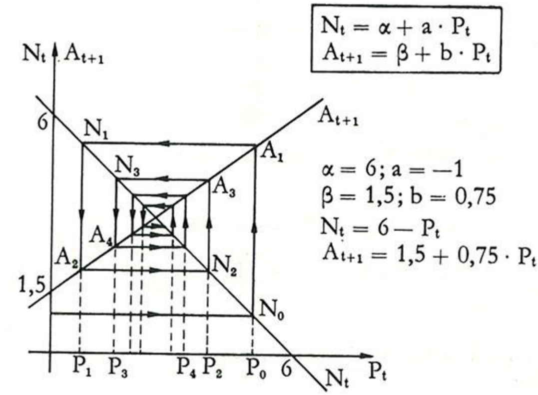
$$A_t = (\frac{b}{a})^t \cdot A_0 + \frac{1 - (\frac{b}{a})^t}{1 - \frac{b}{a}} \cdot (\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha)$$

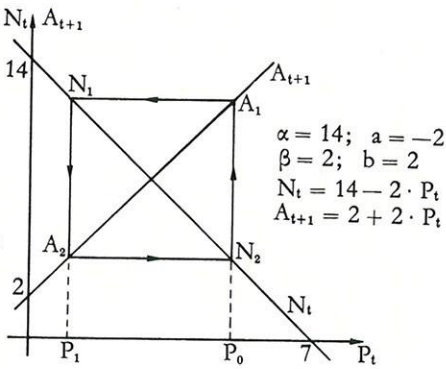
Auch für dieses Modell sollte die globale Betrachtung des Prozesses insbesondere unter Berücksichtigung graphischer Verfahren nicht vernachlässigt werden. Hierzu ist es wieder günstiger, auf die rekursive Beschreibung des Modells zurückzugreifen.



$P_{t+1} = \frac{b}{a} \cdot P_t + \frac{\beta - \alpha}{a}$
$A_{t+1} = \frac{b}{a} \cdot A_t + \left(\beta - \frac{b}{a} \cdot \alpha\right)$
P_t A_t
$\alpha = 6$; $a = -1$; $\beta = 1{,}5$; $b = 0{,}75$
$P_{t+1} = -0{,}75 \cdot P_t + 4{,}5$; $A_{t+1} = -0{,}75 \cdot A_t + 6$
A_t
P_t
$\left|\frac{b}{a}\right| < 1 \Rightarrow$ gedämpfte Schwingung
1 2 3 4 5
1 5 10
t
P_t
1 2 3 4 5
$\alpha = 14$; $a = -2$
$\beta = 2$; $b = 2$
$P_{t+1} = -P_t + 6$
$\left|\frac{b}{a}\right| = 1 \Rightarrow$ gleich-
bleibende Schwingung
1 5 10
t
P_t
1 2 3 4 5 6 7
$\alpha = 6$; $a = -0{,}5$
$\beta = 1{,}5$; $b = 0{,}6$
$P_{t+1} = -1{,}2 \cdot P_t + 9$
$\left|\frac{b}{a}\right| > 1 \Rightarrow$ explodierende
Schwingung
1 5 10
t

Abb. 9.1





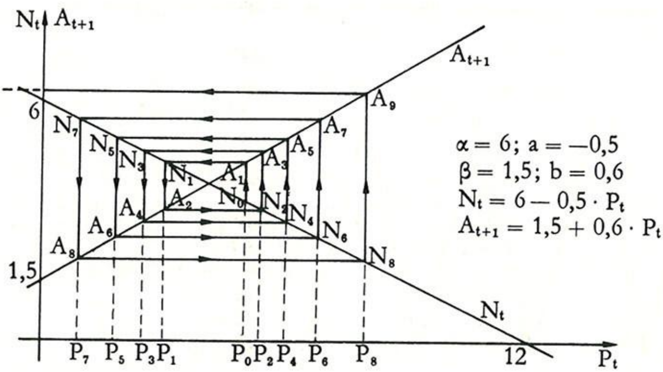


Abb. 9.2

Wir stellen das Verhalten des Modells in den Abbildungen 9.1 und 9.2 für verschiedene Parameter dar. Die Dynamik des Modellverhaltens und insbesondere auch das antizyklische Verhalten von Preis und Angebot gehen aus der graphischen Darstellung deutlich hervor.

In Abbildung 9.1 ist zunächst die Darstellungsform im (t, P_t)- bzw. (t, A_t)-Koordinatensystem gewählt.

Auch die Darstellung von Angebot und Nachfrage in Abhängigkeit vom Preis ist sehr illustrativ. Sie führt zu den als *"Spinnwebendiagramme"* (englisch: *cobweb diagram*) bezeichneten Darstellungen in Abbildung 9.2.

§ 10 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen erster Ordnung

Herr Häberle aus Freiburg hat zum Zwecke der Geldanlage ein Zuwachs-Sparbuch über 2 000,- DM angelegt. Das Sparbuch läuft über 10 Jahre. Im ersten Jahr erhält er 4,5 % Zinsen. In jedem der darauffolgenden Jahre steigt der Zinssatz um 0,5 % bis zum Endwert von 9 %. Um seinen neuen Taschenrechner gleich einmal richtig einsetzen zu können, stellt er zur Überprüfung der von der Bank gelieferten Unterlagen einen Plan für das Anwachsen des Sparguthabens auf:

k	Guthaben nach Ablauf des k-ten Jahres in DM
1	2090,-
2	2194,50
3	2315,20
4	2454,11
5	2613,63
6	2796,58
7	3006,32
8	3246,83
9	3522,81
10	3839,86

Abb.10.1

Als ihn sein Geschäftspartner, Herr Haeberlin aus Colmar, besucht, kommt er auf das Zuwachs-Sparbuch zu sprechen. Herr Haeberlin interessiert sich sehr dafür, denn er hat gerade etwa 10 000 französische Franc flüssig, die er längerfristig anlegen möchte. Um verschiedene Anlageangebote vergleichen zu können, würde er gerne wissen, auf welchen Wert die 10 000,- Franc anwachsen würden, wenn er für diesen Betrag ein Zuwachs-Sparbuch zu den von Herrn Häberle genannten Konditionen anlegen würde. Da er wenig Zeit hat und nicht die ganze Rechnung von Herrn Häberle nachvollziehen möchte, fragt er sich, ob er die Beträge in Abbildung 10.1 und insbesondere den Endbetrag nicht einfach mit 5 multiplizieren kann. Muß er möglicherweise vorher die Francs in DM umrechnen? Bei einem Kurs von 42,25 DM für 100 Franc ergäbe das 4 225,- DM, also das 2,1125fache des Betrages von Herrn Häberle (2 000,- DM). Erhält man den entsprechenden Ansparvorgang für 4 225,- DM, wenn man einfach alle Werte aus Abbildung 10.1 mit 2,1125 multipliziert?

Das Anwachsen der Einzahlung von Herrn Häberle verläuft nach dem folgenden Prinzip:

$$2000 \xrightarrow{\cdot 1{,}045} 2090 \xrightarrow{\cdot 1{,}05} 2194{,}50 \xrightarrow{\cdot 1{,}055} 2315{,}20 \quad \ldots$$

Abb. 10.2

Ist etwa $K = K_0$ das Anfangskapital und K_t das Kapital nach Ablauf des t-ten Jahres, so gilt für das darauffolgende Jahr:

$$K_{t+1} = (1{,}04 + (t+1)\cdot 0{,}005)\cdot K_t \tag{10.1}$$

Mit (10.1) liegt eine homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten vor.

Die allgemeine Form einer solchen Gleichung lautet nach Definition 6.2:

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0, \tag{10.2}$$

wobei $f_1(k)$ und $f_0(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ von Null verschieden sind. Man erhält (10.1) aus (10.2), indem man t durch k, K_t durch y_k, 1 durch $f_1(k)$ und $(1,04 + (t+1)\cdot 0,005)$ durch $f_0(k)$ ersetzt.

Im Kontext der Differenzengleichungen lautet nun das Problem von Herrn Haeberlin so: Es sei (K_t) eine Lösungsfolge für die Gleichung (10.1). Sind dann auch $(\overline{K}_t)$ mit $\overline{K}_t = 5\cdot K_t$ oder $(\hat{K}_t)$ mit $\hat{K}_t = 2,1125\cdot K_t$ Lösungsfolgen für (10.1)?

Die allgemeine Antwort auf diese Frage liefert

Satz 10.1

Gegeben sei die lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0.$$

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösungsfolge dieser Gleichung, so ist es auch die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = r\cdot a_k$ (für jede reelle Zahl r)

Beweis: Nach Voraussetzung ist für alle k:

$$f_1(k)\cdot a_{k+1} + f_0(k)\cdot a_k = 0$$

Multiplikation der Gleichung mit r ergibt:

$$f_1(k)\cdot r\cdot a_{k+1} + f_0(k)\cdot r\cdot a_k = 0\cdot r = 0$$

Also ist $f_1(k)\cdot b_{k+1} + f_0(k)\cdot b_k = 0$, und (b_k) ist eine Lösungsfolge, wie man natürlich auch durch direktes Einsetzen zeigen kann.

Definition 10.1

Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = r\cdot a_k$ schreibt man auch als $(r\cdot a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Der Übergang von der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zur Folge $(r\cdot a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wird auch als *Multiplikation der Folge* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit der reellen Zahl* r bezeichnet. Man schreibt auch:

$$r\cdot(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (r\cdot a_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Multiplikation einer Folge (a_k) mit einer reellen Zahl r heißt also: Multiplikation aller Glieder a_k der Folge (a_k) mit der Zahl r.

Bemerkungen

1. Man beachte, daß die implizit in der Voraussetzung steckenden Bedingungen $f_1(k) \neq 0$ und $f_0(k) \neq 0$ (für alle k) an keiner Stelle in den Beweis des vorigen Satzes eingegangen sind.
2. Die Antwort auf Herrn Haeberlins Problem fällt also positiv aus. Er kann die Werte von Herrn Häberle mit 5 multiplizieren und erhält so den Ansparvorgang in Franc, beginnend mit 10 000 Franc; oder er kann auch die Werte mit 2,1125 multiplizieren und erhält die Sparbeträge in DM, beginnend mit dem DM-Äquivalent von 10 000,- Franc.

Herr Haeberlin entschließt sich, die 10 000,- Franc in der Form des Zuwachssparens anzulegen. Da er seine finanzielle Zukunft nicht voll überschauen kann, muß er jedoch dem Fall Rechnung tragen, daß er notfalls gezwungen sein kann, das Sparbuch ganz oder teilweise an die Bank zurückzugeben. Eine Teilrückgabe wäre sicher einfacher, wenn er den Betrag nicht in einem 10 000-Franc-Sparbuch anlegen, sondern auf zwei Sparbücher aufteilen würde. Der besseren Disponibilität wegen würde er gerne ein 4000-Franc- und ein 6000-Franc-Sparbuch anlegen. Aber entspricht das zusammengefaßte Wachstum dieser beiden Sparbücher auch dem des 10 000-Franc-Sparbuches?

Wir wollen die jeweiligen Beträge auf dem 4000- (bzw. 6000- und 10 000-)Franc-Sparbuch mit a_t, b_t und c_t bezeichnen $(t = 1, 2, 3, \ldots)$. Damit ist $a_0 = 4000$, $b_0 = 6000$ und $c_0 = 10\,000$, und jede der Folgen (a_t), (b_t) und (c_t) ist nach Voraussetzung eine Lösung der Gleichung (10.1). Herrn Haeberlins Problem läuft somit auf die Frage hinaus, ob die Summenfolge (s_t) mit $s_t = a_t + b_t$ erstens überhaupt eine Lösung von (10.1) ist und ob sie im Falle der Bejahung mit der Folge (c_t) übereinstimmt.

Auch die Beantwortung dieser Frage ist im allgemeinen Kontext der Gleichung (10.2) nicht schwieriger als im Spezialfall (10.1).

Satz 10.2

> Gegeben sei die lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung
>
> $$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0.$$
>
> Sind $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Lösungsfolgen dieser Gleichung, so ist es auch die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_k = a_k + b_k$ (für alle k).

Beweis: Nach Voraussetzung ist für alle k:

$$f_1(k)\cdot a_{k+1} + f_0(k)\cdot a_k = 0, \quad \text{und}$$

$$f_1(k)\cdot b_{k+1} + f_0(k)\cdot b_k = 0.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$f_1(k)\cdot(a_{k+1} + b_{k+1}) + f_0(k)\cdot(a_k + b_k) = 0,$$

also

$$f_1(k)\cdot s_{k+1} + f_0(k)\cdot s_k = 0,$$

und (s_k) ist eine Lösungsfolge.

Definition 10.2

> Die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_k = a_k + b_k$ schreibt man auch als $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
> Der Übergang von den Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zur Folge $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wird als *Addition der Folgen* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.
>
> Man schreibt auch:
>
> $$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} + (b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$
>
> Addition zweier Folgen bedeutet also Addition der einzelnen Folgenglieder, genauer derjenigen Folgenglieder, die zum gleichen Index k gehören.

Bemerkungen

1. Auch im Beweis von Satz 10.2 spielten die Voraussetzungen

$f_1(k) \neq 0$ und $f_0(k) \neq 0$ (für alle k) keine Rolle.

2. Bezogen auf die Situation von Herrn Haeberlin, ergibt sich aus Satz 10.2 wegen $a_0 + b_0 = c_0$, daß die Aufspaltung des 10 000-Franc-Sparbuches in ein 4000-Franc- und 6000-Franc-Sparbuch den Wachstumsprozeß nicht beeinflußt.

Die Lösungen von Differenzengleichungen, insbesondere also die Lösungen der Gleichung (10.2), sind Folgen (vgl. § 6). Wir wollen uns die Gesamtheit aller Lösungen von (10.2), die man erhält, wenn man den Anfangswert nicht vorgibt, etwas genauer ansehen. Die Koeffizientenfunktionen $f_1(k)$ und $f_0(k)$ seien zwar beliebig, aber fest gewählt. Fassen wir alle Lösungsfolgen von (10.2) zur Lösungsmenge $\mathcal{L}$ zusammen (die Elemente von $\mathcal{L}$ sind also Folgen), so können wir den Inhalt von Satz 10.1 und 10.2 prägnant formulieren.

Satz 10.3

Ist $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen der Gleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0,$$

so gilt:

a) Multipliziert man ein beliebiges Element aus $\mathcal{L}$ mit einer beliebigen reellen Zahl, so ist das Produkt ebenfalls ein Element von $\mathcal{L}$.

b) Addiert man zwei Elemente aus $\mathcal{L}$, so ist ihre Summe ebenfalls ein Element von $\mathcal{L}$.

Der Sachverhalt von Satz 10.3 wird noch kürzer durch die folgende Formulierung zum Ausdruck gebracht:

Die Menge $\mathcal{L}$ ist *abgeschlossen* in bezug auf die Multiplikation von Folgen mit reellen Zahlen und in bezug auf die Addition von Folgen. Diese Abgeschlossenheit ist eine *strukturelle* Eigenschaft der Menge $\mathcal{L}$ Mengen, denen ähnliche Strukturen wie $\mathcal{L}$ aufgeprägt sind, spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Man nennt sie "Vektorräume"; genauer:

Definition 10.3

Es sei V eine beliebige Menge mit den folgenden Eigenschaften:

a) Für je zwei Elemente x und y von V ist ihre Summe x + y definiert, und x + y ist ebenfalls ein Element von V (*Abgeschlossenheit* von V bezüglich der Addition). Diese Addition von Elementen von V unterliegt den Bedingungen:

a_1) Für alle Elemente x, y und z von V gilt:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

(*Assoziativität* der Addition)

a_2) Es gibt ein Element n von V, so daß für alle x von V gilt:

$$n + x = x + n = x$$

Dieses n heißt *neutrales Element* von V.

a_3) Zu jedem Element x von V gibt es ein Element y von V mit der Eigenschaft:

$$x + y = y + x = n$$

Die Elemente x und y heißen dann zueinander *invers*.

a_4) Für alle Elemente x und y von V gilt:

$$x + y = y + x \qquad (\textit{Kommutativität}\text{ der Addition})$$

b) Für jedes Element x von V und für jede reelle Zahl r ist ihr Produkt $r\cdot x$ definiert, und $r\cdot x$ ist ebenfalls ein Element von V (*Abgeschlossenheit* von V bezüglich der Multiplikation mit reellen Zahlen).

Diese Multiplikation unterliegt den Bedingungen:

b_1) Für alle reellen Zahlen r und s und alle Elemente x von V gilt:

$$(r\,s)\cdot x = r\cdot(s\cdot x)$$

b_2) Für die reelle Zahl 1 gilt:

$$1\cdot x = x$$

b_3) Für jede reelle Zahl r und für je zwei Elemente x und y von V gilt:

$$r\cdot(x+y) = r\cdot x + r\cdot y$$

b_4) Für alle reellen Zahlen r und s und alle Elemente x von V gilt:

$$(r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot x$$

Die Bedingungen b_3) und b_4) stellen Verträglichkeitsbedingungen zwischen Multiplikation und Addition dar.

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so nennt man das Tripel $(V, +, \cdot)$ einen *Vektorraum* über der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder kürzer einen *reellen Vektorraum*. Die Elemente von V heißen *Vektoren*, die von $\mathbb{R}$ nennt man in diesem Zusammenhang *Skalare*, und die in b) geforderte Multiplikation bezeichnet man als *Skalarmultiplikation* von V.

Kommentare zur Definition 10.3

1. Die Eigenschaften a) und a_1) bis a_3) besagen, daß V in bezug auf die Addition eine *Gruppe* ist. Mit a_4) ist V sogar eine *kommutative* oder auch *abelsche Gruppe*, so benannt zu Ehren des genialen, im Alter von 27 Jahren verstorbenen norwegischen Mathematikers Niels Henrik Abel (1802 - 1829), von dem unter anderem der berühmte Satz stammt, daß Polynomgleichungen vom Grade 5 oder höher im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke - "Radikale" - lösbar sind.
2. Es gibt genau ein neutrales Element n in V, und dieses wird im folgenden mit 0 (*Nullvektor*) bezeichnet.
3. Zu festem x gibt es genau ein Inverses y, und dieses wird im folgenden mit $-x$ bezeichnet.
4. In reellen Vektorräumen gibt es zwei Typen von Multiplikationen:

   Typ I : Multiplikation "Skalar mal Skalar"

   Typ II: Multiplikation "Skalar mal Vektor"

   Wir haben in Definition 10.3 die erste durch Weglassen des Malpunktes und die zweite durch Setzen des Malpunktes gekennzeichnet. Da praktisch keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir die beiden Multiplikationen im folgenden nicht durch die Schreibweise unterscheiden.
5. Auch die beiden Additionen

   Typ I : "Skalar plus Skalar"

   Typ II: "Vektor plus Vektor"

werden wir wegen geringer Verwechslungsgefahr nicht unterschiedlich schreiben. Das Symbol "0" (Null) kann sowohl die reelle Zahl als auch den Vektor bedeuten.

6. Schließlich (praktisch selbstverständlich): In b_3) gilt die "Punkt-vor-Strich"-Regel auch für die Skalarmultiplikation gegenüber der Addition von Vektoren.

Beispiel: Die Menge $\mathcal{F}$ aller reellen Folgen bildet mit der in Definition 10.1 beschriebenen Skalarmultiplikation und mit der Addition aus Definition 10.2 einen reellen Vektorraum. Ihr Nullvektor ist die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 0$ für alle k. Wir schreiben kurz $(0)_{k\in\mathbb{N}}$ oder sogar nur (0) für $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 10.1

Beweisen Sie die im Beispiel gemachte Aussage. Zeigen Sie insbesondere: Das zur Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ inverse Element von $\mathcal{F}$ ist die Folge $(-a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Wir können die Vorbereitungen aus Satz 10.1 bis 10.3 unter Verwendung dieser strukturellen Sprechweise nun wie folgt formulieren:

Satz 10.4

Die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungen der Gleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0 \tag{10.3}$$

bildet einen reellen Vektorraum.

Beweis: Das meiste haben wir schon gezeigt. Eine wichtige Bemerkung ist, daß $\mathcal{L}$ eine Teilmenge des Vektorraumes $\mathcal{F}$ aller reellen Folgen ist. Viele der Bedingungen aus Definition 10.3 gelten deshalb automatisch in $\mathcal{L}$, da sie nach Aufgabe 10.1 ja sogar in der Menge $\mathcal{F}$ allgemeingültig sind; so zum Beispiel a), a_1), a_4), b), b_1), b_2), b_3) und b_4).

Nachweis von a_2): Es ist nur natürlich, den Nullvektor von $\mathcal{F}$ als Kandidaten für den Nullvektor von $\mathcal{L}$, dessen Existenz ja noch nachzuweisen ist, zu nominieren. Da tatsächlich $(y_k) = (0)$ eine Lösung von (10.3) ist, enthält $\mathcal{L}$ also den Nullvektor, und a_2) ist erfüllt.

Nachweis von a_3): Es sei (a_k) ein Element von $\mathcal{L}$, also

$$f_1(k)\cdot a_{k+1} + f_0(k)\cdot a_k = 0.$$

Dann ist auch

$$f_1(k)\cdot(-a_{k+1}) + f_0(k)\cdot(-a_k) = 0.$$

Das heißt: Die Folge $(-a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls ein Element von $\mathcal{L}$. Nach Aufgabe 10.1 ist $(-a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ invers zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d. h.

$$(a_k) + (-a_k) = (0).$$

Da wir letztere Gleichung auch als Gleichung in $\mathcal{L}$ ansehen können (alle diese Folgen liegen ja in $\mathcal{L}$), enthält $\mathcal{L}$ mit jeder Folge auch deren Inverses, und a_3) ist bewiesen. $\mathcal{L}$ ist also ein Vektorraum.

Bemerkung: Auch in diesem Beweis spielten die Bedingungen $f_1(k) \neq 0$ und $f_0(k) \neq 0$ (für alle k) noch keine Rolle.

Definition 10.4

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Ist U eine Teilmenge von V, die mit der Addition und der Skalarmultiplikation von V selbst einen Vektorraum bildet, so heißt U ein *Unterraum* von V.

Beispiel: Nach Satz 10.4 ist $\mathcal{L}$ ein Unterraum von $\mathcal{F}$.

Bei der Fülle von Lösungsfolgen für die Gleichung 10.3 ist es erstaunlich, daß alle die reellen Vielfachen einer einzigen Lösungsfolge sind:

Satz 10.5

Es sei

$$f_1(k)y_{k+1} + f_0(k)y_k = 0 \tag{10.4}$$

eine (feste) lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung. Das heißt insbesondere $f_1(k) \neq 0$ und $f_0(k) \neq 0$ für alle k.

a) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösung von (10.4) mit $a_0 = 0$, so ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullfolge.

b) Zu beliebigen von der Nullfolge verschiedenen Lösungen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von (10.4) läßt sich stets eine reelle Zahl r finden mit der Eigenschaft:

$$(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (ra_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Beweis

a) Zunächst gilt nach Voraussetzung:

$$f_1(k)a_{k+1} + f_0(k)a_k = 0, \quad \text{also} \quad a_{k+1} = -\frac{f_0(k)}{f_1(k)}\cdot a_k \tag{10.5}$$

Ist also $a_0 = 0$, so auch $a_1 = -\dfrac{f_0(0)}{f_1(0)}\cdot a_0$ usw.

b) Da auch (b_k) eine Lösung ist, gilt entsprechend zu (10.5):

$$b_{k+1} = -\frac{f_0(k)}{f_1(k)}\cdot b_k.$$

Wir führen vollständige Induktion nach k durch:

Induktionsverankerung

Da a_0 und b_0 relle (und nach Voraussetzung von Null verschiedene) Zahlen sind, gibt es sicher ein r mit

$$b_0 = r\,a_0 \quad ; \quad \text{nämlich } r = \frac{b_0}{a_0}.$$

Induktionsannahme: Es sei $b_1 = r\cdot a_1$.

Induktionsschluß: Es ist

$$b_{1+1} = -\frac{f_0(1)}{f_1(1)}\cdot b_1 = -\frac{f_0(1)}{f_1(1)}\cdot r\cdot a_1 = r\cdot\left(-\frac{f_0(1)}{f_1(1)}\cdot a_1\right) = r\cdot a_{1+1}$$

Damit ist Satz 10.5 bewiesen.

Definition 10.5

Ist V ein Vektorraum, in dem alle Vektoren die reellen Vielfachen eines einzigen von Null verschiedenen Vektors sind, so sagt man: V ist ein *eindimensionaler reeller Vektorraum*.

Satz 10.6

Die Lösungsmengen von linearen homogenen Differenzengleichungen erster Ordnung sind eindimensionale reelle Vektorräume.

§ 11 Lineare inhomogene Differenzengleichungen erster Ordnung

[11.1] Die empirische Methode zum Auffinden von Einzellösungen

Nachdem wir nun die Lösungsgesamtheit homogener linearer Differenzengleichungen erster Ordnung völlig überschauen, liegt es nicht zuletzt im Hinblick auf die bereits diskutierte Tilgungsgleichung nahe, auch den inhomogenen Fall näher zu betrachten. Die Tilgungsgleichung ist ein Gleichungstyp mit konstanter Inhomogenität. Anders verhält es sich in folgendem

Beispiel: Dynamische Prämiensteigerung
Bei gewissen Versicherungsarten liegen die periodisch zu zahlenden Beträge - häufig *Prämien* genannt - sehr hoch. Dies ist insbesondere bei Lebensversicherungen vom Typ der Kapitalversicherung der Fall, wo die Versicherung im allgemeinen hohe Beträge im Todesfall an die Hinterbliebenen oder im Erlebensfall, etwa nach 25 Jahren, an den Versicherungsnehmer selbst auszuzahlen hat. Der Versicherungsnehmer erwirbt sich sein Anrecht auf diese Auszahlung durch regelmäßige Prämienzahlungen, die über Zeiträume von etwa 15 bis 35 Jahren erfolgen. Besonders um junge Versicherungsnehmer zu werben, bieten einige Versicherungsgesellschaften Prämienstrukturen an, bei denen die Prämien zunächst relativ niedrig liegen, dann aber entsprechend der vorausgeschätzten allgemeinen Einkommensentwicklung steigen. Typische Vertragsdaten könnten z. B. wie folgt aussehen:

Eintrittsalter: 33 Jahre (spielt für die Höhe der Anfangsprämie eine Rolle)
Versicherungsdauer: 30 Jahre
Versicherungssumme: 50 000,- DM
Anfangsprämie: 900,- DM jährlich (zu zahlen jeweils zu Beginn jedes Jahres)
jährliche Prämienerhöhung: 4 % (beginnend nach dem ersten Jahr)

Es treten unmittelbar die folgenden Fragen auf:

- Wie hoch liegt die Prämie in den darauffolgenden Jahren, insbesondere im letzten Jahr?
- Zu welchem Betrag hätte sich der Kontostand auf einem etwa mit 5 % jährlich verzinsten Sparkonto angesammelt, wenn die Prämienzahlungen nicht an die Versicherung, sondern auf dieses Vergleichskonto erfolgt wären?

Man muß allerdings beachten, daß in der letzten Frage dem nicht zu unterschätzenden Aspekt der Unfallversicherung bei Todesfall nur durch die Lebensversicherung, nicht jedoch durch das Sparkonto Rechnung getragen wird.

Wir wollen die aufgeworfenen Fragen gleich allgemein behandeln. Die Anfangsprämie zu Beginn des ersten Jahres betrage (in DM): $P = P_1$; die jährliche Prämienerhöhung liege bei p %, das Vergleichssparbuch werde mit q % verzinst. Die Prämien entwickeln sich wie folgt:

$$P_1 = P$$
$$P_2 = (1 + \frac{p}{100})\ P_1$$
$$P_3 = (1 + \frac{p}{100})\ P_2$$
$$\ldots$$
$$P_{k+1} = (1 + \frac{p}{100})\ P_k \qquad (11.1)$$

Die Prämienzahlungen bilden also eine geometrische Folge, und nach § 3 (oder allgemeiner § 7) ist

$$P_k = (1 + \frac{p}{100})^{k-1} \cdot P \qquad (11.2)$$

die zu Beginn des k-ten Jahres gezahlte Prämie.

Für die Sparbeträge S_k des mit q % verzinsten Vergleichssparbuches gilt:

$$S_1 = P_1$$
$$S_2 = (1 + \frac{q}{100})\ S_1 + P_2$$
$$S_3 = (1 + \frac{q}{100})\ S_2 + P_3$$
$$\ldots$$
$$S_{k+1} = (1 + \frac{q}{100})\ S_k + P_{k+1} \qquad (11.3)$$

Mit (11.2) folgt für den Kontostand zu Beginn des (k+1)-ten Jahres (nach Zahlung der Prämie P_{k+1}):

$$S_{k+1} = (1 + \frac{q}{100})\ S_k + (1 + \frac{p}{100})^k\ P \qquad (11.4)$$

Aufgabe 11.1

Stellen Sie einen Algorithmus zur sukzessiven Berechnung von S_k auf (ausgehend vom Anfangswert S_1). Setzen Sie den Algorithmus in ein Programm um.

Gleichung (11.4) ist vom Typ der linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit nicht konstanter Inhomogenität; wir werden ihren Typ kurz als *"Dynamische-Prämien-Gleichung"* bezeichnen.

Mit den Abkürzungen

$$a = 1 + \frac{p}{100} \qquad \text{und} \qquad b = 1 + \frac{q}{100}$$

lautet die Gleichung (11.4) in etwas übersichtlicherer Form:

$$S_{k+1} = b \cdot S_k + a^k \cdot P \qquad (11.5)$$

Um einen Eindruck von der Entwicklung des durch (11.5) gegebenen dynamischen Prozesses zu erhalten, lassen wir ihn vom Anfangswert P an "loslaufen":

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= P_1 = P \\ S_2 &= b \cdot S_1 + a \cdot P = (a + b) \cdot P \\ S_3 &= b \cdot S_2 + a^2 \cdot P = (ab + b^2) \cdot P + a^2 \cdot P = (a^2 + ab + b^2) \cdot P \end{aligned}\right\} (11.6)$$

$$S_4 = b \cdot S_2 + a^3 \cdot P = (a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \cdot P \quad (11.6$$

Für das allgemeine Glied S_k drängt sich geradezu die Vermutung auf:

$$S_k = (a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \cdot P \quad (11.7$$

bzw.

$$S_k = \left(\sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l} b^l\right) \cdot P$$

Aufgabe 11.2

Beweisen Sie (11.7).

Nach Aufgabe 4.1 ist für $a \neq b$:

$$\sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l} b^l = \frac{a^k - b^k}{a - b} \quad (11.8)$$

Wir erhalten hiermit die folgende explizite Lösung von (11.5):

$$S_k = \frac{a^k - b^k}{a - b} \cdot P \quad (11.9)$$

Im Hinblick auf die speziellen zu Beginn des Paragraphen gestellten Fragen nach der Höhe der Endprämie und der aufgelaufenen Gesamtsparsumme ermöglicht (11.9) die folgende Auswertung mit dem Taschenrechner:

Für $a = 1{,}04$, $b = 1{,}05$ und $P = 900{,}-$ DM beträgt die zu Beginn des 30. Jahres zu zahlende Endprämie, in DM,

$$P_{30} = 1{,}04^{29} \cdot 900 \cong 3{,}11865 \cdot 900 = 2806{,}79$$

Auf einem Vergleichssparbuch hätte sich mit Zahlung der Prämie P_{30} bei einer Verzinsung von 5 % ein Betrag von

$$S_{30} = \frac{1{,}04^{30} - 1{,}05^{30}}{1{,}04 - 1{,}05} \cdot 900 \text{ DM} = \frac{3{,}2434 - 4{,}32195}{-0{,}01} \cdot 900 \text{ DM} = $$
$$= 97\,069{,}50 \text{ DM}$$

angesammelt. Zum Ende des 30. Jahres hätte sich dieser Betrag dann auf den Endbetrag von

$$S = S_{30} \cdot 1{,}05 = 101\,922{,}97 \text{ DM}$$

erhöht.

Im Hinblick auf einen Vergleich dieses Betrages mit der Versicherungssumme von 50 000,- DM sei noch einmal auf den Risikoaspekt der Lebensversicherung hingewiesen. Außerdem erhöht sich der Auszahlungsbetrag von Lebensversicherungen im Normalfall sehr stark durch das System der "Überschußverteilung", auf das jedoch im allgemeinen kein Rechtsanspruch besteht. Im Laufe von 35 Jahren kann der Überschußanteil gelegentlich noch einmal knapp auf die Höhe der Versicherungssumme heranwachsen. Da sich diese Detailkonditionen sehr stark von Versicherung zu Versicherung unterscheiden, wollen wir hier nicht auf sie eingehen. Vergleiche von Lebensversicherungen werden gelegentlich von der Zeitschrift TEST der Stiftung Warentest oder auch von anlageorientierten Zeitschriften wie CAPITAL durchgeführt.

Wir wollen zum Schluß dieses Abschnitts nochmals den Problemlösevorgang reflektieren, der uns die explizite Gleichung (11.9) lieferte. Die zentrale Idee war, daß wir, ausgehend von einem festen Anfangswert, den rekursiven Prozeß im Schema (11.6) so lange laufen ließen, bis wir in (11.7) eine sinnvolle Vermutung über die Gestalt der expliziten Lösung formulieren konnten. Die Art und Weise, in der wir aus einigen Daten Hypothesen über einen allgemeinen Sachverhalt aufstellten, hat durchaus Ähnlichkeiten mit allgemeinen Methoden, nach denen wissenschaftliche und insbesondere naturwissenschaftliche Erkenntnisse gewonnen werden. Eine dieser Methoden besteht darin, daß man aus Beobachtungen von Daten Vermutungen über allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen versucht. Man nennt dies die *empirische Methode* oder auch die Methode der *unvollständigen Induktion*. Während die Richtigkeit solcher Vermutungen im Bereiche der Naturwissenschaften nur durch weitere Beobachtung und gezielte Experimente der in Frage stehenden Untersuchungsgegenstände (und somit nur punktuell) überprüft werden kann, haben wir in der Mathematik mit der Beweismethode der vollständigen Induktion ein Mittel in der Hand, das uns die Allgemeingültigkeit einer Behauptung auf einen Schlag liefert. Wie uns das vorangehende Beispiel gezeigt hat, ist jedoch die empirische Methode der unvollständigen Induktion zur Unterstützung des Problemlösevorganges (also im Hinblick auf die *Heuristik*) auch in der Mathematik sehr nützlich.

[11.2] Diskussion der Lösungsgesamtheit im Spezialfall der Tilgungsgleichung

Die Dynamische-Prämien-Gleichung (11.5) stellt einen Spezialfall der linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k) \qquad (11.10)$$

dar. Ist $g(k) = 0$ für alle k, so wird (11.10) zur wohlbekannten homogenen Gleichung. Wie in der Diskussion des homogenen Falles wollen wir uns auch jetzt von der Vorgabe eines festen Anfangswertes lösen und unabhängig von diesem die Gesamtheit aller Lösungsfolgen der Gleichung (11.10) zu ermitteln versuchen. Im Hinblick auf den hohen Allgemeinheitsgrad von (11.10) scheint dies ein schwieriges Unterfangen zu sein. In derartigen Fällen ist es oft angebracht, die Fragestellung zu *spezialisieren*. Dies führt zu überschaubaren Situationen, die häufig leichter lösbar sind als der allgemeine Fall. Der Lösung des Spezialfalles kann man dann oft entscheidende Hinweise für die Lösung des allgemeinen Falles entnehmen.

Gelegentlich führt eine geeignete Spezialisierung sogar zu Situationen, die man bereits völlig überschaut. Wenn wir etwa die in Gleichung (11.10) gegebenen Funktionen $f_1(k)$, $f_0(k)$ ung $g(k)$ konstant wählen, so reduziert sich (11.10) auf den Typ der Tilgungsgleichung, die wir in § 7 und § 8 vollständig durchleuchtet haben. Halten wir uns insbesondere nochmals die graphische Vorgehensweise in § 8 vor Augen:

Durch die Koordinatentransformation (8.3)

$$v_k = y_k - \frac{B}{1-A}$$

konnten wir die inhomogene Gleichung

$$y_{k+1} = A\cdot y_k + B \qquad (11.11)$$

in die homogene Gleichung

$$v_{k+1} = A \cdot v_k \tag{11.12}$$

überführen. Die Lösung der homogenen Gleichung und ihr Wachstumsverhalten konnten wir gut überblicken, da es sich um eine geometrische Folge handelte. Mit Hilfe der in umgekehrter Richtung durchgeführten Koordinatentransformation

$$y_k = v_k + \frac{B}{1 - A} \tag{11.13}$$

erhielten wir aus der Lösung (v_k) der homogenen Gleichung (11.12) eine Lösung (y_k) der inhomogenen Gleichung (11.11).

Welche Rolle spielt dabei der in der Transformationsgleichung auftretende Summand $\frac{B}{1-A}$? Er stellt natürlich ein Maß für die Verschiebung der Koordinatenachsen dar (s. Abbildung 8.4). Ein Blick auf Satz 8.5 und insbesondere auf die Abbildungen 8.6 und 8.7 verrät aber noch weit mehr: Wählt man $y_0 = \frac{B}{1-A}$, so stellt die *konstante* Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = \frac{B}{1-A}$ (für alle k) eine Lösung der inhomogenen Tilgungsgleichung dar. Man bezeichnet die obige konstante Folge auch mit $\left(\frac{B}{1-A}\right)_{k=0,1,2,...}$ oder kurz $\left(\frac{B}{1-A}\right)_k$.

Wenn man von der Bedeutung der Symbole y_k und v_k als Koordinatenachsen absieht, so besitzen rein formal gesehen die Gleichungen

$$v_{k+1} = A \cdot v_k \qquad \text{und} \qquad y_{k+1} = A \cdot y_k$$

dieselben Lösungen. Man nennt deshalb die Gleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k \tag{11.14}$$

die zur Gleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \tag{11.15}$$

gehörende homogene Gleichung.

Zusammenfassend halten wir fest:

Satz 11.1

Gegeben sei die Tilgungsgleichung (11.15) mit $A \neq 1$.

a) Sie besitzt eine spezielle Lösung, nämlich die konstante Lösung $\left(\frac{B}{1-A}\right)_k$.

b) Jede Lösung der inhomogenen Gleichung (11.15) ist die Summe aus einer geeigneten Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (11.14) und der speziellen Lösung $\left(\frac{B}{1-A}\right)_k$ der inhomogenen Gleichung.

Es stellt sich sofort die Frage nach der Einzigartigkeit der in Satz 11.1 a) angesprochenen speziellen Lösung $\left(\frac{B}{1-A}\right)_k$. Sie ist natürlich einzigartig in dem Sinne, daß sie die einzige konstante Lösung der inhomogenen Gleichung ist, denn für jede konstante Lösung $(c)_k$ muß gelten:

$c = A \cdot c + B$, also

$$c = \frac{B}{1 - A}$$

Im Hinblick auf ihre Rolle in Teil b) von Satz 11.1 ist sie jedoch nicht einzigartig, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 11.2

Es sei (a_k) eine feste Lösung der Tilgungsgleichung (11.15). Dann ist jede Lösung (b_k) von (11.15) die Summe aus (a_k) und einer geeigneten Lösung der homogenen Gleichung (11.14).

Beweis: Wir bilden die Folge (d_k) mit $d_k = b_k - a_k$ aus den Lösungen der inhomogenen Gleichung. Für die Glieder der Folge (d_k) gilt:

$$d_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = (Ab_k + B) - (Aa_k + B) = A(b_k - a_k) = A \cdot d_k$$

Dies zeigt, daß (d_k) eine Lösungsfolge der homogenen Gleichung (11.14) ist. Außerdem ist, wie man sofort nachrechnet, (b_k) die Summe der Folgen (d_k) und (a_k).

Bemerkungen

1. Die spezielle Lösung (a_k) der inhomogenen Gleichung erwies sich als sehr nützlich, da mit ihr die aus § 10 bekannte Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung in die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung übergeführt werden konnte. Wir wollen deshalb die Lösungen inhomogener Gleichungen durch einen Stern besonders kennzeichnen und z. B. im obigen Falle (a_k^*) statt (a_k) schreiben.
2. Entsprechend der Summe von Folgen definieren wir die *Differenz* von Folgen durch

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} - (b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

mit $c_k = a_k - b_k$ für alle k.

Wir schreiben auch: $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_k - b_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie:

$$(a_k) - (b_k) = (a_k) + (-b_k),$$

wobei $(-b_k)$ durch $(-1) \cdot (b_k)$ gegeben ist, siehe Definition 10.1.

Der Beweis des vorangehenden Satzes hat sogar gezeigt:

Satz 11.3

Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung (11.15) ist stets eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (11.14).

[11.3] Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen linearen Gleichung erster Ordnung

Wir haben inzwischen im Hinblick auf die Diskussion der Gleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k)$$

wichtige Erfahrungen anhand des Spezialfalles der Tilgungsgleichung gewonnen. Es stellt sich die naheliegende Frage, ob und inwieweit die Ergebnisse aus Abschnitt [11.2] auf den allgemeinen Fall übertragbar sind.

Wenden wir uns nach dem Prinzip "last in - first out" zunächst dem Satz 11.3 zu. Unmittelbare Verallgemeinerung liefert:

Satz 11.4

Sind $(a_k{}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k{}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Lösungen der inhomogenen Differenzengleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k), \tag{11.16}$$

so ist die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (mit $c_k = b_k{}^* - a_k{}^*$) eine Lösung der zu (11.16) gehörenden homogenen Gleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0. \tag{11.17}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$f_1(k)a^*_{k+1} + f_0(k)a^*_k = g(k)$$

und

$$f_1(k)b^*_{k+1} + f_0(k)b^*_k = g(k).$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung ergibt:

$$f_1(k)(b^*_{k+1} - a^*_{k+1}) + f_0(k)(b^*_k - a^*_k) = g(k) - g(k) = 0$$

Das heißt,

$$f_1(k)\cdot c_{k+1} + f_0(k)\cdot c_k = 0,$$

und (c_k) ist eine Lösung der homogenen Gleichung.

Da in Satz 11.3 nur die heuristische Grundidee des Beweises von Satz 11.2 festgehalten worden war, ist es nur natürlich, daß sich auch letzterer Satz unmittelbar verallgemeinern läßt:

Satz 11.5

a) Die Summe aus einer Lösung $(a^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der inhomogenen Gleichung (11.16) und einer Lösung $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen homogenen Gleichung (11.17) ist stets eine Lösung der inhomogenen Gleichung (11.16).

b) Es sei $(a^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (feste) Lösung der inhomogenen Gleichung (11.16). Dann läßt sich jede Lösung $(b^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der inhomogenen Gleichung (11.16) als Summe von $(a^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit einer geeigneten Lösungsfolge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen homogenen Gleichung (11.17) darstellen.

Aufgabe 11.4

Führen Sie den Beweis von Satz 11.5 durch. (Orientieren Sie sich dabei an Satz 11.2)

Bemerkungen

1. Satz 11.5 erweist sich in der Praxis als äußerst nützlich. Er besagt nämlich, daß man die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung (11.16) bereits dann vollständig kennt, wenn man die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen Gleichung (11.17) und eine einzige Lösung (a_k^*) der inhomogenen Gleichung kennt.

   Eine solche Lösung der inhomogenen Gleichung nennt man auch eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung von (11.16).

2. Im Sonderfall der Tilgungsgleichung

   $$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \qquad (\text{mit } A \neq 1)$$

   stellt die konstante Folge (a_k^*) mit $a_k^* = \frac{B}{1 - A}$ stets eine spezielle Lösung dar.

3. Im allgemeinen Fall der Gleichung (11.16) ist die Ermittlung einer speziellen Lösung oft mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Es gibt kein Patentrezept zur Gewinnung partikulärer Lösungen. Dennoch gibt es methodische Möglichkeiten, die in Teilbereichen zum Erfolg führen können:

   a) Die *empirische Methode*. Wir haben ihre Wirkungsweise in [11.1] bei der Diskussion der Dynamischen-Prämien-Gleichung kennengelernt.

   b) Die Methode der *Homogenisierung durch Erhöhung der Ordnung*. Wir werden sie in § 12 behandeln.

   c) Die *Methode des systematischen Probierens*. Sie stellt sich in der Literatur oft so dar, daß ein "Lösungsansatz" gemacht wird. Wie man auf diesen Ansatz kommt, bleibt dabei oft im verborgenen. Sehr oft dürfte man wohl über die empirische Methode zu dem Ansatz gekommen sein.

   d) Die *Methode der unbestimmten Koeffizienten*. Gelegentlich kennt man den Typ der Lösungsfunktion, aber nicht alle ihre Parameter (Koeffizienten). Durch Einsetzen zunächst unbestimmter Koeffizienten und systematisches Ausnutzen der Differenzengleichung lassen sich die Koeffizienten dann oft eindeutig ermitteln. Wir werden ein Beispiel hierzu in Abschnitt [11.4] diskutieren.

   e) Auf die *Methode der Variation der Konstanten* werden wir vorerst nicht eingehen. Man kann sie als eine Verallgemeinerung der Methode der unbestimmten Koeffizienten auffassen.

   f) In engem Zusammenhang mit den bisher angeführten Methoden steht die *Methode der systematischen Lösung* (des eingangs gestellten Problems) *für bestimmte Funktionstypen*. Hier kommen insbesondere die folgenden Typen elementarer Funktionen in Frage:

   - Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen)
   - gebrochen rationale Funktionen
   - Wurzelfunktionen
   - Wachstumsfunktionen (Exponential- und Logarithmusfunktionen)
   - trigonometrische Funktionen

   g) Ein leider nur auf wenige Funktionstypen anwendbares Verfahren ist das der *Ermittlung einer konstanten Lösung* (y_k^*) mit

   $$y_{k+1}^* = y_k^* \qquad \text{für alle } k.$$

   Falls konstante Lösungen der inhomogenen Gleichung existieren, sind sie, etwa wie bei der Tilgungsgleichung, häufig recht einfach und mit direkten Schlußweisen zu ermitteln.

[11.4] Die Methode der unbestimmten Koeffizienten, erläutert am Beispiel der Dynamischen-Prämien-Gleichung

Die Dynamische-Prämien-Gleichung lautet:

$$S_{k+1} - b\cdot S_k = a^k\cdot P \tag{11.18}$$

P sei hier eine beliebige Variable, die nicht mit der Anfangsprämie P_0 übereinzustimmen braucht. Wir wollen wie bisher in den Abschnitten [11.2] und [11.3] zunächst die Lösungsgesamtheit von (11.18) ohne Berücksichtigung des Anfangswertes S_0 ermitteln. Entsprechend dem in [11.3] aufgezeigten Programm benötigen wir neben einer partikulären Lösung von (11.18) die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$S_{k+1} - b\cdot S_k = 0. \tag{11.19}$$

(11.19) stellt die Gleichung einer geometrischen Folge dar, und mit Satz 10.5 schließen wir, daß jede Lösung (S_k) von (11.19) von der Form

$$(S_k)_{k\in\mathbb{N}} = r\cdot(b^k)_{k\in\mathbb{N}}; \qquad (r\in\mathbb{R}) \tag{11.20}$$

ist. (11.20) stellt - wie man auch sagt - die "allgemeine Lösung" von Gleichung (11.19) dar. Es bleibt die Aufgabe, eine spezielle Lösung (S_k^*) von (11.18) zu finden. Eine solche können wir z. B. mit Hilfe der empirischen Methode aus Abschnitt [11.1] gewinnen. Wir wollen an diesem Beispiel jedoch einmal die Methode der unbestimmten Koeffizienten erläutern. Dazu müssen wir zunächst überlegen, von welchem Funktionstyp eine spezielle Lösung (S_k^*) sein kann.

Die Folge (S_k^*) soll die Gleichung (11.18) erfüllen; es muß also gelten:

$$S_{k+1}^* - b\cdot S_k^* = a^k\cdot P$$

Die Differenz $S_{k+1}^* - b\cdot S_k^*$ ist also im wesentlichen eine Potenz von a (der konstante Faktor P spielt keine entscheidende Rolle). Dies kann jedoch nur dann der Fall sein, wenn S_{k+1}^* und S_k^* selbst in irgendeiner Weise Potenzen von a enthalten. Nach dem "Prinzip des geringsten Aufwandes" versuchen wir es mit der einfachsten Möglichkeit, S_k^* als Funktion von a^k darzustellen, nämlich S_k^* als reelles Vielfaches von a^k zu schreiben:

$$S_k^* = c\cdot a^k \tag{11.21}$$

Es gilt nun, noch den unbestimmten Koeffizienten c $(c\in\mathbb{R})$ zu bestimmen. Wir setzen dazu (11.21) unter Beachtung von

$$S_{k+1}^* = c\cdot a^{k+1}$$

in die zu lösende Differenzengleichung (11.18) ein und erhalten:

$$c\cdot a^{k+1} - b\cdot c\cdot a^k = a^k\cdot P$$

Die Zusammenfassung ergibt:

$$(c\cdot a - b\cdot c - P)a^k = 0$$

Ist $a \neq 0$, so können wir durch a^k dividieren, und es folgt für $a \neq b$:

$$c = \frac{P}{a-b}$$

Unsere in (11.21) formulierte Vermutung im Hinblick auf den Funktionstyp der Lösungsfunktion hat für $a \neq 0$ und $a \neq b$ die Konsequenz:

$$S_k^* = \frac{P}{a-b} \cdot a^k \tag{11.22}$$

Aufgabe 11.5

Überprüfen Sie, daß die durch (11.22) gegebene Folge tatsächlich eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (11.18) darstellt.

Die "allgemeine Lösung" der inhomogenen Gleichung (11.18) erhalten wir nach [11.3] nun durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung aus (11.20) und der speziellen Lösung aus (11.22). Das heißt: Für $a \neq 0$ und $a \neq b$ hat jede Lösungsfolge (T_k^*) von (11.18) die Gestalt:

$$T_k^* = r \cdot b^k + \frac{1}{a-b} a^k \cdot P \tag{11.23}$$

(mit einem geeigneten $r \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 11.6

Überprüfen Sie, daß die in (11.23) gegebene Folge für jede reelle Zahl r eine Lösungsfolge der Gleichung (11.18) darstellt.

Wir wollen uns nun abschließend wieder der Diskussion der Lösung im Hinblick auf einen speziellen Anfangswert der Lösungsfolge (T_k^*) zuwenden. Verlangen wir etwa wie in Abschnitt [11.1]

$$T_1^* = P,$$

so folgt für die reelle Zahl r:

$$T_1^* = P = r \cdot b^1 + \frac{1}{a-b} \cdot a^1 \cdot P$$

Also ist dann:

$$r = \frac{-1}{a-b} \cdot P,$$

und wir erhalten auch auf diesem Wege das mit der empirischen Methode bereits in (11.9) ermittelte Ergebnis:

$$T_k^* = \frac{a^k - b^k}{a-b} \cdot P$$

Aufgabe 11.7

Lösen Sie die Dynamische-Prämien-Gleichung (11.18) für den Fall: $a = b$.
Hinweis: Eine spezielle Lösung kann nach der empirischen Methode gefunden werden.

§ 12 Homogenisierung

Die in der Gleichung

$$f_1(k)y_{k+1} + f_0(k)y_k = g(k) \tag{12.1}$$

auftretende Inhomogenität g(k) kann höchst unterschiedlicher Natur sein.

[12.1] Konstante Inhomogenität

Der nach dem in § 10 bereits behandelten Fall g(k) = 0 nächst einfache Fall dürfte wohl g(k) = konstant, etwa g(k) = b sein:

$$f_1(k)y_{k+1} + f_0(k)y_k = b \tag{12.2}$$

Die Tilgungsgleichung ist z. B. auch von diesem Typ. Da Differenzengleichungen wie (12.2) vereinbarungsgemäß für alle Werte von k gelten, ist auch (für k + 1 an Stelle von k):

$$f_1(k+1)y_{k+2} + f_0(k+1)y_{k+1} = b \tag{12.3}$$

Aus der naheliegenden Gleichsetzung von (12.2) und (12.3) folgt:

$$f_1(k+1)y_{k+2} + (f_0(k+1) - f_1(k))y_{k+1} - f_0(k)y_k = 0 \tag{12.4}$$

Ersetzen wir hierbei die Funktion f_i wie folgt durch $\hat{f}_i$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}_2(k) &= f_1(k+1) \\ \hat{f}_1(k) &= f_0(k+1) - f_1(k) \\ \hat{f}_0(k) &= -f_0(k), \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

so wird (12.4) zu einer *homogenen* linearen Gleichung *zweiter* Ordnung:

$$\hat{f}_2(k)\cdot y_{k+2} + \hat{f}_1(k)\cdot y_{k+1} + \hat{f}_0(k)\cdot y_k = 0 \tag{12.6}$$

Unter Berücksichtigung des Prozesses, durch den wir von Gleichung (12.2) zu (12.4) gelangten, ist unmittelbar klar, daß jede Lösungsfolge (a_k) von (12.2) auch eine Lösung von (12.4) ist. Andererseits sehen wir sofort, daß es Lösungen von (12.4) gibt, die keine Lösungen von (12.2) sind; so zum Beispiel die konstante Lösung (y_k) mit

$$y_k = 0 \qquad \text{(für alle } k \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Die Lösungsmenge von (12.2) ist also eine echte Teilmenge der Lösungsmenge von (12.4). Durch unseren Prozeß der Homogenisierung haben wir also die Ordnung erhöht und die Lösungsmenge vergrößert. Dennoch werden wir dieses Verfahren häufig anwenden, da homogene Gleichungen rechnerisch besser zu behandeln und strukturell besser zugänglich sind als inhomogene Gleichungen.

Es gibt im Prinzip natürlich viele Möglichkeiten, inhomogene Differenzengleichungen in homogene Gleichungen überzuführen. Eine bereits in § 11 angewandte Methode besteht darin, die Inhomogenität einfach wegzulassen.

Zur Vermeidung von Unklarheiten werden wir im folgenden diese beiden Methoden zur Gewinnung homogener Gleichungen aus inhomogenen Gleichungen sprachlich deutlich auseinanderhalten.

Erstes Verfahren: Weglassen der Inhomogenität (siehe § 11)

Wir sprechen in diesem Fall vom *Übergang zur zugehörigen homogenen Gleichung.* Die so erhaltene Gleichung nennen wir die zur ursprünglich gegebenen inhomogenen Gleichung gehörende homogene Gleichung oder kurz die *zugehörige homogene Gleichung.*

Wir halten fest, daß die Lösungen der ursprünglichen Gleichung keine Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind.

Zweites Verfahren

Man schreibe die Differenzengleichung für verschiedene Werte des Laufindex k auf und eliminiere die Inhomogenität durch ein Gleichsetzungs-, Subtraktions- oder Einsetzungsverfahren (siehe Vorgehensweise zu Beginn von § 12).

Wir nennen diesen Prozeß die *Homogenisierung* der ursprünglich gegebenen inhomogenen Gleichung. Die so erhaltene Gleichung bezeichnen wir als die *homogenisierte* Gleichung.

Wir halten fest, daß nach Anwendung eines derartigen Gleichsetzungsverfahrens jede Lösung der ursprünglichen Gleichung auch eine Lösung der homogenisierten Gleichung darstellt, daß die neu gewonnene homogenisierte Gleichung jedoch noch weitere Lösungen besitzt.

Wie der Übergang von (12.2) zu (12.4) zeigt, wird durch das zweite Verfahren allerdings der Vorteil der Homogenisierung durch den Nachteil erkauft, daß sich die Ordnung der Gleichung erhöht.

Die Veränderung der Lösungsmenge kann weder als Vorteil noch als Nachteil angesehen werden, da sie zwar größer und damit komplexer, andererseits aber strukturell besser zugänglich wird. Wir werden in den folgenden Kapitel sehen, wie man in einfacher Weise aus der Lösungsgesamtheit der homogenisierten Gleichung die Lösungsgesamtheit der ursprünglichen inhomogenen Gleichung gewinnt.

Aufgabe 12.1

> Führen Sie die vorangehenden Überlegungen explizit für den Fall einer Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten durch und stellen Sie insbesondere das Analogon zur Gleichung (12.6) auf.

[12.2] Lineare Inhomogenität

Auf der nächsten Stufe der Verallgemeinerung von (12.2) nehmen wir an, daß die Inhomogenität linear von k abhängt:

$$g(k) = a \cdot k + b, \tag{12.7}$$

wobei a und b feste Konstanten sind. Gleichung (12.1) lautet somit an den "Stellen" k und k + 1:

$$f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = ak + b$$

$$f_1(k+1) y_{k+2} + f_0(k+1) y_{k+1} = a(k+1) + b$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung führt wie in [12.1] mit den Bezeichnungen aus Schema (12.5) zu der Gleichung:

$$\hat{f}_2(k) \cdot y_{k+2} + \hat{f}_1(k) \cdot y_{k+1} + \hat{f}_0(k) \cdot y_k = a \tag{12.8}$$

Aufgabe 12.2

Wandeln Sie die inhomogene Gleichung (12.8) in Anlehnung an die in [12.1] geschilderte Technik der Homogenisierung in eine homogene Gleichung um. Zeigen Sie insbesondere, daß sich die Ordnung der Gleichung von 2 auf 3 erhöht.

[12.3] Polynomiale Inhomogenität

Die bisher diskutierten Fälle

$g(k) = b$ (konstantes Polynom)

$g(k) = a \cdot k + b$ (lineares Polynom in k für $a \neq 0$)

lassen sich als Anfangsstufen zur Behandlung allgemeiner polynomialer Inhomogenitäten auffassen. Aufgrund der Überlegungen in [12.1] und [12.2] kristallisiert sich die Vermutung heraus, daß die Summe aus der Ordnung der linearen Differenzengleichung und dem Grad des Polynoms g im Prozeß der Homogenisierung konstant bleibt.

Vermutung:

$$\text{Ordnung} + \text{Grad} = \text{konstant} \tag{12.9}$$

Der Beweis dieser Vermutung kann wieder nur mit vollständiger Induktion geführt werden.

Satz 12.1

Es sei

$$f_n(k) \cdot y_{k+n} + f_{n-1}(k) \cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k)\, y_k = g(k) \tag{12.10}$$

eine lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit polynomialer Inhomogenität

$$g(k) = c_r k^r + c_{r-1} k^{r-1} + \ldots + c_1 k + c_0 \tag{12.11}$$

Die Gleichung (12.10) läßt sich durch Homogenisierung in eine lineare Differenzengleichung (n + 1)-ter Ordnung mit einer polynomialen Inhomogenität g(k) vom Grade r − 1 überführen, deren Lösungsmenge die Lösungen von (12.10) enthält.

Beweis: Wir führen bei beliebiger, aber fester Ordnung n vollständige Induktion nach dem Grade r des Polynoms g(k) durch.

Induktionsverankerung: r = 0. Die bedeutet:

$$g(k) = c_0 \tag{12.12}$$

Es liegt eine konstante Inhomogenität vor. Entsprechend der in [12.1] studierten Technik schreiben wir die Gleichung (12.10) noch für k + 1 an Stelle von k auf:

$$f_n(k+1) \cdot y_{k+n+1} + f_{n-1}(k+1) \cdot y_{k+n} + \ldots + f_1(k+1) \cdot y_{k+2} + f_0(k+1) \cdot y_{k+1} = c_0 \tag{12.13}$$

Subtraktion der Gleichung (12.10) von (12.13) ergibt unter Beachtung von (12.12) die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} f_n(k+1) \cdot y_{k+n+1} &+ (f_{n-1}(k+1) - f_n(k)) \cdot y_{k+n} + \ldots \\ &\ldots + (f_0(k+1) - f_1(k)) \cdot y_{k+1} - f_0(k) \cdot y_k = 0 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Durch Einführung der Funktionen:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{f}_{n+1}(k) &= f_n(k+1) \\
\hat{f}_n(k) &= f_{n-1}(k+1) - f_n(k) \\
&\cdots \\
\hat{f}_l(k) &= f_{l-1}(k+1) - f_l(k) \\
&\cdots \\
\hat{f}_1(k) &= f_0(k+1) - f_1(k) \\
\hat{f}_0(k) &= -f_0(k)
\end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

erhält (12.14) die Normalform:

$$\hat{f}_{n+1}(k)\cdot y_{k+n+1} + \hat{f}_n(k)\cdot y_{k+n} + \ldots + \hat{f}_1(k)\cdot y_{k+1} + \hat{f}_0(k)\cdot y_k = 0 \qquad (12.16)$$

Diese Gleichung hat die Ordnung $n+1$, falls die Funktionen $\hat{f}_{n+1}(k)$ und $\hat{f}_0(k)$ durchweg von Null verschieden sind. Das ist der Fall, weil nach Voraussetzung die Ordnung von (12.10) die Funktionen $f_n(k)$ und $f_0(k)$ nie den Wert Null annehmen. Es ist unmittelbar klar, daß jede Lösung von (12.13) auch eine Lösung von (12.16) ist.

Induktionsannahme
Die Aussage des Satzes sei richtig für Polynome vom Grade m ($m \geq 1$).

Induktionsschluß
Das Polynom $g(k)$ habe den Grad $m+1$:

$$g(k) = c_{m+1}k^{m+1} + c_m k^m + \ldots + c_1 k + c_0 \qquad (12.17)$$

Die bereits häufig in ähnlicher Form durchgeführte Subtraktion der Gleichung (12.10) von der entsprechenden an der Stelle $k+1$ statt k aufgeschriebenen Gleichung ergibt mit den Bezeichnungen aus Schema (12.15):

$$\begin{aligned}
&\hat{f}_{n+1}(k)\cdot y_{k+n+1} + \ldots + \hat{f}_1(k)\cdot y_{k+1} + \hat{f}_0(k)\cdot y_k = \\
&= c_{m+1}(k+1)^{m+1} + c_m(k+1)^m + \ldots + c_1(k+1) + c_0 - \\
&\quad - c_{m+1}k^{m+1} - c_m k^m - \ldots - c_1 k - c_0
\end{aligned} \qquad (12.18)$$

Wenn wir in (12.18) auf der "rechten" Seite der Gleichung alle Klammern auflösen und nach gleichen Potenzen von k sammeln, verschwindet der Koeffizient von k^{m+1}. Der Koeffizient von k^m wird nach dem binomischen Lehrsatz:

$$c_{m+1}\cdot(m+1) + c_m - c_m = c_{m+1}\cdot(m+1)$$

Dieser ist nach der Voraussetzung über den Grad von $g(k)$ von Null verschieden, und wir erkennen, daß (12.18) eine Gleichung der Ordnung $n+1$ mit einer polynomialen Inhomogenität vom Grade m ist, deren Lösungsmenge die Lösungen der ursprünglichen Gleichung enthält.

Wir haben gezeigt, daß die Reduktion des Polynomgrades um 1 die Erhöhung der Ordnung um 1 nach sich zieht. Damit ist Satz 12.1 bewiesen.

Wir können also eine lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit polynomialer Inhomogenität vom Grade r ($r \geq 0$) in eine homogene lineare Gleichung der Ordnung $n+r+1$ umwandeln.

Aufgabe 12.3

Führen Sie den Beweis von Satz 12.1 für den Sonderfall von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten durch.

Entsprechend dem in diesem Paragraphen aufgezeigten Programm, wenden wir uns im folgenden Kapitel, ausgehend von Gleichungen erster Ordnung mit konstanter Inhomogenität, den Gleichungen zweiter Ordnung zu.

Aufgabe 12.4

Homogenisieren Sie die Gleichung

$$f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = h^k \tag{12.19}$$

Anleitung: Multiplizieren Sie die Gleichung mit h durch und verfahren Sie nach dem bisherigen Schema (Laufindex erhöhen).

III LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

§ 13 Die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung (lineare homogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, wird die Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = Ay_k + B \tag{13.1}$$

durch den Prozeß der Homogenisierung in die Gleichung

$$y_{k+2} - (1+A)y_{k+1} - Ay_k = 0, \tag{13.2}$$

also in eine lineare homogene Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten übergeführt. Sie ist ein Spezialfall der Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \tag{13.3}$$

(mit $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$; $a_0 \neq 0$), die im Sinne der Bemerkungen zu Definition 6.2 die allgemeine Form dieses Gleichungstyps darstellt.

Einen wichtigen Sonderfall von (13.3) haben wir bereits im "Treppenbeispiel" aus § 6 kennengelernt. Die Mathematisierung des Problems führte dort auf die rekursive Gleichung

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \tag{13.4}$$

Ersetzt man a_i durch y_i, so geht (13.4) nach geringfügiger Umformung in die Gleichung

$$y_{k+2} - 1 \cdot y_{k+1} - 1 \cdot y_k = 0$$

vom Typ (13.3) über. Man lasse sich nicht dadurch verwirren, daß die Symbole a_i im Treppenbeispiel die Folgenglieder, in (13.3) aber – für $i = 0$ und $i = 1$ – die Koeffizienten der Gleichung darstellen.

Gleichung (13.4) ist nicht zuletzt aus mathematikgeschichtlicher Sicht von großer Bedeutung. Der bekannte italienische Mathematiker Leonardo von Pisa (etwa 1180 - 1250), genannt Fibonacci, leitete sie in seinem Buch "Liber abaci" aus einer Hypothese über die Vermehrung von Kaninchen her. Gleichung (13.4) heißt deshalb auch die Fibonacci-Gleichung; ihre Lösungsfolgen nennt man *Fibonacci-Zahlen*. Diese Zahlen sind sowohl aus zahlentheoretischer als auch aus geometrischer, kombinatorischer und anwendungsorientierter Sicht von großem Interesse. Für ein weitergehendes Studium dieser Zahlen sei auf das Buch "Die Fibonaccischen Zahlen" von N. N. Worobjow verwiesen.

Da die Fibonacci-Gleichung einen wichtigen Sonderfall von (13.3) darstellt, wollen wir die Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \tag{13.5}$$

entsprechend der bisher geübten Praxis nicht nur durch ihre sterile Typisierung, sondern auch kurz als *verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung* bezeichnen.

Aufgabe 13.1

a) Konstruieren Sie einen Algorithmus, mit dem die Glieder der durch (13.5) rekursiv gegebenen Folge, ausgehend von festen Anfangswerten y_0 und y_1, ermittelt werden.

b) Durchlaufen Sie den Algorithmus für die Parameter $a_1 = a_0 = -1$ im "Papier-und-Bleistift"-Verfahren, eventuell auch unter Einsatz eines Taschenrechners.

c) Setzen Sie den Algorithmus in ein Programm für einen programmierbaren Taschenrechner oder einen Tischcomputer um.

Wir halten noch fest, daß in der Lösungsmenge der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung auch die Lösungen der Tilgungsgleichung enthalten sind. Man kann zwar einwenden, daß wir letztere ja sowieso schon kennen, aber erstens stellt ja die Lösung der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung eine wesentlich weitergehende Aufgabe als die Lösung der Tilgungsgleichung dar, und zweitens macht man in der Mathematik häufig die Erfahrung, daß alternative Lösungsmethoden oft ein ganz neues Licht auf vermeintlich völlig gelöste Probleme werfen.

Wenn wir uns nun der Lösung der Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0$$

zuwenden, empfiehlt es sich zunächst, grundsätzliche Strategien des Problemlösens (heuristische Strategien) zu reflektieren. Eine global anwendbare Methode ist die des modularen Vorgehens (vgl.§ 6). Wie können wir im Sinne dieser Methode Gleichung (13.5) in einfachere Bestandteile zerlegen? Da wir homogene Gleichungen erster Ordnung voll beherrschen, versuchen wir die Lösung von (13.5) auf die Lösung mehrerer Gleichungen erster Ordnung zurückzuführen, die den Vorteil besitzen, leichter lösbar zu sein. Wir schreiben (13.5) durch Einschieben zweier sich gegenseitig aufhebender Terme zunächst etwas komplizierter:

$$\underbrace{y_{k+2} + (a_1 + m) y_{k+1}}_{(\mathrm{I})} \quad \underbrace{- m y_{k+1} + a_0 y_k}_{(\mathrm{II})} = 0 \qquad (13.6)$$

Die reelle Zahl m stellt hierbei einen Parameter dar, an dem man noch etwas "drehen" kann. Setzt man die Terme (I) und (II) einzeln gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+2} + (a_1 + m) y_{k+1} &= 0 \\ -m \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.7)$$

Die Lösungen von (13.7) kennen wir; es sind geometrische Folgen. Beliebige Lösungen der Gleichungen (13.7) werden uns im Hinblick auf die Lösung von (13.6) nicht viel nützen. Anders verhält es sich jedoch, wenn es uns gelingt, eine Lösungsfolge zu finden, durch die beide Gleichungen in (13.7) *gleichzeitig* (simultan) gelöst werden. Diese Lösungsfolge macht dann nämlich jeden der beiden Terme (I) und (II) in (13.6) zu Null und stellt somit eine Lösung von (13.6) dar. Wir stehen also vor dem Problem, gemeinsame Lösungen für die Gleichungen in (13.7) zu finden. Jede Lösung einer der beiden Gleichungen wäre insbesondere dann eine gemeinsame Lösung beider Gleichungen, wenn die Gleichungen von vornherein zusammenfallen, das heißt, wenn in (13.7) nur eine Gleichung in verschiedener Schreibweise steht. Dies ist offenbar wiederum genau dann der Fall, wenn die beiden Gleichungen in (13.7) dieselben Koeffizienten besitzen. Um die Koeffizienten vergleichen zu können, formen wir die Gleichungen so um, daß ein direkter Vergleich möglich wird. Wir erhalten für $m \neq 0$, bei gleichzeitiger Erhöhung des Laufindex k in der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= (-a_1 - m)\cdot y_{k+1} \\ y_{k+2} &= \frac{a_0}{m}\cdot y_{k+1} \end{aligned} \tag{13.8}$$

Diese beiden Gleichungen fallen offenbar genau dann zusammen, wenn

$$-a_1 - m = \frac{a_0}{m}\,, \tag{13.9}$$

das heißt, wenn

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{13.10}$$

(13.10) stellt eine quadratische Gleichung in der Variablen m dar. Man nennt sie die *charakteristische Gleichung* und

$$m^2 + a_1\cdot m + a_0$$

das *charakteristische Polynom* der Gleichung (13.5). Man erhält die charakteristische Gleichung aus (13.5) formal einfach dadurch, daß man die Folgenglieder y_{k+i} durch m^i ersetzt.

Wenn wir eine von Null verschiedene Lösung (Wurzel, Nullstelle) m_1 der charakteristischen Gleichung (13.10) kennen, so stellt die geometrische Folge (u_k) mit

$$u_k = \left(\frac{a_0}{m_1}\right)^k = (-a_1 - m_1)^k \tag{13.11}$$

eine Lösung jeder der beiden Gleichungen in (13.8) und somit durch simultanes Einsetzen auch eine Lösung von (13.6) dar. Da (13.6) mit der Ausgangsgleichung (13.5) zusammenfällt, reduziert sich das Problem des Auffindens einer Lösung von (13.5) auf die Lösung der quadratischen Gleichung (13.10). Die in (13.11) in zweifacher Weise dargestellte Lösungsfolge (u_k) ist zwar von nicht sehr komplizierter Gestalt; durch eine kleine Anleihe bei der Schulmathematik läßt sie sich jedoch noch vereinfachen. Die quadratische Gleichung (13.10) besitzt im allgemeinen zwei Lösungen m_1 und m_2, die über die *Wurzelsätze von Vieta* (französischer Mathematiker, 1540 - 1603) folgendermaßen mit den Koeffizienten der Gleichung zusammenhängen:

$$\begin{aligned} m_1\cdot m_2 &= a_0 \\ m_1 + m_2 &= -a_1 \end{aligned} \tag{13.12}$$

Jeder der Terme in (13.9) stellt also die zweite Wurzel m_2 der charakteristischen Gleichung dar, und wir können die Lösung (u_k) einfacher schreiben als:

$$u_k = m_2^{\,k} \tag{13.13}$$

Die beiden Wurzeln m_1 und m_2 der quadratischen Gleichung (13.10) sind jedoch im folgenden Sinne gleichberechtigt: Hätten wir den gesamten Prozeß mit der Lösung m_2 an Stelle von m_1 begonnen, so hätten wir als Lösung von (13.8) und (13.5) - wiederum auf Grund der Wurzelsätze von Vieta - die Folge (v_k) mit

$$v_k = m_1^k \tag{13.14}$$

erhalten.

Wir fassen zusammen:

Satz 13.1

Die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \tag{13.15}$$

besitzt als Lösungen die geometrischen Folgen

$$(m_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (m_2^k)_{k\in\mathbb{N}} ,$$

wobei m_1 und m_2 die Wurzeln der zur Differenzengleichung (13.15) gehörenden charakteristischen Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

sind.

Nach der allgemeinen, bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen besitzen m_1 und m_2 die folgende Gestalt:

$$m_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$$

$$m_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$$

Bemerkungen

1. In der dem obigen Satz vorangehenden Argumentation wurde von den beiden Wurzeln m_1 und m_2 gesprochen. Die Schlüsse bleiben auch dann gültig, wenn m_1 und m_2 zusammenfallen, denn auch für diesen Fall bleiben die Wurzelsätze von Vieta gültig. Wir erhalten dann in Satz 13.1 allerdings nur eine Lösungsfolge.
2. Es kann durchaus vorkommen, daß die Wurzeln m_1 und m_2 der charakteristischen Gleichung komplexe Zahlen sind. Die bisherige Argumentation wird dadurch nicht tangiert. Wir werden allerdings bald Techniken kennenlernen, mit denen man aus den komplexen Lösungsfolgen reelle Lösungen gewinnen kann.

Aufgabe 13.2

Beweisen Sie die Wurzelsätze von Vieta für quadratische Gleichungen.

Aufgabe 13.3

Geben Sie zu den folgenden Differenzengleichungen je zwei Lösungsfolgen an:

a) $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$

b) $y_{k+2} + y_{k+1} - 20y_k = 0$

c) $3y_{k+2} + 13{,}5y_{k+1} + 6y_k = 0$

d) $y_{k+2} + 7y_{k+1} + 4y_k = 0$

e) $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6{,}25y_k = 0$

f) $y_{k+2} - y_k = 0$

g) $y_{k+2} + y_k = 0$

h) $y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 0$

i) $y_{k+2} - (3 + \sqrt{3})y_{k+1} + (2 + 2\sqrt{3})y_k = 0$

§ 14 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung

[14.1] Der allgemeine Fall: nicht konstante Koeffizienten

Im vorigen Paragraphen lenkten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Suche nach irgendwelchen Lösungen der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung. Es ist uns gelungen, stets mindestens eine Lösungsfolge anzugeben. Wir wollen jetzt unser Augenmerk auf die Gesamtheit aller Lösungen von homogenen linearen Differenzengleichungen richten. Dabei orientieren wir uns stark an den Erfahrungen aus § 10 mit der entsprechenden Diskussion im Falle homogener Gleichungen erster Ordnung. Ebenso wie dort stellt man auch im Falle von Gleichungen zweiter Ordnung sehr bald fest, daß für strukturelle Überlegungen die Beschränkung auf den Fall konstanter Koeffizienten unnötig ist. Wir wollen also von vornherein gleich die Lösungsgesamtheit von Gleichungen der Form

$$f_2(k) \cdot y_{k+2} + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = 0$$

betrachten. Die wichtigste strukturelle Kennzeichnung der entsprechenden Gleichung erster Ordnung war die Vektorraum-Eigenschaft der Lösungsmenge. Sie überträgt sich unmittelbar auf die obige Gleichung.

Satz 14.1

> Die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungsfolgen der Gleichung
>
> $$f_2(k) \cdot y_{k+2} + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = 0 \qquad (14.1)$$
>
> ist ein reeller Vektorraum.

Beweis: Die einschlägigen Argumentationen aus § 10 übertragen sich unmittelbar auch auf den Fall der Ordnung 2. Wir führen deshalb hier nur noch einmal in exemplarischer Form den Nachweis der additiven Abgeschlossenheit.

Es seien (a_k) und (b_k) Lösungsfolgen von (14.1). Dann ist:

$$f_2(k)\cdot(a_{k+2}+b_{k+2})+f_1(k)\cdot(a_{k+1}+b_{k+1})+f_0(k)\cdot(a_k+b_k)=$$
$$=f_2(k)\cdot a_{k+2}+f_2(k)\cdot b_{k+2}+f_1(k)\cdot a_{k+1}+$$
$$+f_1(k)\cdot b_{k+1}+f_0(k)\cdot a_k+f_0(k)\cdot b_k=$$
$$=f_2(k)\cdot a_{k+2}+f_1(k)\cdot a_{k+1}+f_0(k)\cdot a_k+$$
$$+f_2(k)\cdot b_{k+2}+f_1(k)\cdot b_{k+1}+f_0(k)\cdot b_k=0+0=0$$

Das heißt, die Summenfolge (a_k+b_k) ist ebenfalls eine Lösung von (14.1).

Auch in diesem Beweis spielt es keine Rolle, daß die Funktionen $f_2(k)$ und $f_0(k)$ stets von Null verschieden sind.

Wir erkennen, daß es im Beweis von Satz 14.1 auf die Ordnung im Grunde genommen nicht ankommt. Alle Beweise übertragen sich unmittelbar auf den Fall linearer homogener Differenzengleichungen von beliebiger Ordnung.

Satz 14.2

Für jede lineare homogene Differenzengleichung beliebiger Ordnung bildet die Menge ihrer Lösungsfolgen stets einen reellen Vektorraum.

Bemerkung

Läßt man auch komplexe Folgen als Lösungen obiger Differenzengleichungen zu, so läßt sich ganz entsprechend zeigen, daß die Lösungsgesamtheit einen Vektorraum über den komplexen Zahlen bildet.

Die Lösungsgesamtheit einer homogenen Gleichung erster Ordnung besteht aus allen reellen Vielfachen einer festen Lösungsfolge; das heißt, sie bildet einen eindimensionalen reellen Vektorraum (vgl. Satz 10.5 und 10.6). Die bisherigen Ergebnisse aus § 13 zeigen bereits, daß dies im Falle zweiter und höherer Ordnung sicher nicht so ist.

Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, daß die beiden mit Hilfe der charakteristischen Gleichung ermittelten Lösungsfolgen der Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2}=y_{k+1}+y_k$$

keine reellen Vielfachen voneinander sind.

Die Lösungsmengen von Gleichungen zweiter und höherer Ordnung sind also reichhaltiger als die von Gleichungen erster Ordnung. Es wird unsere Aufgabe sein, ein geeignetes Maß für die Reichhaltigkeit der Lösungsmenge zu entwickeln.

Kehren wir zunächst zurück zum Fall der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2}+a_1y_{k+1}+a_0y_k=0. \tag{14.2}$$

Hat die charakteristische Gleichung

$$m^2+a_1m+a_0=0$$

die beiden Wurzeln m_1 und m_2, so sind nach § 13

$$(m_1^{\,k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (m_2^{\,k})_{k\in\mathbb{N}}$$

Lösungsfolgen von (14.2). Nach Satz 14.1 ist somit für beliebige reelle Zahlen C_1 und C_2 auch die Folge (w_k) mit

$$w_k = C_1 \cdot m_1^{\,k} + C_2 \cdot m_2^{\,k}$$

eine Lösung von (14.2). In der Terminologie der Addition von Folgen können wir (w_k) auch ausdrücken durch

$$(w_k)_{k\in\mathbb{N}} = C_1 \cdot (m_1^{\,k})_{k\in\mathbb{N}} + C_2 \cdot (m_2^{\,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Man sagt auch: Die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Linearkombination der Folgen $(m_1^{\,k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_2^{\,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Vorgehensweise führt zu folgenden

Definitionen der linearen Algebra

Die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ seien Elemente des reellen Vektorraumes V.

a) Der Vektor $v \in V$ ist eine *Linearkombination* der Vektoren $b_1,\dots$ $\dots, b_n$, falls es reelle Zahlen $r_1,\dots, r_n$ gibt mit der Eigenschaft:

$$v = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n$$

b) Ist jeder Vektor $v \in V$ bei geeigneter Wahl von reellen Zahlen $r_1,\dots, r_n$ als eine solche Linearkombination der Vektoren $b_1,\dots, b_n$ darstellbar, so heißen die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ ein *Erzeugendensystem* des Vektorraumes V. Man sagt dann auch: Die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ spannen den Vektorraum V auf.

c) Die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn der Nullvektor durch $b_1,\dots, b_n$ nur in Form der trivialen Linearkombination mit $r_1 = \dots = r_n = 0$ dargestellt werden kann, das heißt, wenn aus

$$r_1 b_1 + \dots + r_n b_n = 0$$

stets folgt:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

Es gilt der

Satz: Die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ in *eindeutiger Weise* als Linearkombination der Vektoren $b_1,\dots, b_n$ darstellen läßt.

Letzteres soll heißen: Ist

$$v = r_1 \cdot b_1 + \dots + r_n \cdot b_n \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$

und

$$v = s_1 \cdot b_1 + \dots + s_n \cdot b_n \qquad (s_i \in \mathbb{R}),$$

so folgt: $r_1 = s_1,\ r_2 = s_2, \dots, r_n = s_n$.

d) Die Vektoren $b_1,\dots, b_n$ heißen eine *Basis* von V, wenn sie linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V sind.

Wir erwähnen den aus der linearen Algebra wohlbekannten

Satz: Es sei V ein Vektorraum. Dann enthält jede Basis von V dieselbe Anzahl von Vektoren. Diese Zahl ist zugleich die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren des Vektorraumes V.

e) Besteht eine und somit jede Basis des Vektorraumes V aus n Elementen, so nennt man V einen n-*dimensionalen Vektorraum* oder einen Vektorraum der Dimension n über den reellen Zahlen.

Aufgabe 14.2

Beweisen Sie den Satz in Teil c) der vorangehenden Definitionen (Gleichwertigkeit zweier Beschreibungen des Begriffs der linearen Unabhängigkeit).

Beispiel: Der Vektorraum der n-Tupel

Ein reelles n-Tupel ist eine geordnete Liste von reellen Zahlen, meist geschrieben in Spaltenform,

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

gelegentlich auch in Zeilenform: $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Es sei n eine feste natürliche Zahl. Die Addition zweier n-Tupel wird definiert durch:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \\ \vdots \\ r_n + s_n \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation von reellen Zahlen und n-Tupeln ist gegeben durch:

$$r \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot s_1 \\ r \cdot s_2 \\ \vdots \\ r \cdot s_n \end{pmatrix}$$

Mit diesen Verknüpfungen bildet die Menge aller reellen n-Tupel einen reellen Vektorraum über den reellen Zahlen, der mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet wird. Der Vektorraum der n-Tupel hat die Dimension n. Die Standard-Basis dieses Vektorraumes wird gebildet von den n *Einheitsvektoren*:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ b_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $n = 2$ heißt $\mathbb{R}^2$ auch der Vektorraum der Paare reeller Zahlen. Er hat die Dimension 2; Einheitsvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der analytischen Geometrie wird die Ebene durch diesen Vektorraum beschrieben (Abb. 14.1). Da der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Dimension 2 hat,

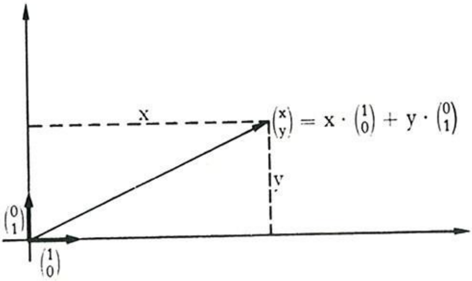


Abb. 14.1

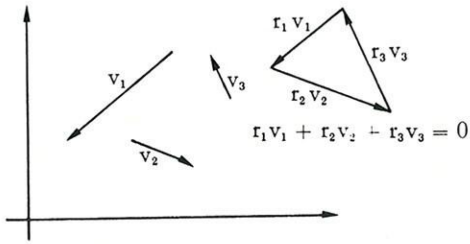


Abb. 14.2

sind je drei Vektoren in der Ebene linear abhängig (Abb. 14.2). Zwei Vektoren in der Ebene sind genau dann linear abhängig, wenn der eine Vektor ein reelles Vielfaches des anderen Vektors ist.

Im folgenden wollen wir die Diskussion wieder für beliebige lineare homogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung führen, also für Gleichungen vom Typ

$$f_2(k) \cdot y_{k+2} + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = 0. \tag{14.3}$$

Das Kriterium "zweite Ordnung" besagt insbesondere, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ $f_2(k) \neq 0$ und $f_0(k) \neq 0$ ist.

Um die Basis-Eigenschaft von Lösungsfolgen von Gleichung (14.3) effektiv diskutieren zu können, benötigen wir noch ein gut überprüfbares Kriterium für die lineare Unabhängigkeit solcher Folgen. Wir richten unser Augenmerk auf den folgenden einfachen, aber wichtigen Gedanken: Jede Lösungsfolge der Gleichung (14.3) ist durch Vorgabe ihrer Anfangswerte y_0 und y_1 vollständig bestimmt, denn alle weiteren Werte berechnen sich sukzessive nach der Formel

$$y_{k+2} = -\frac{f_1(k)}{f_2(k)} \cdot y_{k+1} - \frac{f_0(k)}{f_2(k)} \cdot y_k \tag{14.4}$$

aus diesen Anfangswerten. Ob zwei Lösungsfolgen (u_k) und (v_k) von (14.3) linear unabhängig sind oder nicht, muß sich daher bereits mit Hilfe der Anfangswerte u_0 und u_1 bzw. v_0 und v_1 entscheiden lassen.

Satz 14.3

> Die Lösungsfolgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Gleichung (14.3) sind genau dann linear abhängig, wenn die beiden aus den Anfangswerten gebildeten Paarvektoren $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind (als Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$).

Beweis: Sind (u_k) und (v_k) linear abhängig, so gilt

$$(v_k) = r \cdot (u_k) \qquad \text{für ein geeignetes } r \in \mathbb{R}$$

und somit auch

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot u_0 \\ r\cdot u_1 \end{pmatrix} = r\cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Also sind die Vektoren $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ linear abhängig.

Seien nun andererseits $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ linear abhängig, also etwa $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot u_0 \\ r\cdot u_1 \end{pmatrix}$, dann gilt für v_2 nach (14.4):

$$v_2 = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)}\cdot v_1 - \frac{f_0(0)}{f_2(0)}\cdot v_0 = -\frac{f_1(0)}{f_2(0)}\cdot r\cdot u_1 - \frac{f_0(0)}{f_2(0)}\cdot r\cdot u_0 =$$

$$= r\cdot\left(-\frac{f_1(0)}{f_2(0)}\cdot u_1 - \frac{f_0(0)}{f_2(0)}\cdot u_0\right) = r\cdot u_2$$

Mit vollständiger Induktion folgt für alle k:

$$v_k = r\cdot u_k$$

Das heißt, $(v_k) = r\cdot(u_k)$, und die Folgen (u_k) und (v_k) sind linear abhängig.

Satz 14.3 ermöglicht uns also die Überprüfung der linearen Abhängigkeit zweier Lösungsfolgen anhand nur jeweils zweier Anfangswerte: eine große Erleichterung. Die Paarvektoren $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ sind nämlich genau dann linear abhängig, wenn es eine reelle Zahl $r \neq 0$ gibt mit

$$v_0 = r\cdot u_0$$

und

$$v_1 = r\cdot u_1. \tag{14.5}$$

Dies wiederum ist für $u_0 \neq 0$ und $u_1 \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{v_1}{u_1}$$

gilt. Hieraus folgt schließlich durch eine offensichtliche Umformung:

$$u_0\cdot v_1 = v_0\cdot u_1 \tag{14.6}$$

Die Bedingung (14.6) ist nun aber auch ohne die einschränkende Voraussetzung $u_0 \neq 0$ und $u_1 \neq 0$ zu (14.5) gleichwertig, und wir können formulieren:

Satz 14.4

Die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seien Lösungsfolgen der homogenen Gleichung zweiter Ordnung:

$$f_2(k)\cdot y_{k+2} + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0 \tag{14.7}$$

Dann sind die folgenden Bedingungen paarweise gleichwertig:

a) Die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind linear abhängig.

b) Die Paarvektoren $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

c) $u_0 \cdot v_1 = v_0 \cdot u_1$

Für die linke Seite der zu (14.6) äquivalenten Gleichung

$$u_0 v_1 - u_1 v_0 = 0 \tag{14.8}$$

hat man in der linearen Algebra eine prägnante und verallgemeinerungsfähige Bezeichnungs- und Schreibweise eingeführt. Man schreibt

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = u_0 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_0 \tag{14.9}$$

und nennt $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}$ die zum Schema der quadratischen Matrix $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix}$ gehörende *Determinante*. (Der Begriff Matrix wird hier in nicht formaler Weise als quadratische Tabelle verwendet.) Das Determinantenschema ist besonders deswegen sehr einprägsam, weil die Auswertung der Determinante nach dem folgenden "Kreuzschema" erfolgt:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir Satz 14.4 auch wie folgt formulieren:

Satz 14.5 ("Determinantenkriterium")

Die Lösungsfolgen (u_k) und (v_k) von (14.7) sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Aufgabe 14.3

Überprüfen Sie mit Hilfe des Determinantenkriteriums aus Satz 14.5, ob die von Ihnen in Aufgabe 13.3 gefundenen Lösungsfolgen jeweils linear unabhängig sind oder nicht.

Wir wissen bereits aus Satz 14.1, daß die Lösungsgesamtheit jeder linearen homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung einen reellen Vektorraum bildet. Die Nützlichkeit des Determinantenkriteriums erweist sich an den folgenden Ergebnissen:

Satz 14.6

Die Lösungsgesamtheit der linearen homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$f_2(k) \cdot y_{k+2} + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = 0 \tag{14.10}$$

ist ein reeller Vektorraum der Dimension 2. (Die Voraussetzung hinsichtlich der Ordnung besagt insbesondere, daß $f_2(k)$ und $f_0(k)$ stets von Null verschieden sind.)

Beweis: Durch die Anfangswerte $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $v_0 = 0$ und $v_1 = 1$ sind wegen der sukzessiven Berechenbarkeit aller weiteren Folgenglieder mit Hilfe von (14.4) zwei Folgen (u_k) und (v_k) festgelegt, die nach dem Determinantenkriterium linear unabhängig sind:

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die Dimension der Lösungsgesamtheit ist also mindestens gleich 2. Größer als 2 kann sie aber auch nicht sein, da die lineare Unabhängigkeit der Lösungsfolgen bereits im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der Paare von Anfangswerten entschieden wird und dieser Vektorraum die Dimension 2 hat.

[14.2] Die Lösung der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung (im Falle verschiedener Wurzeln des charakteristischen Polynoms)

Abschließend kehren wir zurück zur Frage nach der Lösungsgesamtheit der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0. \tag{14.11}$$

Nach Satz 14.6 wissen wir, daß ihre Lösungsgesamtheit die Dimension 2 hat. In Satz 13.1 haben wir mit Hilfe der charakteristischen Gleichung bereits zwei Lösungsfolgen gefunden. Die naheliegende Frage, ob und wann diese beiden Lösungen eine Basis des Lösungsraumes darstellen, beantwortet:

Satz 14.7

Die zur verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung (14.11) gehörende charakteristische Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

möge die Wurzeln m_1 und m_2 besitzen. Genau dann sind die Lösungsfolgen

$$(m_1{}^k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (m_2{}^k)_{k\in\mathbb{N}} \tag{14.12}$$

von (14.11) eine Basis der Lösungsgesamtheit, wenn $m_1 \neq m_2$ ist.

Beweis: Die aus den Anfangswerten $m_1{}^0$, $m_1{}^1$, $m_2{}^0$ und $m_2{}^1$ gebildete Determinante lautet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1$$

Das Determinantenkriterium ergibt also lineare Unabhängigkeit für $m_1 \neq m_2$ und lineare Abhängigkeit für $m_1 = m_2$.

Bemerkung: In einer etwas traditionelleren Terminologie nennt man die Basis einer Lösungsgesamtheit einer homogenen Differenzengleichung auch ein *Fundamentalsystem* von Lösungsfolgen.

Jede Lösung der Gleichung (14.11) läßt sich also, mit geeigneten Konstanten C_1 und C_2, in der Form

$$y_k = C_1 m_1{}^k + C_2 m_2{}^k$$

schreiben. Man nennt diese Darstellung in Mißbrauch des bestimmten

Artikels deshalb gelegentlich auch die *"die allgemeine Lösung"* der Gleichung (14.11). In demselben Sinn wird diese Terminologie auch bei inhomogenen Gleichungen und bei Gleichungen höheren Grades verwendet.

Vor uns liegen noch die folgenden Aufgaben:

1. Bestimmung eines Fundamentalsystems der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung im Fall $m_1 = m_2$ (m_1, m_2 sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms).
2. a) Bestimmung eines Fundamentalsystems im Falle einer linearen homogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
   b) Bestimmung reeller Fundamentalsysteme, falls die Koeffizienten der Differenzengleichung reelle Zahlen sind.

Beispiel: Die Fibonacci-Zahlen

Wir sind jetzt in der Lage, das bereits in § 6 vorgestellte Treppenproblem nicht nur durch einen mehr oder weniger vom Himmel fallenden Ansatz (wie dort geschehen), sondern durch systematisches Vorgehen vollständig zu lösen. Die dem Problem zugrundeliegende Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \tag{14.13}$$

hat die charakteristische Gleichung

$$m^2 - m - 1 = 0 \tag{14.14}$$

mit den Lösungen

$$m_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4} = \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})$$

und

$$m_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4} = \frac{1}{2}\,(1-\sqrt{5}).$$

Für die allgemeine Lösung (u_k) der Fibonacci-Gleichung gilt somit:

$$u_k = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k. \tag{14.15}$$

Jede dieser Lösungsfolgen ist durch die Anfangswerte u_0 und u_1 festgelegt. Die Standard-Fibonaccizahlen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ haben die Anfangswerte $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$.

Wir wollen nun die Koeffizienten C_1 und C_2 der allgemeinen Lösung (14.15) so bestimmen, daß mit ihnen gerade die Folge der Standard-Fibonaccizahlen beschrieben wird. Dazu ist notwendig:

$$f_0 = 1 = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$f_1 = 1 = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

Dies läßt sich einfacher schreiben als:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1+\sqrt{5})\cdot C_1 + (1-\sqrt{5})\cdot C_2 = 2$$

Ersetzen von C_2 durch $1 - C_1$ in der zweiten Gleichung führt zu

$$(1+\sqrt{5})C_1 + (1-\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})C_1 = 2,$$

also zu

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Für C_2 folgt:

$$C_2 = 1 - C_1 = \frac{2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Die explizite Form der Standard-Fibonaccizahlen ist also:

$$f_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

beziehungsweise

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right). \tag{14.16}$$

Man vergleiche dies mit (6.2).

Aufgabe 14.4

Jede Lösungsfolge (u_k) der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung ist entweder festgelegt durch die Anfangswerte u_0 und u_1 oder durch die Koeffizienten C_1 und C_2 bei Darstellung von (u_k) durch die Standard-Basis

$$u_k = C_1 \cdot m_1{}^k + C_2 \cdot m_2{}^k$$

(es sei $m_1 \neq m_2$).

Bestimmen Sie C_1 und C_2 so, daß die Folge (u_k) die Anfangswerte u_0 und u_1 hat.

Aufgabe 14.5

Lösen Sie die Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \qquad (\#)$$

durch das Verfahren des Homogenisierens. Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung der homogenisierten Gleichung an und legen Sie dann die Koeffizienten C_1 und C_2 so fest, daß die Lösungsfolge d Gleichung (#) löst und den vorgegebenen Anfangswert y_0 annimmt.

[14.3] Ein Fundamentalsystem der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung im Falle einer Doppelwurzel des charakteristischen Polynoms

Für den Fall, daß die Wurzeln m_1 und m_2 des zur Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \tag{14.17}$$

gehörenden charakteristischen Polynoms

$$m^2 + a_1 \cdot m + a_0 \tag{14.18}$$

zusammenfallen, wenn also

$$m_1 = m_2 = \tilde{m} \tag{14.19}$$

ist, gelten nach den Vietaschen Wurzelsätzen (13.12) die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_0 &= \tilde{m}^2 \\ a_1 &= -2\tilde{m}. \end{aligned} \tag{14.20}$$

Die Differenzengleichung (14.17) kann also auch wie folgt geschrieben werden:

$$y_{k+2} - 2\tilde{m}\cdot y_{k+1} + \tilde{m}^2\cdot y_k = 0 \tag{14.21}$$

oder

$$y_{k+2} = 2\tilde{m}\cdot y_{k+1} - \tilde{m}^2\cdot y_k. \tag{14.22}$$

Um Hinweise auf weitere (neben der bereits aus Satz 14.1 bekannten) Lösungen von (14.21) zu bekommen, tun wir das, was man immer tun kann, wenn man keine bessere Idee hat: Wir lassen entsprechend der empirischen Lösungsmethode den durch (14.22) gegebenen rekursiven Prozeß ausgehend von festen Anfangswerten y_0 und y_1 aus ablaufen und erhalten:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2\tilde{m}\cdot y_1 - \tilde{m}^2\cdot y_0 \\ y_3 &= 2\tilde{m}\cdot y_2 - \tilde{m}^2\cdot y_1 = 2\tilde{m}(2\tilde{m}\cdot y_1 - \tilde{m}^2\cdot y_0) - \tilde{m}^2\cdot y_1 = \\ &= 3\tilde{m}^2\cdot y_1 - 2\tilde{m}^3\cdot y_0 \\ y_4 &= 2\tilde{m}\cdot y_3 - \tilde{m}^2\cdot y_2 = 2\tilde{m}(3\tilde{m}^2\cdot y_1 - 2\tilde{m}^3\cdot y_0) - \tilde{m}^2(2\tilde{m}\cdot y_1 - \tilde{m}^2\cdot y_0) = \\ &= 4\tilde{m}^3\cdot y_1 - 3\tilde{m}^4\cdot y_0 \\ y_5 &= 2\tilde{m}\cdot y_4 - \tilde{m}^2\cdot y_3 = 2\tilde{m}(4\tilde{m}^3\cdot y_1 - 3\tilde{m}^4\cdot y_0) - \tilde{m}^2(3\tilde{m}^2\cdot y_1 - 2\tilde{m}^3\cdot y_0) = \\ &= 5\tilde{m}^4\cdot y_1 - 4\tilde{m}^5\cdot y_0 \end{aligned} \tag{14.23}$$

Diese Entwicklung legt spätestens jetzt die Vermutung

$$y_k = k\cdot\tilde{m}^{k-1}\cdot y_1 - (k-1)\tilde{m}^k\cdot y_0 \tag{14.24}$$

(für $k \geq 2$) nahe. Wir beweisen sie mit vollständiger Induktion. Die Verankerung ist mit (14.23) erbracht. Wir nehmen an, die Aussage sei für alle i mit $2 \leq i \leq r$ richtig und führen den *Induktionsschluß:*

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= 2\tilde{m}\cdot y_r - \tilde{m}^2\cdot y_{r-1} = \\ &= 2\tilde{m}\cdot(r\cdot\tilde{m}^{r-1}\cdot y_1 - (r-1)\cdot\tilde{m}^r\cdot y_0) - \\ &\quad - \tilde{m}^2\cdot((r-1)\cdot\tilde{m}^{r-2}\cdot y_1 - (r-2)\cdot\tilde{m}^{r-1}\cdot y_0) = \\ &= (r+1)\cdot\tilde{m}^r\cdot y_1 - r\cdot\tilde{m}^{r+1}\cdot y_0 \end{aligned}$$

Unsere Vermutung (14.24) hat sich also als richtig erwiesen. Wir nützen sie aus, um eine von $(\tilde{m}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängige Lösung zu finden. Wir brauchen die Anfangswerte y_0 und y_1 dabei nur so zu wählen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \tilde{m} & y_1 \end{vmatrix} \qquad (14.25$$

von Null verschieden wird. Dabei spricht nichts dagegen, wenn wir y_0 und y_1 im Rahmen dieser Vorgabe so einfach wie möglich wählen:

$$y_0 = 0 \ ; \quad y_1 = 1 \qquad (14.26$$

Die Determinante (14.25) nimmt dann den von Null verschiedenen Wert an, und wir haben die zweite Basislösung gefunden:

Satz 14.8

Fallen die Wurzeln m_1 und m_2 des charakteristischen Polynoms der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \qquad (14.27$$

zusammen ($m_1 = m_2 = \tilde{m}$), dann sind die Lösungsfolgen

$$(\tilde{m}^k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (k \cdot \tilde{m}^{k-1})_{k \in \mathbb{N}} \qquad (14.28$$

ein Fundamentalsystem, das heißt eine Basis der Lösungsgesamtheit von (14.27).

Wir sollten derartige allgemeine Aussagen nachträglich noch einmal bewußt auf Sonderfälle abklopfen, denn wir haben uns bisher keine Gedanken darüber gemacht, was passiert, wenn eine der beiden oder sogar beide Wurzeln m_1 und m_2 des charakteristischen Polynoms Null sind.

Wir nehmen zunächst an, daß $m_2 = 0$ ist. Nach den Wurzelsätzen von Vieta (13.12) folgt dann

$$a_0 = 0$$

Bereits in diesem und natürlich erst recht im Falle $m_1 = m_2 = 0$ liegt mit (14.27) gar keine Gleichung der Ordnung 2 vor. Umgekehrt folgt aus der Voraussetzung, daß die Ausgangsgleichung die Ordnung 2 habe: Keine der Lösungen des zugehörigen charakteristischen Polynoms ist Null.

Aufgabe 14.6

a) Geben Sie für die folgende Gleichung ein Fundamentalsystem und die "allgemeine Lösung" an:

$$y_{k+2} - 2 \cdot y_{k+1} + y_k = 0$$

b) Geben Sie für die obige Gleichung eine Lösung mit den Anfangswerten

$$y_0 = 5 \quad \text{und} \quad y_1 = 8$$

an.

Aufgabe 14.7

Die quadratische Gleichung

$$m^2 + a_1 \cdot m + a_0 = 0$$

besitze die Doppelwurzel $m_1 = m_2 = \tilde{m}$. Diskutieren Sie die Frage, ob $\tilde{m}$ eine komplexe (nicht reelle) Zahl sein kann.

Aufgabe 14.8

a) Zeigen Sie: Ist $(m^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösungsfolge einer homogenen linearen Differenzengleichung, so sind es auch die Folgen

$$(m^{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (m^{k-1})_{k\in\mathbb{N}}.$$

b) Die charakteristische Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

der Differenzengleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0$$

besitze die Doppelwurzel $\tilde{m}$. Zeigen Sie: Die Folge

$$(k\tilde{m}^k)$$

ist eine Lösungsfolge der gegebenen Differenzengleichung, und die Folgen

$$(\tilde{m}^k), \ (k \cdot \tilde{m}^k)$$

bilden ein Fundamentalsystem ihrer Lösungsgesamtheit.

§ 15 Komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung

[15.1] Die Problemstellung: komplexe Lösungsfolgen trotz reeller Koeffizienten

Das zur Gleichung

$$y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 0 \tag{15.1}$$

gehörende charakteristische Polynom

$$m^2 + m + 1 \tag{15.2}$$

hat die komplexen Wurzeln

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \ ; \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \, . \tag{15.3}$$

Die allgemeine Lösung von (15.1) hat somit die Form

$$C_1 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})^k + C_2 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})^k \, , \tag{15.4}$$

wobei C_1 und C_2 noch frei wählbare Koeffizienten sind.

Für die Anfangswerte

$$y_0 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = 1$$

sind jedoch alle Glieder der Folge reell, ja sogar ganzzahlig, wie man unmittelbar an dem rekursiven Berechnungsschema

$$y_{k+2} = -y_{k+1} - y_k$$

ablesen kann.

Der in (15.4) dargestellte komplexe Term liefert also bei den obigen Anfangswerten nur reelle Zahlen.

Aufgabe 15.1

Legen Sie in (15.1) die Koeffizienten C_1 und C_2 so fest, daß gerade die Folge mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ entste

Dieser merkwürdige Sachverhalt drängt geradezu die Frage auf, ob es nicht möglich ist, zu der gegebenen verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \tag{15.5}$$

mit reellen Koeffizienten a_0 und a_1 stets auch ein Fundamentalsystem zu finden, das aus reellen Folgen besteht. Falls die Wurzeln m_1 und m_2 des zu (15.5) gehörenden charakteristischen Polynoms zusammenfallen, sind sie zwangsläufig reell; siehe Aufgabe 14.7. Wir können im folgenden daher stets annehmen, daß m_1 und m_2 verschieden sind.

[15.2] Kleiner Exkurs über komplexe Zahlen

Keine reelle Zahl r kommt als Lösung der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \tag{15.6}$$

in Frage. Denn für jede reelle Zahl r ist $r^2 \geqq 0$ und somit

$$r^2 + 1 \geqq 1.$$

Wir führen die formale Schreibfigur $\sqrt{-1}$ ein und vereinbaren, mit diesem Symbol wie folgt zu rechnen:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \tag{15.7}$$

Statt $\sqrt{-1}$ verwendet man auch häufig das Symbol i. (15.7) wird dann zu

$$i \cdot i = i^2 = -1 \tag{15.8}$$

Man nennt i die *imaginäre Einheit*. Durch Kombination mit den reellen Zahlen a und b erhält man die formale Schreibfigur

$$a + bi,$$

die man als eine *komplexe Zahl* bezeichnet. Die Gesamtheit aller dieser Schreibfiguren nennt man die *Menge* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen:*

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \;/\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Man vereinbart weiterhin, daß die Schreibfiguren $a_1 + b_1 \cdot i$ und $a_2 + b_2 \cdot i$ genau dann dieselbe komplexe Zahl darstellen sollen, wenn $a_1 = a_2$ ud $b_1 = b_2$ ist.

In $\mathbb{C}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation in naheliegender Weise durch:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \\ (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

Motivation für diese Definition der Multiplikation ist offenbar das formal distributive Auflösen der Klammern und das Ersetzen von i^2 durch -1.

Gleichung (15.6) besitzt nun in $\mathbb{C}$ die Lösungen i und -i.

Mit den obigen Verknüpfungen bilden die komplexen Zahlen offenbar einen Zahlbereich, in dem man in ähnlicher Weise rechnen kann wie im Bereich der reellen Zahlen.

Ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, so kann man offenbar jede komplexe Zahl $c+di$ durch $a+bi$ dividieren und erhält wieder eine komplexe Zahl:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2},$$

also

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\cdot i. \qquad (15.10)$$

Für $b=0$ wird aus $a+bi$ die reelle Zahl a. In diesem Sinne können die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen angesehen werden. Für $a=0$ wird aus $a+bi$ die komplexe Zahl bi. Komplexe Zahlen der Form $b\cdot i$ bezeichnet man auch als rein imaginär (oder nur als *imaginär*). Die reelle Zahl a wird als der *Realteil*, die Zahl b als der *Imaginärteil* der komplexen Zahl $a+bi$ bezeichnet.

Aufgabe 15.2

Zeigen Sie: Für $b_1 = 0$ und $b_2 = 0$ fallen die in (15.9) definierten Rechenvorschriften für komplexe Zahlen mit den Rechenoperationen für reelle Zahlen zusammen.

Man sagt: Die in (15.9) definierten Verknüpfungen stellen eine *Erweiterung* der von den reellen Zahlen her bekannten Rechenregeln dar; sie sind mit letzteren *verträglich*. Wenn die Erweiterung von Rechenbereichen derartigen Verträglichkeitsbedingungen genügt, sagt man auch, daß die Erweiterung im Sinne des *Permanenzprinzips* vollzogen wurde.

Wir wollen nun die komplexen Zahlen noch aus einer etwas anderen Perspektive betrachten. Wenn wir in etwas umständlicherer, aber sicher zulässiger Schreibweise die Zahl

$$a+bi \quad \text{als} \quad a\cdot 1 + b\cdot i \qquad (15.11)$$

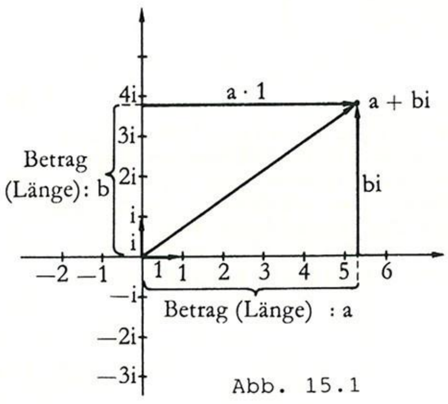


Abb. 15.1

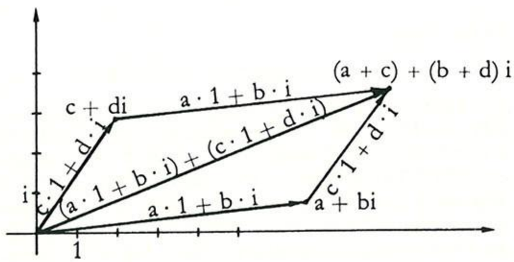


Abb. 15.2

schreiben, so sehen wir, daß sich jede komplexe Zahl in eindeutiger Weise als Linearkombination der komplexen Zahlen 1 und i mit reellen Koeffizienten a und b schreiben läßt. In der Sprechweise der linearen Algebra sind also die komplexen Zahlen ein zweidimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen. Als Standardbasis verwendet man meist die "Vektoren" 1 und i. Die Standardveranschaulichung eines zweidimensionalen reellen Vektorraumes in Form der gewöhnlichen Ebene führt zur Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte der komplexen Zahlenebene (Abbildung 15.1).

Durch diese vektorielle Deutung komplexer Zahlen läßt sich die Addition solcher Zahlen sehr schön als die Addition der entsprechenden Vektoren in der Ebene auffassen. Wir identifizieren hierbei die Punkte der Ebene und ihre Ortsvektoren (Abbildung 15.2).

Im Sinne von Abbildung 15.3 kann der Punkt a + bi aber auch durch den Winkel ϕ und den Abstand r des Punktes vom Ursprung beschrieben werden.

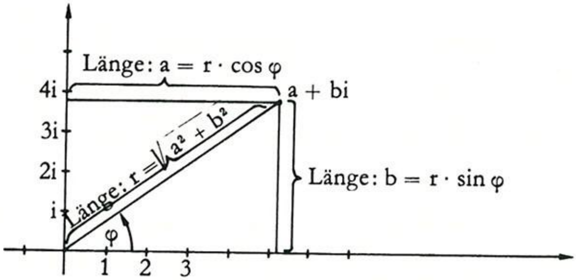


Abb.15.3

Ordnet man den Einheitsvektoren 1 und i jeweils die Länge 1 zu, so ist der Abstand des Punktes a + bi vom Ursprung nach dem Satz von Pythagoras:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{15.12}$$

Unter Verwendung trigonometrischer Funktionen gilt für die Koordinaten a und b:

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cdot\cos\phi \quad\text{bzw.}\quad \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b &= r\cdot\sin\phi \quad\text{bzw.}\quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

Also ist

$$a + bi = r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi). \tag{15.14}$$

Hierbei wurde die aus (15.9) leicht ableitbare Regel "$d\cdot i = i\cdot d$ für alle $d \in \mathbf{R}$" verwendet. Die Darstellung einer komplexen Zahl durch die Parameter r und ϕ im obigen Sinne nennt man auch die Darstellung der Zahl durch *Polarkoordinaten*. Der Winkel ϕ heißt das *Argument*, die (reelle) Zahl r der *Betrag* der komplexen Zahl $r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)$. Diese Darstellung erlaubt die folgende schöne geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen.

Zunächst seien:

$$\left.\begin{aligned} a + bi &= r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) \\ c + di &= r\cdot(\cos\psi + i\cdot\sin\psi) \end{aligned}\right\} \tag{15.15}$$

Dann ist:

$$(a+bi)\cdot(c+di) =$$
$$= r\cdot s\cdot((\cos\phi\cdot\cos\psi - \sin\phi\cdot\sin\psi) + i(\sin\phi\cos\psi + \sin\psi\cos\phi)) \quad (15.16)$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta\\ &\text{und}\\ &\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}\right\} \quad (15.17)$$

erhalten wir aus (15.16) die Gleichung

$$(a+bi)\cdot(c+di) = r\cdot s\cdot(\cos(\phi+\psi) + i\cdot\sin(\phi+\psi)) \quad (15.18)$$

Die letzte Gleichung läßt folgende Interpretation zu: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert (Abbildung 15.4).

Die Multiplikation ist in jedem Zahlbereich zugleich auch die Vorstufe des Potenzierens. Speziell für

$$a+bi = c+di$$

liefert (15.18):

$$(a+bi)^2 = r^2(\cos 2\phi + i\cdot\sin 2\phi),$$

also

$$(r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi))^2 = r^2(\cos 2\phi + i\cdot\sin 2\phi). \quad (15.19)$$

Weiterhin ist

$$(r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi))^3 = r^3(\cos 2\phi + i\cdot\sin 2\phi)(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) =$$
$$= r^3((\cos 2\phi\cos\phi - \sin 2\phi\sin\phi) + i\cdot(\sin 2\phi\cos\phi + \cos 2\phi\sin\phi))$$

und somit nach (15.7):

$$(r(\cos\phi + i\cdot\sin\phi))^3 = r^3\cdot(\cos 3\phi + i\cdot\sin 3\phi) \quad (15.20)$$

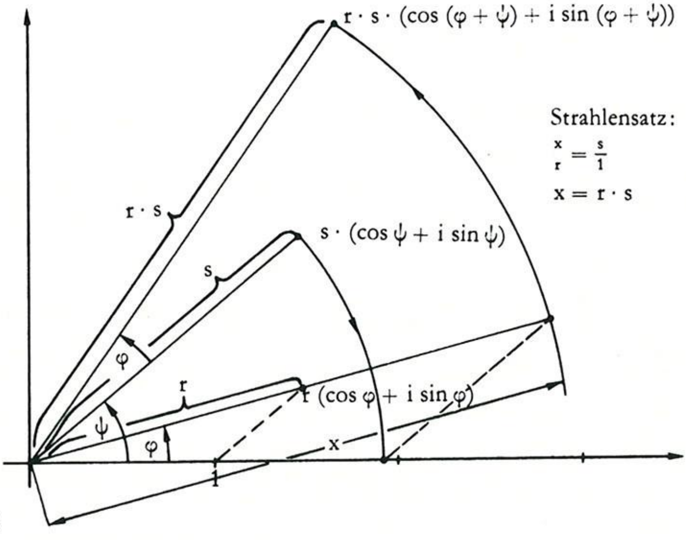


Abb. 15.4

Mit vollständiger Induktion folgt die *Formel von Moivre* (französischer Mathematiker, 1667 - 1754):

$$(r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi))^n = r^n(\cos n\cdot\phi + i\cdot\sin n\cdot\phi) \tag{15.21}$$

Damit möchten wir den Exkurs über komplexe Zahlen beenden. Für weitere interessante Ausführungen über komplexe Zahlen sei auf das lesenswerte Göschen-Bändchen "Elemente der Funktionentheorie" von K. Knopp verwiesen. Wir verlassen diesen Abschnitt jedoch nicht ohne das Zitat des folgenden, für viele Bereiche der Mathematik grundlegenden Satzes:

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

in der Unbestimmten x, mit den reellen oder komplexen Koeffizienten a_i $(i = 0,\ldots, n-1)$ besitzt höchstens n paarweise verschiedene komplexe Nullstellen

$$x_1, x_2,\ldots, x_r \quad (1 \leq r \leq n).$$

Das Polynom p(x) ist durch jeden der Faktoren $(x - x_i)$ teilbar, das heißt, es existiert ein Polynom $q_i(x)$ mit

$$p(x) = (x - x_i)\cdot q_i(x) \qquad (i = 1,\ldots, n).$$

Ist p(x) für $n_i \in \mathbb{N}$ durch $(x - x_i)^{n_i}$, nicht aber durch $(x - x_i)^{n_i+1}$ teilbar, so sagt man: Die Wurzel x_i besitzt die *Vielfachheit* n_i. Berücksichtigt man noch die Vielfachheiten $n_1,\ldots, n_r$ der Wurzeln $x_1,\ldots, x_r$, so gilt:

a) $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

b) Das Polynom p(x) besitzt bei n_i-facher Zählung der Wurzel x_i genau n Wurzeln.

c) $p(x) = (x - x_1)^{n_1}\cdot(x - x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x - x_r)^{n_r}$

[15.3] Die Rückführung komplexer auf reelle Lösungsfolgen

Wie wir am Beispiel (15.1) gesehen haben, kann die Lösung der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung trotz reeller Koeffizienten zu komplexen Lösungsfolgen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, also zu Folgen mit den Gliedern

$$z_k = u_k + iv_k \qquad (u_k, v_k \in \mathbb{R}) \tag{15.22}$$

führen. Auch die gesamten Folgen zerfallen in einen reellen Teil $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und einen imaginären Bestandteil $(i\cdot v_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$(z_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} + (i\cdot v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} + i\cdot(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \tag{15.23}$$

Die beiden Teilfolgen (u_k) und $(i\cdot v_k)$ variieren, grob anschaulich gesprochen, jede für sich gesehen auf der reellen bzw. der imaginären Achse der komplexen Zahlenebene. Dies wirft die Frage auf, ob nicht bereits jede der beiden reellen Folgen (u_k) und (v_k) die Differenzengleichung erfüllt, deren Lösung zunächst in Form der komplexen Folge (z_k) vorlag.

Tatsächlich gilt:

Satz 15.1

Es sei $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Lösungsfolge der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0. \qquad (15.24)$$

Ist für alle $k \in \mathbb{N}$

$$z_k = u_k + i \cdot v_k \qquad (u_k,\ v_k \in \mathbb{R}), \qquad (15.25)$$

so sind auch die reellen Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Lösungsfolgen von (15.24).

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$z_{k+2} + a_1 \cdot z_{k+1} + a_0 \cdot z_k = 0.$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} &(u_{k+2} + i \cdot v_{k+2}) + a_1 \cdot (u_{k+1} + i \cdot v_{k+1}) + a_0 \cdot (u_k + i \cdot v_k) = 0 \\ &(u_{k+2} + a_1 \cdot u_{k+1} + a_0 \cdot u_k) + i \cdot (v_{k+2} + a_1 \cdot v_{k+1} + a_0 \cdot v_k) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15.26)$$

Aus der Definition komplexer Zahlen in Abschnitt [15.2] folgt, daß sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile in (15.26) jeweils für sich Null ergeben müssen, das heißt,

$$u_{k+2} + a_1 \cdot u_{k+1} + a_0 \cdot u_k = 0$$

und

$$v_{k+2} + a_1 \cdot v_{k+1} + a_0 \cdot v_k = 0.$$

Dies wiederum besagt, daß die beiden durch (15.25) gegebenen reellen Folgen (u_k) und (v_k) Lösungen der Gleichung (15.24) sind.

Der vorige Satz läßt sich unmittelbar wie folgt verallgemeinern:

Satz 15.2

Besitzt eine lineare homogene Differenzengleichung beliebiger Ordnung die komplexe Lösungsfolge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_k = u_k + i \cdot v_k \qquad (u_k, v_{k \in \mathbb{N}}),$$

so sind die reellen Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ebenfalls Lösungen der Differenzengleichung.

Kehren wir zurück zur verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung. Ihre charakteristische Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \qquad (15.27)$$

hat die Wurzeln

$$m_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_0} \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_0}\,. \qquad (15.28)$$

Diese sind reell und verschieden für

$$a_1^{\,2} - 4a_0 > 0,$$

komplex und verschieden für

$$a_1^2 - 4a_0 < 0,$$

und sie fallen zusammen für

$$a_1^2 - 4a_0 = 0.$$

Da der Term $a_1^2 - 4a_0$ die Entscheidung über diese Fälle ermöglicht, nennt man ihn auch die *Diskriminante* der Gleichung (15.27) und schreibt:

$$D = a_1^2 - 4a_0 \tag{15.29}$$

Wir haben nun noch den Fall komplexer Wurzeln, also $D < 0$, zu betrachten. Dann ist $(-1)\cdot D > 0$, und wir können die Wurzeln wie folgt schreiben:

$$m_1 = -\frac{a_1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{-D} \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{a_1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{-D} \tag{15.30}$$

Die Wurzeln sind also von der Form

$$m_1 = u + i\,v \quad \text{und} \quad m_2 = u - i\,v, \tag{15.31}$$

mit den reellen Zahlen

$$u = -\frac{a_1}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-D}\,. \tag{15.32}$$

Die komplexen Zahlen m_1 und m_2 in (15.31) besitzen denselben Realteil; ihre Imaginärteile gehen durch Multiplikation mit -1 auseinander hervor. Solche Paare komplexer Zahlen nennt man *konjugiert komplex*. Wir halten fest:

Satz 15.3

Besitzt eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten komplexe Lösungen, so sind diese konjugiert komplex.

Wir können unsere Bemühungen um reelle Lösungsfolgen nach diesen Ausführungen nun zu Ende führen.

Das charakteristische Polynom

$$m^2 + a_1 m + a_0$$

der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung besitze die beiden konjugiert komplexen Wurzeln

$$m_1 = u + i\,v \quad \text{und} \quad m_2 = u - i\,v.$$

Dann bilden die komplexen Folgen

$$(m_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (m_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit. Wir nehmen die Folge $(m_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ unter die Lupe und betrachten die Zerlegung von m_1 in Real- und Imaginärteil:

$$m_1 = u + i\,v = r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) \tag{15.33}$$

mit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$\sin\phi = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad \cos\phi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Auf (15.33) können wir die Formel von Moivre (15.21) anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} m_1{}^k &= r^k \cdot (\cos k\phi + i \cdot \sin k\phi) = \\ &= r^k \cdot \cos k\phi + i \cdot r^k \cdot \sin k\phi. \end{aligned}$$

Nach Satz 15.2 sind auch die reellen Folgen

$$(r^k \cdot \cos k\phi)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (r^k \cdot \sin k\phi)_{k \in \mathbb{N}} \tag{15.34}$$

Lösungsfolgen der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung. Nach dem Determinantenkriterium, Satz 14.4, bilden die beiden Folgen sogar ein Fundamentalsystem, denn

$$\begin{vmatrix} r^0 \cdot \cos 0 & r^0 \cdot \sin 0 \\ r^1 \cdot \cos\phi & r^1 \cdot \sin\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r \cdot \cos\phi & r \cdot \sin\phi \end{vmatrix} = r \cdot \sin\phi .$$

Da m_1 nach Voraussetzung nicht reell und somit insbesondere von Null verschieden ist, sind auch r und $\sin\phi$ ungleich Null, und die Folgen in (15.34) stellen eine Basis der zweidimensionalen Lösungsgesamtheit dar. Da wir durch Linearkombination der Basisvektoren jede Lösung erhalten können, brauchen wir die Folge $(m_2{}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht mehr zu untersuchen. Wir fassen zusammen:

Satz 15.4

Das charakteristische Polynom

$$m^2 + a_1 \cdot m + a_0$$

der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0$$

besitze die konjugiert komplexen Wurzeln

$$m_1 = u + i\,v \quad \text{und} \quad m_2 = u - i\,v.$$

Dann bilden die reellen Folgen

$$(r^k \cdot \cos k\phi)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (r^k \cdot \sin k\phi)_{k \in \mathbb{N}}$$

mit $r = \sqrt{u^2 + v^2}$,

$$\sin\phi = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad \cos\phi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit.

§ 16 Lineare inhomogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung

[16.1] Der allgemeine Fall: nicht konstante Koeffizienten

Nachdem wir in § 14 die Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung

$$f_2(k)\cdot y_{k+2} + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0 \tag{16.1}$$

als zweidimensionalen Vektorraum erkannt haben und im Falle konstanter Koeffizienten sogar eine Basis dieses Vektorraumes angeben können, werden wir uns jetzt den inhomogenen Gleichungen zuwenden:

$$f_2(k)\cdot y_{k+2} + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_0 = g(k) \tag{16.2}$$

Wir orientieren uns bei der folgenden Diskussion stark am entsprechenden Übergang von der homogenen zur inhomogenen Gleichung, wie wir ihn in § 11, insbesondere in Abschnitt [11.3], ausführlich für Differenzengleichungen erster Ordnung entwickelt haben.

Das wesentliche Ergebnis der dortigen Diskussion bestand in der Erkenntnis, daß man die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung bereits dann vollständig kennt, wenn man die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen Gleichung und eine einzige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kennt. Im Falle von Gleichungen zweiter Ordnung gilt entsprechend:

Satz 16.1

a) Die Summe aus einer Lösung $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ der inhomogenen Gleichung (16.2) und einer Lösung $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen homogenen Gleichung (16.1) ist stets eine Lösung der inhomogenen Gleichung (16.2).

b) Es sei $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (feste) Lösung der inhomogenen Gleichung (16.2). Dann läßt sich jede Lösung $(w_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ der inhomogenen Gleichung (16.2) als Summe von $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ mit einer geeigneten Lösung $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen homogenen Gleichung (16.1) darstellen.

Der Beweis dieses Satzes verläuft völlig entsprechend dem aus § 11 bekannten Muster. Die in Teil b) gesuchte Lösung (v_k) der zugehörigen homogenen Gleichung ist natürlich gerade die Differenz der beiden Lösungen der inhomogenen Gleichung:

$$(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k^*)_{k\in\mathbb{N}} - (w_k^*)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Die Annahme, daß sich der Inhalt von Satz 16.1 nicht auf lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung übertrage, wäre ein geradezu unverbesserlicher Pessimismus.

Satz 16.2

Der Inhalt von Satz 16.1 gilt in entsprechend abgewandelter Form für alle linearen Differenzengleichungen beliebiger Ordnung.

Auch der Beweis dieses Satzes verläuft völlig nach dem aus § 11 bekannten Strickmuster.

[16.2] Die Lagerhaltungs-Gleichung (lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität)

L. A. Metzler hat 1941 ein mathematisches Modell für die Beschreibung von Lagerhaltungszyklen entwickelt, auf das wir später im Kapitel über Anwendungen aus dem Wirtschaftsleben eingehen werden. Die Lagerhaltungszyklen werden in diesem Modell durch eine Gleichung der Form

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b \tag{16.3}$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1 und b beschrieben. Wir wollen Gleichung (16.3) nicht durch die in der Überschrift dieses Abschnitts ausgesprochene unhandliche Klassifizierung beschreiben, sondern werden sie im folgenden kurz als die *Lagerhaltungs-Gleichung* bezeichnen.

Aufgabe 16.1

a) Stellen Sie einen Algorithmus zur sukzessiven Berechnung einer Lösung von (16.3) ausgehend von festen Anfangswerten y_0 und y_1 auf.

b) Setzen Sie den Algorithmus in ein Programm um.

Für die Darstellung der Lösungen von (16.3) in geschlossener Form benötigen wir nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes nur eine einzige Lösung der inhomogenen Gleichung, denn die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen Gleichung kennen wir aus § 14. Zur Gewinnung dieser speziellen Lösung sollten wir uns an die Techniken aus § 11, besonders Abschnitt [11.3], erinnern. Für die Tilgungsgleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B$$

erhielten wir im Falle $A \neq 1$ eine spezielle Lösung sehr leicht in Form der konstanten Lösung $y_k = \frac{B}{1-A}$. Falls es für (16.3) eine konstante Lösung $y_k = c$ gibt, muß sie offensichtlich der Bedingung

$$c + a_1 \cdot c + a_0 \cdot c = b$$

genügen. Dies ist für $1 + a_0 + a_1 \neq 0$ erfüllbar, und wir erhalten:

$$c = \frac{b}{1 + a_0 + a_1}$$

Satz 16.3

> Die Lagerhaltungs-Gleichung
>
> $$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b \tag{16.4}$$
>
> besitzt für $1 + a_0 + a_1 \neq 0$ die konstante Lösung $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ mit
>
> $$y_k^* = \frac{b}{1 + a_0 + a_1} \tag{16.5}$$

Die Suche nach speziellen Lösungen der Lagerhaltungs-Gleichung für den Fall

$$1 + a_0 + a_1 = 0 \tag{16.6}$$

werden wir in einem allgemeineren Rahmen durchführen.

IV DER AUSBAU INDUKTIVER TECHNIKEN ZUR BEHANDLUNG VON LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

§ 17 Die Lösungsgesamtheit linearer homogener Differenzengleichungen beliebig hoher Ordnung

Aus Satz 14.2 wissen wir bereits, daß die Lösungsgesamtheit der homogenen linearen Differenzengleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \ldots + a_2 \cdot y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \tag{17.1}$$

stets einen reellen Vektorraum bildet. Wir werden uns nun der Frage zuwenden, welche Dimension dieser Vektorraum besitzt und wie man eine Basis dieses Vektorraumes erhält. Die Verankerung der dabei angewandten induktiven Vorgehensweise ist in Kapitel III erfolgt. Wir werden uns im folgenden stark an die dort entwickelten Techniken anlehnen und uns gelegentlich auch auf eine exemplarische Vorgehensweise beschränken.

An der folgenden geringfügigen Umstellung von Gleichung (17.1)

$$y_{k+n} = -a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} - \ldots - a_2 \cdot y_{k+2} - a_1 \cdot y_{k+1} - a_0 \cdot y_k \tag{17.2}$$

erkennen wir, daß jede ihrer Lösungsfolgen bereits vollständig durch die Vorgabe der n Anfangswerte $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ bestimmt ist. Durch Deutung dieses n-Tupels als Spaltenvektor im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

läßt sich die Diskussion der linearen Unabhängigkeit von Lösungsfolgen der Gleichung (17.1) zurückführen auf die lineare Unabhängigkeit im Raume der reellen n-Tupel. Wir erkennen deshalb sofort, daß die Dimension des Lösungsraumes von (17.1) höchstens gleich n sein kann. Im Hinblick auf die Suche nach einer Basis der Lösungsgesamtheit benötigen wir zunächst noch Kriterien für die lineare Unabhängigkeit der Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

[17.1] Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Wir werden im folgenden die Frage diskutieren, wann die p Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \; v_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ a_{3p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

des n-dimensionalen reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Eine notwendige Bedingung dafür ist sicher, daß $p \leq n$ ist. Das Kriterium, das wir erarbeiten wollen, ermöglicht jedoch unabhängig von dieser Voraussetzung für jedes natürliche p die Entscheidung darüber, ob lineare Unabhängigkeit vorliegt oder nicht. Da das zu erarbeitende Entscheidungsverfahren auch noch andere Aufgaben löst, wollen wir den Kontext nicht unnötig einschränken und setzen nur voraus, daß p eine natürliche Zahl ist.

Die Vektoren $v_1, \dots, v_p$ sind genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur trivial aus ihnen kombinierbar ist, wenn also aus

$$r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + \dots + r_p \cdot v_p = 0, \quad (r_i \in \mathbb{R}) \tag{17.4}$$

stets folgt:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_p = 0$$

In die Komponentenschreibweise übertragen, lautet (17.4):

$$\left.\begin{array}{l} r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + \dots + r_p a_{1p} = 0 \\ r_1 a_{21} + r_2 a_{22} + \dots + r_p a_{2p} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_1 a_{n1} + r_2 a_{n2} + \dots + r_p a_{np} = 0 \end{array}\right\} \tag{17.5}$$

Eine kleine Änderung des Blickwinkels wird sich als nützlich erweisen: (17.5) kann als Versuch angesehen werden, zu vorgegebenen Koeffizienten a_{ij} reelle Zahlen $r_1, \dots, r_p$ mit den dort angegebenen Eigenschaften zu finden. In diesem Sinne stellt (17.5) ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $r_1, \dots, r_p$ und den Koeffizienten a_{ij} $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, p)$ dar.

Eine Lösung dieses Gleichungssystems existiert stets, nämlich

$$r_1 = r_2 = \dots = r_p = 0 \tag{17.6}$$

Die Tatsache, daß nur diese "triviale" Lösung existiert, ist offenbar gleichwertig dazu, daß die Vektoren $v_1, \dots, v_p$ aus (17.3) linear unabhängig sind.

Die Frage nach der linearen Unabhängigkeit von Vektoren hat uns also zum umfassenderen Problem der Lösung eines linearen Gleichungssystems geführt. Da diese Aufgabe von großem eigenständigem Interesse ist, wollen wir uns ihr im folgenden Abschnitt zuwenden.

[17.2] Lineare Gleichungssysteme

Auch das aus der besonderen Fragestellung des vorigen Abschnitts entstandene Gleichungssystem (17.5) ist noch unnötig speziell. Es bereitet nur wenig mehr Mühe, von vornherein das nachstehende allgemeinere Gleichungssystem (17.7) zu behandeln. Die Unbekannten, die im Abschnitt [17.1] mit r_i bezeichnet sind, nennen wir jetzt x_i, wie es im Zusammenhang mit Gleichungssystemen gebräuchlicher ist.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right\} \tag{17.7}$$

Die Koeffizienten b_i seien dabei - wie die a_{ij} - fest vorgegebene reelle Zahlen. Sind alle b_i $(i = 1,\dots, n)$ Null, so nennt man das Gleichungssystem *homogen*; andernfalls ist es *inhomogen*. Während homogene lineare Gleichungssysteme stets eine, nämlich zumindest die triviale Lösung besitzen, können inhomogene Systeme durchaus auch unlösbar sein, wie z. B. das folgende Minisystem $(n = p = 1)$ zeigt:

$$a_{11}x_1 = b_1 \quad \text{mit} \quad a_{11} = 0 \quad \text{und} \quad b_1 = 1$$

Das im folgenden vorgestellte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme wird als *Gaußscher Algorithmus* bezeichnet. Ziel dieses Verfahrens ist es, das System (17.7) in ein gleichwertiges, gestaffeltes System von der folgenden Form überzuführen:

$$\left.\begin{array}{rl}
a^*_{11}x_1 + a^*_{12}x_2 + \dots + a^*_{1,p-1}x_{p-1} + a^*_{1p}x_p &= b^*_1 \\
a^*_{22}x_2 + \dots + a^*_{2,p-1}x_{p-1} + a^*_{2p}x_p &= b^*_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a^*_{p-1,p-1}x_{p-1} + a^*_{p-1,p}x_p &= b^*_{p-1} \\
a^*_{pp}x_p &= b^*_p
\end{array}\right\} \qquad (17.8)$$

Die geforderte Gleichwertigkeit beider Systeme bedeutet dabei, daß sie dieselben Lösungen besitzen müssen. Ist die Überführung von (17.7) in (17.8) gelungen und sind die neuen Koeffizienten a^*_{ii} $(i = 1,\dots, p)$ von Null verschieden, so lassen sich die Lösungen x_i wie folgt von "unten nach oben" aus (17.8) ermitteln:

$$\left.\begin{array}{rl}
x_p &= \dfrac{b^*_p}{a^*_{pp}} \\[2ex]
x_{p-1} &= \dfrac{1}{a^*_{p-1,p-1}}(b^*_{p-1} - a^*_{p-1,p}x_p) \\
\dots\dots\dots\dots & \\
x_2 &= \dfrac{1}{a^*_{22}}(b^*_2 - a^*_{23}x_3 - a^*_{24}x_4 - \dots - a^*_{2p}x_p) \\[2ex]
x_1 &= \dfrac{1}{a^*_{11}}(b^*_1 - a^*_{12}x_2 - a^*_{13}x_3 - \dots - a^*_{1p}x_p)
\end{array}\right\} \qquad (17.9)$$

Die Unlösbarkeit des Systems (17.7) muß also dadurch zum Ausdruck kommen, daß eine Überführung des Gleichungssystems in die Form (17.8) nicht möglich ist. Auch die Existenz mehrdeutiger Lösungen muß sich an der endgültigen Form des gestaffelten Gleichungssystems ablesen lassen.

Die entscheidende Bedingung bei der im allgemeinen in mehreren Stufen durchzuführenden Überführung von (17.7) in ein gestaffeltes System ist, daß die Lösungsmenge des Gesamtsystems durch keinen der Umformungsschritte verändert wird. Wie bereits aus der elementaren Gleichungslehre bekannt ist, erfüllen die folgenden Umformungen diese Voraussetzung:

ZU1 Erste zulässige Zeilenumformung: Multiplikation aller Koeffizienten einer Zeile mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl

ZU2 Zweite zulässige Zeilenumformung: Addition aller Koeffizienten einer Zeile zu den entsprechenden Koeffizienten einer anderen Zeile

ZU3 Dritte zulässige Zeilenumformung: Austausch zweier Zeilen

Kombination von ZU1 und ZU2 ergibt die folgende häufig angewandte zulässige Zeilenoperation:

ZU4 Addition eines reellen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Schließlich ist noch klar, daß man Zeilen weglassen kann, in denen alle Koeffizienten (einschließlich der rechten Seite) gleich Null sind.

Der besseren Übersichtlichkeit halber werden die Spaltenvektoren aus (17.3) bzw. die Koeffizienten a_{ij} aus (17.7) häufig in folgendem rechteckigem Tabellenschema zusammengefaßt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{17.10}$$

Ein derartiges rechteckiges Tabellenschema bezeichnet man als eine $n \times p$-*Matrix* (lies: n-mal-p-Matrix). Sind die Eintragungen a_{ij} der Matrix etwa wie in unserem Fall Koeffizienten eines Gleichungssystems, so bezeichnet man die Matrix A als die *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems. Die Elemente a_{ij} mit $j = 1, \ldots, p$ bezeichnet man als die i-te Zeile, die Elemente a_{ij} mit $i = 1, \ldots, n$ als die j-te Spalte der Matrix A bzw. des zugehörigen Gleichungssystems.

Stellt man die Unbekannten $x_1, \ldots, x_p$ in Form eines Spaltenvektors

$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ und die Koeffizienten b_i der rechten Seite von (17.7)

als Spaltenvektor $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dar, so läßt sich für den Kenner der Matrizenmultiplikation das Gleichungssystem (17.7) kurz in der Form

$$A \cdot w = u \tag{17.11}$$

schreiben. Wir werden die Matrizenmultiplikation im folgenden jedoch nicht verwenden.

[17.3] Die Grundzüge des Gaußschen Algorithmus

Ausgehend vom Gleichungssystem (17.7) versuchen wir, die Koeffizienten a_{i1} der "Anfangsspalte" mit Ausnahme von a_{11} zu Null zu machen. Dabei können die folgenden Fälle auftreten:

Fall 1: $a_{11} \neq 0$. Dann erreichen wir das obige Ziel durch Subtraktion des $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fachen der ersten Zeile von der i-ten Zeile (für $i \geq 2$).

Fall 2: $a_{11} = 0$.

Fall 2.1: Es gibt in der ersten Spalte einen Koeffizienten a_{k1}, der von Null verschieden ist. Dann erreicht man das gesteckte Ziel durch Tausch der ersten mit der k-ten Zeile und anschließendes Verfahren wie im Fall 1.

Fall 2.2: Alle Koeffizienten der ersten Spalte sind Null. Dann ist das gesteckte Ziel der Staffelung des Gleichungssystems im Hinblick auf die erste Spalte bereits erreicht.

Die Elimination der ersten Variablen x_1 aus den Gleichungen $2,\dots,n$ ist nun erreicht. In den Fällen 1 und 2.1 wird sich x_1 entsprechend dem Schema (17.9) eindeutig berechnen lassen. Im Falle 2.2 lautet die erste Zeile des gestaffelten Systems:

$$0\cdot x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \tag{17.12}$$

Entsprechend der Vorgehensweise in der ersten Spalte versuchen wir in diesem Fall, alle in der zweiten Spalte unter a_{12} stehenden Koeffizienten a_{i2} $(i \geq 2)$ zu Null zu machen. Hierbei können, entsprechend der Vorgehensweise bei der ersten Spalte, wiederum die folgenden Fälle auftreten:

Fall 2.2.1: $a_{12} \neq 0$.

Fall 2.2.2: $a_{12} = 0$.

Fall 2.2.2.1: Es gibt in der zweiten Spalte einen Koeffizienten a_{k2} der von Null verschieden ist.

Fall 2.2.2.2: Alle Koeffizienten der zweiten Spalte sind Null.

In den Fällen 2.2.1 bzw. 2.2.2.1 wird das Ziel der Staffelung des Gleichungssystems durch entsprechendes Vorgehen wie in den Fällen 1 bzw. 2.1 erreicht. Im Falle 2.2.2.2 war zusätzlich zur ersten Spalte von vornherein auch bereits die zweite Spalte gleich Null; das heißt, die ersten beiden Spalten hatten bereits zu Beginn des Verfahrens die gewünschte Staffelungsform. In diesem Falle fahren wir mit dem Koeffizienten a_{13} fort und versuchen, die dritte Spalte unterhalb von a_{13} zu Null zu machen. Ist bereits die ganze dritte Spalte gleich Null, so fahren wir bei der vierten, fünften, ..., p-ten Spalte fort. Bei diesem Durchsuchen der ersten Zeile können nun im wesentlichen zwei Fälle auftreten:

Fall 3: Es gibt unter den p Spalten eine Spalte mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten. Es sei s der kleinste Spaltenindex, für den dies zutrifft $(1 \leq s \leq p)$. Durch eventuell notwendigen Zeilentausch kann man stets erreichen, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit a^*_{1s} von Null verschieden ist.

Dieses Element a^*_{1s} nennen wir den *Zeilenführer* der ersten Zeile, die nun folgende Gestalt hat:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \dots + 0\cdot x_{s-1} + a^*_{1s}x_s + \dots + a^*_{1p}x_p = b^*_1 \tag{17.13}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich bei Vorlage der Lösungswerte x_{s+1}, $x_{s+2},\dots,x_p$ der Wert von x_s eindeutig berechnen durch:

$$x_s = \frac{1}{a^*_{1s}}(b^*_1 - a^*_{1,s+1}x_{s+1} - \dots - a^*_{1p}x_p) \tag{17.14}$$

Fall 4: Es gibt unter den p Spalten keine Spalte mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten. Das Gleichungssystem nimmt dann die folgende pathologische Gestalt an:

$$\begin{aligned}
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_p &= b_1 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_p &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_p &= b_n
\end{aligned}$$

Fall 4.1: Sind zusätzlich noch alle b_i $(i = 1, \ldots, n)$ gleich Null, so wird das Gleichungssystem durch jede beliebige Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_p$ gelöst.

Fall 4.2: Ist mindestens eines der b_i von Null verschieden, so ist die entsprechende Zeile und somit das ganze Gleichungssystem durch keine Belegung der x_i lösbar.

Im Fall 4 ist die Behandlung des Gleichungssystems bereits nach Durchgang der ersten Zeile abgeschlossen.

Es ist im folgenden noch die Fortsetzung des Verfahrens im Anschluß an Fall 3 zu beschreiben. Im Fall 3 wurde der definitionsgemäß von Null verschiedene Zeilenführer a^*_{1s} der ersten Zeile ermittelt. Wir wollen der konsequenten Bezeichnungsweise wegen im folgenden s_1 statt s und somit $a^*_{1s_1}$ statt a^*_{1s} schreiben.

In sinngemäßer Fortsetzung des Verfahrens werden nun die weiteren Zeilenführer $a^*_{2s_2}, a^*_{3s_3}, \ldots, a^*_{zs_z}$ ermittelt. Dabei ist darauf zu achten, daß die vorangegangene "Ausnullung" der ersten Spalten nicht wieder zerstört wird. Bei der Suche nach dem Zeilenführer der Zeile z kommen deshalb für einen etwaigen Zeilentausch nur noch die Zeilen $z+1, z+2, \ldots, n$, nicht jedoch die vorangehenden Zeilen $1, 2, \ldots, z-1$ in Frage. Die Ermittlung der Zeilenführer ist beendet, wenn, etwa in der Zeile m, der Spaltenindex s_m den maximalen Wert p oder wenn der Zeilenindex z den maximalen Wert n erreicht hat.

Auf Grund der obigen Vorgehensweise ergibt sich

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_z < \ldots < s_m$$

mit $m \leq p$. Im allgemeinen werden sich die s_i dabei nicht immer um den Wert 1 unterscheiden, wie es bei eindeutig lösbaren Gleichungssystemen stets der Fall ist.

Das lösungsneutral veränderte Gleichungssystem nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{lllll}
a^*_{1s_1} x_{s_1} + a^*_{1,s_1+1} x_{s_1+1} & + \ldots + & a^*_{1p} x_p & = & b^*_1 \\
\qquad\qquad a^*_{2s_2} x_{s_2} & + \ldots + & a^*_{2p} x_p & = & b^*_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
\qquad\qquad a^*_{zs_z} x_{s_z} & + \ldots + & a^*_{zp} x_p & = & b^*_z \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
\qquad\qquad a^*_{ms_m} x_{s_m} & + \ldots + & a^*_{mp} x_p & = & b^*_m \\
0 \cdot x_1 + \quad \ldots & & + 0 \cdot x_p & = & b^*_{m+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 \cdot x_1 + \quad \ldots & & + 0 \cdot x_p & = & b^*_n
\end{array}\right\} \qquad (17.15)$$

Als letzter Teil der Gesamtaufgabe bleibt noch die Auswertung des Gleichungssystems (17.15). Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Systems ist offenbar

$$b^*_{m+1} = b^*_{m+2} = \ldots = b^*_n = 0,$$

wobei m vereinbarungsgemäß das Maximum derjenigen Zeilenindices ist, in deren Zeilen ein Zeilenführer existiert.

Falls das Gleichungssystem lösbar ist, können die Lösungen nun von x_p bis x_1 rückwärts fortschreitend wie folgt ermittelt werden: Die Variablen, die keinem Zeilenführer zugeordnet sind, können frei mit beliebigen Werten belegt werden. Man bezeichnet sie deshalb in diesem Zusammenhang auch als freie Variable.

Im System (17.15) sind dies zunächst die Variablen

$$x_{s_m+1}, \ldots, x_p.$$

Der Wert von x_{s_m} ist dann zwangsläufig durch die Gleichung

$$x_{s_m} = \frac{1}{a^*_{ms_m}} (b^*_m - a^*_{m,s_m+1} \cdot x_{s_m+1} - \ldots - a^*_{mp} x_p)$$

festgelegt. Danach sind die freien Variablen

$$x_{s_{m-1}+1}, \ldots, x_{s_m-1}$$

mit beliebigen Werten zu belegen und $x_{s_{m-1}}$ aus Zeile $m-1$ zu bestimmen. Allgemein erfolgt die Berechnung der unfreien Variablen x_{s_z} in Zeile z nach Berechnung bzw. Festlegung der Variablen x_{s_z+1}, ..., x_p durch:

$$x_{s_z} = \frac{1}{a^*_{zs_z}} (b^*_z - a^*_{z,s_z+1} \cdot x_{s_z+1} - \ldots - a^*_{zp} x_p) \qquad (17.16)$$

Der Auswertungsprozeß und damit der gesamte Gaußsche Algorithmus ist beendet, wenn der Wert der Variablen x_1 berechnet bzw. festgelegt ist.

Wir fassen zusammen:

Satz 17.1

Das lineare Gleichungssystem (17.7), bestehend aus n Gleichungen in p Unbekannten, ist genau dann lösbar, wenn im lösungsneutral veränderten gleichwertigen gestaffelten System (17.15) die Koeffizienten

$$b^*_{m+1}, \ldots, b^*_n$$

gleich Null sind. Dabei ist m der maximale Zeilenindex, in dessen Zeile noch ein Zeilenführer existiert.

Im Falle der Lösbarkeit des Gleichungssystems erhält man die Lösungen $x_1, \ldots, x_p$

a) bei einer freien Variablen x_i durch Einsetzen eines beliebigen Wertes für x_i,

b) andernfalls entsprechend dem Berechnungsschema (17.16) mit i an Stelle von s_z.

Insgesamt gibt es $p - m$ freie Variable, für die beliebige Werte eingesetzt werden können. Man formuliert diesen Sachverhalt auch durch die Sprechweise: Die Lösungsschar des Gleichungssystems ist $(p-m)$-parametrig. Im Hinblick auf die eingangs gestellte Frage erhalten wir das Ergebnis:

Satz 17.2

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ in (17.3) sind genau dann linear unabhängig, wenn das lineare Gleichungssystem (17.15) nur die triviale Lösung

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 0$$

besitzt. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn das Gleichungssystem nach Überführung in ein gleichwertiges gestaffeltes System die folgende Form annimmt:

$$\left.\begin{array}{rcl} a^*_{11}r_1 + a^*_{12}r_2 + \ldots + a^*_{1p}r_p &=& 0 \\ a^*_{22}r_2 + \ldots + a^*_{2p}r_p &=& 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ a^*_{pp}r_p &=& 0 \end{array}\right\} \qquad (17.17)$$

wobei die Koeffizienten a^*_{ii} $(i = 1, \ldots, p)$ alle von Null verschieden sind.

Aufgabe 17.1

Gegeben seien die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}; \; v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}; \; v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \; v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Entscheiden Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind oder nicht.

b) Geben Sie alle Lösungen $x_1, \ldots, x_5$ des Gleichungssystems

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5 = 0$$

an, wobei rechts der Nullvektor gemeint ist.

Aufgabe 17.2

Zeigen Sie: Die Lösungsgesamtheit eines homogenen linearen Gleichungssystems bildet stets einen reellen Vektorraum.

Bemerkung

Die Grundidee des Gaußschen Algorithmus besteht darin, durch die Staffelungsform des Gleichungssystems die Variablen in aufeinanderfolgenden Gleichungen so zu eliminieren, daß die Auswertung des modifizierten Systems leicht möglich wird. Obwohl dieses Grundprinzip des Verfahrens von unmittelbar einleuchtender Natur ist, erweist sich der Algorithmus wegen der vielen möglichen Fallunterscheidungen dennoch als relativ komplex. Wir haben bei der vorangehenden Schilderung des Algorithmus deshalb eine nur teilweise formalisierte Darstellungsform gewählt. Den an einer noch stärker formalisierten Darstellungsform interessierten Leser verweisen wir auf das Computerprogramm auf den folgenden vier Seiten.

PASCAL-Programm zur Lösung linearer Gleichungssysteme nach dem Verfahren des Gaußschen Algorithmus

```
PROGRAM LINEARESGLEICHUNGSSYSTEM;

  CONST VARMAX=10;  ERWMAX=11;  GLMAX=10;

    (* BEDEUTUNG DER KONSTANTEN:                                         *
    (*    VARMAX: MAXIMALZAHL DER VARIABLEN                              *
    (*    ERWMAX: MAXIMALE SPALTENZAHL DER ERWEITERTEN MATRIX            *
    (*    GLMAX:  MAXIMALZAHL DER GLEICHUNGEN                            *
    (* BEMERKUNG: DIESES KONSTANTEN KOENNEN AUCH VERAENDERT              *
    (*    WERDEN.  DABEI MUSS ABER STETS                                 *
    (*              ERWMAX  = VARMAX + 1                                 *
    (*    GELTEN.                                                        *

  VAR N,P,I,ZRANG: INTEGER;
    A: ARRAY[1..VARMAX, 1..ERWMAX] OF REAL;
    X: ARRAY[1..VARMAX] OF REAL;
    FREI: ARRAY[1..VARMAX] OF BOOLEAN;
    ZEILE: ARRAY[1..VARMAX] OF INTEGER;

    (* BEDEUTUNG DER GLOBALEN VARIABLEN:                                 *)
    (*    N: ANZAHL DER GLEICHUNGEN                                      *)
    (*    P: ANZAHL DER VARIABLEN                                        *)
    (*    I: LAUFINDEX                                                   *)
    (*    ZRANG: ZEILENRANG DER KOEFFIZIENTENMATRIX DES                  *)
    (*           HOMOGENENEN SYSTEMS                                     *)
    (*    A:  ERWEITERTE KOEFFIZIENTENMATRIX                             *)
    (*    X:  FORMVARIABLE (UNBEKANNTE) DES GLEICHUNGSSYSTEMS            *)
    (*    FREI[I]:  INDIKATOR DER ANZEIGT, OB DIE I-TE VARIABLE          *)
    (*              X[I] FREI IST ODER NICHT                             *)
    (*    ZEILE[I]:  FALLS DIE VARIABLE  X[I]  NICHT FREI IST,           *)
    (*       SO GIBT ZEILE[I] AN, IN WELCHER ZEILE X[I]                  *)
    (*       AUSZUWERTEN IST; D.H. IN WELCHER ZEILE DAS ZU X[I]          *)
    (*       GEHOERENDE PIVOTELEMENT  A[Z,I] STEHT.                      *)

PROCEDURE KOEFFIZIENTENEINGABE(N,P: INTEGER);
  VAR I,J,K: INTEGER;
  BEGIN
    FOR I:=1 TO N DO
      FOR J:=1 TO P+1 DO
        BEGIN
          FOR K:=1 TO J DO WRITE(' ');
          WRITE('A[',I:2,',',J:2,'] = ');
          READLN(A[I,J]);
          FOR K:=1 TO J DO WRITE(' ');
          WRITELN(A[I,J]:10:2,'      ',A[I,J])
        END
  END;

PROCEDURE MATRIXAUSGABE(N,P: INTEGER);
  VAR I,J,K: INTEGER;
  BEGIN
    WRITELN;  WRITELN('KOEFFIZIENTENMATRIX');  WRITELN;
    FOR I:=1 TO N DO
      FOR J:=1 TO P+1 DO
        BEGIN
          FOR K:=1 TO J DO WRITE('    ');
          WRITELN(A[I,J]:10:2,'              ',A[I,J])
        END
  END;
```

```
PROCEDURE PIVOTSUCHE(Z,S: INTEGER; VAR PIZ: INTEGER);
  VAR K: INTEGER;
  BEGIN
    PIZ:=Z;
    IF Z < N THEN FOR K:=Z+1 TO N DO
      IF ABS(A[K,S]) > ABS(A[PIZ,S]) THEN PIZ:=K
  END;

PROCEDURE  ZEILENFUEHRER(Z :INTEGER; VAR S,PIZ: INTEGER);
  BEGIN
    REPEAT
      S:=S+1;
      PIVOTSUCHE(Z,S,PIZ)
    UNTIL (A[PIZ,S] <> 0)  OR  (S=P)
  END;

PROCEDURE  ZEILENTAUSCH(Z,S,PIZ: INTEGER);
  VAR K: INTEGER;
      B: REAL;
  BEGIN
    IF (PIZ <> Z) AND (A[PIZ,S] <> 0) THEN
      BEGIN
        FOR K:=S TO P+1 DO
          BEGIN
            B:=A[Z,K];
            A[Z,K]:=A[PIZ,K];
            A[PIZ,K]:=B
          END;
        WRITELN; WRITELN;
        WRITELN('ZEILENTAUSCH: ZEILE ', Z:2,
                                     ' GETAUSCHT MIT ZEILE', PIZ:2);
        MATRIXAUSGABE(N,P)
      END
  END;

PROCEDURE ELIMINATION(Z,S: INTEGER);
  VAR K,L: INTEGER;
      C: REAL;
  BEGIN
    IF  A[Z,S] <> 0  THEN
      BEGIN
        FREI[S]:=FALSE;
        ZEILE[S]:=Z;
        ZRANG:=Z;
        IF Z < N  THEN
          BEGIN
            FOR K:=Z+1 TO N DO
              BEGIN
                C:=A[K,S]/A[Z,S];
                FOR L:=S TO P+1 DO
                  A[K,L]:=A[K,L]-A[Z,L]*C
              END;
            WRITELN; WRITELN;
            WRITELN('ELIMINATION: STUFE ',Z:2);
            MATRIXAUSGABE(N,P)
          END
      END
  END;
```

```
PROCEDURE GAUSSVERFAHREN(N,P: INTEGER);
  VAR Z,S,PIZ: INTEGER;

    (* BEDEUTUNG DER VARIABLEN:                                    *)
    (*    Z:  ZEILENINDEX                                          *)
    (*    S:  SPALTENINDEX                                         *)
    (*    PIZ:  ZEILENINDEX DERJENIGEN ZWISCHEN Z UND N            *)
    (*         LIEGENDEN ZEILE, DIE IN DER SPALTE S DAS            *)
    (*         BETRAGSGROESSTE ELEMENT HAT.   DAS ELEMENT          *)
    (*         A[PIZ,S]  WIRD NACH EVENTUELLEM ZEILENTAUSCH ZUM    *)
    (*         (IN DER ZEILE Z STEHENDEN) PIVOTELEMENT FUER        *)
    (*         DIE VARIABLE X[S].                                  *)

  BEGIN   (* GAUSSVERFAHREN *)
    Z:=0;
    S:=0;
    REPEAT
      Z:=Z+1;
      ZEILENFUEHRER(Z,S,PIZ);
      ZEILENTAUSCH(Z,S,PIZ);
      ELIMINATION(Z,S);
    UNTIL (Z=N) OR (S=P)
  END;

PROCEDURE LOESUNGSAUSGABE;
  VAR I,J,Z: INTEGER;
      D: REAL;
  BEGIN
    WRITELN;
    WRITELN('LOESUNGEN:');
    WRITELN;
    FOR I:=P DOWNTO 1 DO
      BEGIN
        IF FREI[I]=TRUE THEN
          BEGIN
            WRITELN;
            WRITE('DIE VARIABLE  X[',I:2,'] ');
            WRITELN(' KANN FREI GEWAEHLT WERDEN.');
            WRITE('GEBEN SIE EINEN ');
            WRITELN('BELIEBIGEN WERT FUER X[',I:2,']  EIN.');
            WRITE('X[',I:2,'] = ');
            READLN(X[I]);
            WRITELN(X[I]);
            WRITELN
          END
        ELSE BEGIN
              Z:=ZEILE[I];
              D:=A[Z,P+1];
              FOR J:=I+1 TO P DO
                D := D-A[Z,J]*X[J];
              X[I]  := D/A[Z,I]
            END;
        WRITELN('X[',I:2,'] = ',X[I]:10:2,'    ',X[I])
      END
  END;
```

```
PROCEDURE AUSWERTUNG;
  VAR UNLOESBAR: BOOLEAN;
  BEGIN
    UNLOESBAR:=FALSE;
    WRITELN;
    WRITELN('ZEILENRANG:  ',ZRANG:2);
    WRITELN;
    IF  ZRANG < N  THEN
      FOR  I:=ZRANG+1 TO N DO
        IF  A[I,P+1] <> 0  THEN UNLOESBAR:=TRUE;
    IF UNLOESBAR THEN
       WRITELN('DAS GLEICHUNGSSYSTEM IST NICHT LOESBAR.')
    ELSE BEGIN
           WRITELN('DAS GLEICHUNGSSYSTEM IST LOESBAR.');
           WRITELN;
           WRITELN('ANZAHL DER FREIHEITSGRADE:  ',P-ZRANG:2);
           WRITELN;
           LOESUNGSAUSGABE
         END
  END;

BEGIN   (*  HAUPTPROGRAMM  *)
  PAGE(OUTPUT);
  WRITELN('LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM');
  WRITELN;
  WRITE('ANZAHL DER GLEICHUNGEN:  N = ');
  READLN(N);
  WRITE('ANZAHL DER VARIABLEN:  P = ');
  READLN(P);
  WRITELN;
  FOR I:=1 TO VARMAX DO FREI[I]:=TRUE;
  IF  ( N > GLMAX )  OR  ( P > VARMAX )  THEN
      WRITELN('ZU VIELE GLEICHUNGEN ODER VARIABLEN')
  ELSE BEGIN
         KOEFFIZIENTENEINGABE(N,P);
         MATRIXAUSGABE(N,P);
         ZRANG:=0;
         GAUSSVERFAHREN(N,P);
         AUSWERTUNG
       END
END.
```

Dieses Programm ist in der Sprache PASCAL geschrieben, die gute sprachlogische Strukturierungsmöglichkeiten besitzt. Der blockartige, modulare Aufbau des Gaußschen Algorithmus läßt sich durch das Prozedurkonzept der Sprache gut in das PASCAL-Programm übertragen. Im Hinblick auf Syntax und Sprachlogik von PASCAL verweisen wir den interessierten Leser auf die vielfältige Literatur zu dieser Programmiersprache.

Auf eine Besonderheit des Programms sei noch hingewiesen: Aus Gründen der numerischen Stabilität des Verfahrens empfiehlt es sich im allgemeinen nicht, als Zeilenführer, wie oben geschehen, das erstbeste von Null verschiedene Element zu wählen. Es erweist sich häufig als günstiger, durch eventuellen Zeilentausch auf das jeweils betragsgrößte Element der entsprechenden Spalte als Zeilenführer zurückzugreifen. Dieses Element wird auch als Pivot-Element bezeichnet. Beim Aufsuchen des jeweilen Pivotelementes dient in unserem PASCAL-Programm die Prozedur PIVOTSUCHE.

Ob die Wahl des betragsgrößten Elementes allerdings stets optimal ist, ist unseres Wissens theoretisch noch nicht völlig geklärt. Es gibt Indizien, die darauf hindeuten, daß die Wahl eines Elementes von mittlerer Betragsgröße insgesamt am günstigsten sein könnte.

Schließlich sei noch erwähnt, daß zur Lösung linearer Gleichungssysteme auch häufig iterative, auf Fixpunktverfahren beruhende Methoden herangezogen werden. Dies ist besonders dann der Fall, wenn der Aspekt der numerischen Auswertung im Vordergrund steht. Da für uns aber zunächst die Frage nach der grundsätzlichen Lösbarkeit und nach der Reichhaltigkeit der Lösungsgesamtheit von vorrangiger Bedeutung ist, wollen wir uns hier auf die Darstellung des Gaußschen Algorithmus beschränken.

[17.4] Bemerkung zu Determinanten

Der erfahrene Leser wird möglicherweise die Diskussion der linearen Unabhängigkeit anhand von Determinantenkriterien vermissen. Wir haben bewußt den Weg des Gaußschen Algorithmus in den Vordergrund gestellt, weil

- es ein Algorithmus von zentraler Bedeutung ist;
- die zunehmend an Bedeutung gewinnenden algorithmischen Verfahren durch ihn besser repräsentiert werden als durch eine etwaige algorithmische Behandlung von Determinanten;
- sich die Entwicklung von Determinantenverfahren auf einem begrifflich höheren Niveau abspielt als der Gaußsche Algorithmus;
- Determinantenverfahren im allgemeinen dem Gaußschen Algorithmus auch rechentechnisch und numerisch unterlegen sind (größerer Aufwand, numerisch instabil);
- Determinantenverfahren zunächst nur ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von genau n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bereitstellen.

Um die Brücke zu den in der Literatur ebenfalls verbreiteten Determinantenkriterien zu schlagen, skizzieren wir im folgenden eine derartige Vorgehensweise.

Die Determinante der (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist eine reelle Zahl, die sich nach § 14 wie folgt berechnet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{17.18}$$

Es sei A eine (3×3)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ihre Determinante det (A) ist definiert als

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + \\ &+ a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} \end{aligned} \tag{17.19}$$

Die rechte Seite von (17.19) ist offenbar die Summe aller möglichen Produkte der Form

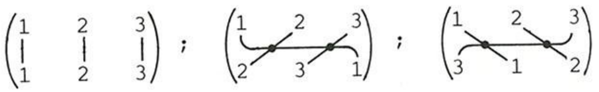
$$a_{i1} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3}, \tag{17.20}$$

wobei das Tripel (i, j, k) alle möglichen Vertauschungen (= Permutationen) der Ziffern 1, 2 und 3 durchläuft. Eine Permutation der Ziffern 1, 2 und 3 heißt gerade, wenn die Anzahl der Schnittpunkte im Zuordnungsschema

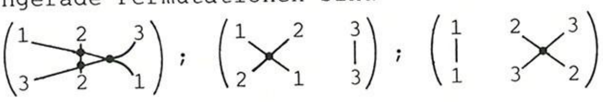
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \tag{17.21}$$

wo jede der oben stehenden Ziffern mit der entsprechenden Ziffer in der unteren Zeile verbunden ist, ebenfalls eine gerade Zahl ist. Andernfalls heißt die Permutation ungerade.

Gerade Permutationen von drei Elementen sind also



und ungerade Permutationen sind



Der Summand $a_{i1} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3}$ tritt in (17.19) mit positivem Vorzeichen auf, wenn die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

gerade ist, andernfalls wird er mit negativem Vorzeichen versehen.

Diese Beschreibung läßt sich direkt für Determinanten von (n×n)-Matrizen verallgemeinern.

Wir gehen einen etwas anderen Weg.

Eine leichte Umformung von (17.19) ergibt:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + \\ + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{17.22}$$

Die auf der rechten Seite von (17.22) auftretenden Summanden unterliegen der folgenden Gesetzmäßigkeit:

> Der Koeffizient a_{ij} wird mit derjenigen (2×2)-Determinante multipliziert, die man erhält, wenn man aus der Determinante von A die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Zu a_{21} gehört z. B. die folgende (2×2)-Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die zu a_{21} gehörende Determinante $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ bezeichnen wir kurz mit A_{21}. Man nennt sie das *algebraische Komplement* von a_{21} relativ zur Matrix A.

Gleichung (17.22) kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \tag{17.23}$$

(17.23) wird auch als die *Entwicklung der Determinante von* A *nach der ersten Spalte* bezeichnet.

Es sei nun A die folgende (n×n)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir definieren ihre Determinante rekursiv wie folgt durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Zunächst sei A_{ij} die Determinante derjenigen $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man erhält, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streicht. Wir definieren nun:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} - a_{41}A_{41} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{i+1} \cdot a_{i1}A_{i1} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_{n1}A_{n1} \quad (17.24)$$

Die Verankerung dieser rekursiven Definition erfolgte in (17.18) bzw. in § 14.

Es gilt nun der folgende

Satz 17.3

Die n Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Aus den Grundzügen der linearen Algebra ist bekannt, daß man die Determinante von A entsprechend der Vorgehensweise (17.24) auch nach jeder anderen Spalte oder auch nach jeder Zeile entwickeln kann, daß also gilt:

Satz 17.4

Mit den Bezeichnungen aus (17.24) gilt für alle j $(1 \leq j \leq n)$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj}A_{kj} \quad (17.25)$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte) und für alle i $(1 \leq i \leq n)$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot a_{ik}A_{ik} \quad (17.26)$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile).

Wir beschließen hiermit den kleinen Exkurs über Determinanten und verweisen den Leser, der mehr über ihre Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten wissen möchte, auf die vielfältige Literatur zur linearen Algebra.

[17.5] Das charakteristische Polynom

Nach den Ausführungen zu Differenzengleichungen der Ordnung 2 in § 13 liegt es nun nahe, das dort beschriebene Verfahren auch im Hinblick auf die Lösung der Gleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0 \quad (17.27)$$

anzuwenden. Eine direkte Verallgemeinerung liefert die

Definition 17.1

Das *charakteristische Polynom* der Differenzengleichung (17.27) ist

$$p(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1m + a_0 \tag{17.28}$$

Die zu (17.27) gehörende *charakteristische Gleichung* lautet:

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{17.29}$$

Satz 17.5

Es sei m_1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (17.28). Dann ist die Folge (y_k) mit

$$y_k = m_1^k$$

eine Lösung der Gleichung (17.27).

Beweis:

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k =$$

$$= m_1^{k+n} + a_{n-1}m_1^{k+n-1} + \ldots + a_2m_1^{k+2} + a_1m_1^{k+1} + a_0m_1^k =$$

$$= m_1^k \underbrace{(m_1^n + a_{n-1}m_1^{n-1} + \ldots + a_2m_1^2 + a_1m_1 + a_0)}_{= 0 \text{ nach Voraussetzung}} = 0$$

Bemerkung

Die Aussage von Satz 17.5 ist sicher auch dann richtig, wenn $m_1 = 0$ ist. Dies hätte jedoch $a_0 = 0$ im charakteristischen Polynom $p(m)$ zur Folge.

In der Differenzengleichung (17.27) hätte man somit den Summanden a_0y_k von vornherein weglassen können. Wir wollen im folgenden annehmen, daß die Gleichung (17.27) von der Ordnung n ist und daß die betrachteten Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms somit alle von Null verschieden sind.

Als nächstes stellt sich naturgemäß die Frage nach einem Fundamentalsystem von Lösungen.

Aus § 14 wissen wir, daß im Falle der Ordnung 2 und bei Verschiedenheit der Wurzeln m_1 und m_2 des in diesem Fall gegebenen charakteristischen Polynoms

$$m^2 + a_1m + a_0 = 0$$

die Folgen

$$(m_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad (m_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

ein Fundamentalsystem darstellen. Das Entsprechende gilt auch im Falle der Ordnung n.

Satz 17.6

Das charakteristische Polynom (17.28) der Differenzengleichung (17.27) besitze die paarweise verschiedenen Wurzeln

$$m_1, m_2, \dots, m_n \qquad (m_i \neq 0).$$

Dann bilden die Folgen

$$(m_1^k)_{k\in\mathbb{N}},\ (m_2^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (m_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \tag{17.30}$$

eine Basis (ein Fundamentalsystem) der Lösungsgesamtheit von (17.28).

Beweis: Nach den Anfangsbemerkungen in diesem Paragraphen wissen wir, daß die Lösungsgesamtheit ein n-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die Folgen in (17.30) linear unabhängig sind. Dies läßt sich auf Grund der Rekursivität der Folgen wiederum an den jeweiligen n Anfangswerten entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ m_1^2 \\ \vdots \\ m_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \\ m_2^2 \\ \vdots \\ m_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ m_n \\ m_n^2 \\ \vdots \\ m_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{17.31}$$

Zu diesen Vektoren gehört im Sinne von (17.10) die folgende (n×n)-Matrix:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & m_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{17.32}$$

Die Determinante von V heißt die *Vandermondesche Determinante*. Es ist bekannt, daß sie von Null verschieden ist, das heißt, daß die Vektoren in (17.31) linear unabhängig sind.

Wir wollen diesen Sachverhalt jedoch nicht einfach aus der linearen Algebra übernehmen, sondern werden ihn exemplarisch am Falle $n = 4$ aufzeigen. Die exemplarische Vorgehensweise trägt jedoch die wesentlichen Merkmale des allgemeinen Beweises in sich. Im Falle $n = 4$ lautet die Vandermondesche Matrix:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_4^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 & m_4^3 \end{pmatrix} \tag{17.33}$$

Wir führen die Matrix $V = V_0$ in (17.33) entsprechend den zulässigen Operationen des Gaußschen Algorithmus in eine Dreiecksform über.

Subtraktion eines geeigneten Vielfachen der ersten Zeile von den anderen Zeilen ergibt:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & m_4 - m_1 \\ 0 & m_2^2 - m_1^2 & m_3^2 - m_1^2 & m_4^2 - m_1^2 \\ 0 & m_2^3 - m_1^3 & m_3^3 - m_1^3 & m_4^3 - m_1^3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $(m_2 + m_1)$ und Subtraktion von der dritten Zeile ergibt:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & m_4 - m_1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & m_2^3 - m_1^3 & m_3^3 - m_1^3 & m_4^3 - m_1^3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= m_3^2 - m_1^2 - (m_3 - m_1)(m_2 + m_1) = \\ &= m_3^2 - m_1^2 - m_3 m_2 + m_1 m_2 - m_3 m_1 + m_1^2 = \\ &= m_3(m_3 - m_2) - m_1(m_3 - m_2) = (m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \end{aligned}$$

und entsprechend

$$b = (m_4 - m_1)(m_4 - m_2).$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{m_2 - m_1} \cdot (m_2^3 - m_1^3)$ und Subtraktion von der dritten Zeile führt zur Matrix

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & m_4 - m_1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Mit Rückgriff auf Aufgabe 4.1 berechnen sich die Koeffizienten c und d zu

$$\begin{aligned} c &= m_3^3 - m_1^3 - \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \cdot (m_2^3 - m_1^3) = \\ &= (m_3 - m_1) \left[(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2) - (m_2^2 + m_2 m_1 + m_1^2)\right] = \\ &= (m_3 - m_1)(m_3^2 - m_2^2 + m_3 m_1 - m_2 m_1) = \\ &= (m_3 - m_1)(m_3 - m_2)(m_3 + m_2 + m_1) \end{aligned}$$

und entsprechend

$$d = (m_4 - m_1)(m_4 - m_2)(m_4 + m_2 + m_1).$$

Schließlich ergibt die Subtraktion des $\frac{1}{a} \cdot c$-fachen der dritten Zeile von der vierten Zeile

$$V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & m_4 - m_1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

mit

$$e = d - \frac{b}{a} \cdot c =$$

$$= (m_4 - m_1)(m_4 - m_2)(m_4 + m_2 + m_1) - \frac{(m_4 - m_1)(m_4 - m_2)}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)} (m_3 - m_1)(m_3 - m_2)(m_3 + m_2 + m_1) =$$

$$= (m_4 - m_1)(m_4 - m_2)(m_4 + m_2 + m_1 - m_3 - m_2 - m_1) =$$

$$= (m_4 - m_1)(m_4 - m_2)(m_4 - m_3).$$

Mit Hilfe der zulässigen Operationen des Gaußschen Algorithmus wurde die Matrix V also in eine Matrix der Form

$$V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & m_4 - m_1 \\ 0 & 0 & (m_3 - m_1)(m_3 - m_2) & (m_4 - m_1)(m_4 - m_2) \\ 0 & 0 & 0 & (m_4 - m_1)(m_4 - m_2)(m_4 - m_3) \end{pmatrix} \qquad (17.34)$$

übergeführt.

Da die Wurzeln nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, sind die "Diagonalelemente a^*_{ii} der Matrix V_4 alle von Null verschieden, und die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ m_1^2 \\ m_1^3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \\ m_2^2 \\ m_2^3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_3 \\ m_3^2 \\ m_3^3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_4 \\ m_4^2 \\ m_4^3 \end{pmatrix} \qquad (17.35)$$

der Vandermonde-Matrix (17.33) sind linear unabhängig. Sie stellen also im Falle $n = 4$ die Anfangswerte eines Fundamentalsystems zur Gleichung (17.27) dar.

Bemerkungen

1. In der linearen Algebra wird gezeigt, daß unsere Zeilenumformung ZU4 aus Abschnitt $\boxed{17.2}$ (Addition eines reellen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile) den Wert einer Determinante nicht verändert.
2. Die im Falle von (17.34) besonders leicht durchzuführende Entwicklung nach der ersten Spalte zeigt, daß der Wert der Vandermondeschen Determinante im Falle $n = 4$ durch

$$\det(V) = (m_2 - m_1)(m_3 - m_2)(m_3 - m_1)(m_4 - m_3)(m_4 - m_2)(m_4 - m_1) \qquad (17.36)$$

gegeben ist. Also ist det (V) das Produkt aus allen Faktoren der Form $(m_i - m_j)$ mit $j < i$. Die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren in (17.35) folgt also auch aus dem in Satz 17.3 erwähnten Determinantenkriterium.

Aufgabe 17.3

a) Führen Sie den allgemeinen Beweis von Satz 17.6 z. B. mit vollständiger Induktion durch.

b) Zeigen Sie insbesondere: Für die Vandermondesche Determinante der in (17.32) gegebenen Matrix V gilt:

$$\det V = \prod_{j<i} (m_i - m_j) \tag{17.37}$$

Das Symbol auf der rechten Seite von (17.37) bedeutet, daß das Produkt aus allen Faktoren $(m_i - m_j)$ mit $j < i$ zu bilden ist.

[17.6] Mehrfachwurzeln der charakteristischen Gleichung

Aus Abschnitt [14.3] kennen wir Fundamentalsysteme der Lösungsgesamtheit von

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \tag{17.38}$$

auch für den Fall, daß die charakteristische Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

auch eine Doppelwurzel $\tilde{m}$ besitzt. Solche Fundamentalsysteme sind zum Beispiel

$$(\tilde{m}^k)_{k \in \mathbb{N}} \quad ; \quad (k \cdot \tilde{m}^{k-1})_{k \in \mathbb{N}}$$

oder nach Aufgabe 14.8 auch

$$(\tilde{m}^k)_{k \in \mathbb{N}} \quad ; \quad (k \cdot \tilde{m}^k)_{k \in \mathbb{N}}. \tag{17.39}$$

Wenn wir nun die entsprechende Gleichung dritter Ordnung betrachten,

$$y_{k+3} + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0, \tag{17.40}$$

so können Mehrfachwurzeln des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 \tag{17.41}$$

entweder in Form einer Doppelwurzel $\tilde{m}_1$ in Verbindung mit einer Einfachwurzel m_2 $(\tilde{m}_1 \neq m_2)$ oder in Form einer Dreifachwurzel $\tilde{m}$ auftreten.

Aufgabe 17.4

Zeigen Sie:

a) Ist die komplexe Zahl $u + iv$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, so ist die konjugiert komplexe Zahl $u - iv$ ebenfalls eine Nullstelle.

b) Die Mehrfachwurzeln $\tilde{m}_1$ bzw. $\tilde{m}$ des Polynoms (17.41) sind alle reell.

Ist $\tilde{m}_1$ eine Doppelwurzel und m_2 eine Einfachwurzel von (17.41), so liegt die Vermutung nahe, daß die Folgen

$$(\tilde{m}_1{}^k), \quad (k\cdot\tilde{m}_1{}^k) \quad \text{und} \quad (m_2{}^k) \tag{17.42}$$

die Gleichung (17.40) lösen. Dies ist nur noch für die Folge $(k\cdot\tilde{m}_1{}^k)$ zu zeigen. Da das Polynom (17.41) die Wurzeln $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_1$ und m_2 besitzt, gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra:

$$\begin{aligned} m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0 &= (m - \tilde{m}_1)^2\cdot(m - m_2) = \\ &= m^3 + (-2\tilde{m}_1 - m_2)m^2 + (\tilde{m}_1{}^2 + 2\tilde{m}_1m_2)\cdot m - \tilde{m}_1{}^2m_2 \end{aligned} \tag{17.43}$$

Jedes Polynom ist eindeutig durch seine Koeffizienten bestimmt. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir somit die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -2\tilde{m}_1 - m_2 \\ a_1 &= \tilde{m}_1{}^2 + 2\tilde{m}_1m_2 \\ a_0 &= -\tilde{m}_1{}^2m_2 \end{aligned}\right\} \tag{17.44}$$

Einsetzen der Folge $(k\cdot\tilde{m}_1{}^k)$ in die Differenzengleichung (17.40) ergibt nun:

$$\begin{aligned} &y_{k+3} + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k = \\ &= (k+3)\cdot\tilde{m}_1{}^{k+3} + a_2(k+2)\cdot\tilde{m}_1{}^{k+2} + a_1(k+1)\cdot\tilde{m}^{k+1} + a_0k\tilde{m}_1{}^k = \\ &= \tilde{m}_1{}^k\cdot((k+3)\tilde{m}_1{}^3 + a_2(k+2)\tilde{m}_1{}^2 + a_1(k+1)\tilde{m}_1 + a_0k) = \\ &= \tilde{m}_1{}^k(k\underbrace{(\tilde{m}_1{}^3 + a_2\tilde{m}_1{}^2 + a_1\tilde{m}_1 + a_0)}_{=\,0} + (3\tilde{m}_1{}^3 + 2a_2\tilde{m}_1{}^2 + a_1\tilde{m}_1)) = \\ &= \tilde{m}_1{}^k(3\tilde{m}_1{}^3 + 2(-2\tilde{m}_1 - m_2)\tilde{m}_1{}^2 + (\tilde{m}_1{}^2 + 2\tilde{m}_1m_2)\tilde{m}_1) = \\ &= \tilde{m}_1{}^k(3\tilde{m}_1{}^3 - 4\tilde{m}_1{}^3 - 2\tilde{m}_1{}^2m_2 + \tilde{m}_1{}^3 + 2\tilde{m}_1{}^2m_2) = 0 \end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, ob die Folgen in (17.42) ein Fundamentalsystem bilden. Da es sich um eine Gleichung der Ordnung 3 handelt, ist die lineare Unabhängigkeit der Folgen in (17.42) gleichwertig zur linearen Unabhängigkeit der aus den drei Anfangswerten gebildeten Spaltenvektoren, die im Falle von $\tilde{m}_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$ die folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{m}_1 \\ \tilde{m}_1{}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{m}_1 \\ 2\tilde{m}_1{}^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \\ m_2{}^2 \end{pmatrix} \tag{17.45}$$

Das sich aus der Suche nach einer Linearkombination des Nullvektors ergebende Gleichungssystem

$$1\cdot r_1 + 0\cdot r_2 + 1\cdot r_3 = 0$$
$$\tilde{m}_1\cdot r_1 + \tilde{m}_1\cdot r_2 + m_2\cdot r_3 = 0$$
$$\tilde{m}_1^2\cdot r_1 + 2\tilde{m}_1^2\cdot r_2 + m_2^2\cdot r_3 = 0$$

wird entsprechend dem Gaußschen Algorithmus wie folgt in ein gestaffeltes System übergeführt

Erster Schritt:

$$\begin{aligned} 1\cdot r_1 + 0\cdot r_2 + 1\cdot r_3 &= 0\\ \tilde{m}_1\cdot r_2 + (m_2 - \tilde{m}_1)\cdot r_3 &= 0\\ 2\tilde{m}_1^2\cdot r_2 + (m_2^2 - \tilde{m}_1^2)\cdot r_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} 1\cdot r_1 + 0\cdot r_2 + 1\cdot r_3 &= 0\\ \tilde{m}_1\cdot r_2 + (m_2 - \tilde{m}_1)\cdot r_3 &= 0\\ a\cdot r_3 &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$a = (m_2^2 - \tilde{m}_1^2) - 2\tilde{m}_1(m_2 - \tilde{m}_1) = (m_2 - \tilde{m}_1)(m_2 + \tilde{m}_1 - 2\tilde{m}_1) =$$
$$= (m_2 - \tilde{m}_1)^2$$

Wegen $\tilde{m}_1 \neq m_2$ sind die "Diagonalelemente" des gestaffelten Systems alle von Null verschieden, und die Auswertung ergibt:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

Die Lösungsvektoren in (17.45) sind also linear unabhängig.

Wir fassen zusammen:

Satz 17.7

Besitzt das charakteristische Polynom

$$m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

der linearen homogenen Differenzengleichung

$$y_{k+3} + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0$$

die Doppelwurzel $\tilde{m}_1$ und die Einfachwurzel m_2 ($\tilde{m}_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$), so bilden die Lösungsfolgen

$$(\tilde{m}_1^k),\quad (k\tilde{m}_1^k) \quad\text{und}\quad (m_2^k)$$

ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit.

Auch im Falle einer Dreifachwurzel $\tilde{m}$ ($\tilde{m} \neq 0$) des charakteristischen Polynoms (17.41) bleiben die Lösungen

$$(\tilde{m}^k) \quad\text{und}\quad (k\cdot\tilde{m}^k)$$

linear unabhängig. Wir stehen vor der Aufgabe, diese beiden Lösungen durch eine dritte zu einem Fundamentalsystem zu ergänzen. Wir wenden das Determinantenkriterium auf die jeweiligen drei Anfangswerte an. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_0 \\ \tilde{m} & \tilde{m} & y_1 \\ \tilde{m}^2 & 2\tilde{m}^2 & y_2 \end{vmatrix}$$

hat für $y_0 = y_1 = 0$ den Wert

$$D = \tilde{m}\cdot y_2,$$

der für $y_2 \neq 0$ sicher von Null verschieden ist. Setzen wir etwa $y_2 = 1$, so ist die dritte Lösungsfolge durch die Rekursionsgleichung

$$y_{k+3} = -a_2 y_{k+2} - a_1 y_{k+1} - a_0 y_k \tag{17.46}$$

und die Anfangswerte $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ festgelegt.

Um Hinweise auf die explizite Gestalt der dritten Lösungsfolge zu erhalten, ersetzen wir die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in Kenntnis der speziellen Form des charakteristischen Polynoms. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 &= (m - \tilde{m})^3 = \\ &= m^3 - 3\tilde{m}m^2 + 3\tilde{m}^2 m - \tilde{m}^3 \end{aligned}\right\} \tag{17.47}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -3\tilde{m} \\ a_1 &= +3\tilde{m}^2 \\ a_0 &= -\tilde{m}^3 \end{aligned}\right\} \tag{17.48}$$

Durch Einsetzen dieser Werte führen wir (17.46) über in

$$y_{k+3} = 3\tilde{m}\cdot y_{k+2} - 3\tilde{m}^2\cdot y_{k+1} + \tilde{m}^3\cdot y_k .$$

Die Anfangswerte $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ ergeben weiter:

$$\begin{aligned} y_3 &= 3\tilde{m}\cdot 1 \\ y_4 &= 3\tilde{m}\cdot 3\tilde{m} - 3\tilde{m}^2\cdot 1 = 6\tilde{m}^2 \\ y_5 &= 3\tilde{m}\cdot 6\tilde{m}^2 - 3\tilde{m}^2\cdot 3\tilde{m} + \tilde{m}^3\cdot 1 = 10\tilde{m}^3 \\ y_6 &= 3\tilde{m}\cdot 10\tilde{m}^3 - 3\tilde{m}^2\cdot 6\tilde{m}^2 + \tilde{m}^3\cdot 3\tilde{m} = 15\tilde{m}^4 \\ y_7 &= 3\tilde{m}\cdot 15\tilde{m}^4 - 3\tilde{m}^2\cdot 10\tilde{m}^3 + \tilde{m}^3\cdot 6\tilde{m}^2 = 21\tilde{m}^5 \end{aligned}$$

Die induktive Entwicklung der allgemeinen Form von y_k ist jetzt so weit vorangetrieben, daß die Vermutung

$$y_k = \frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot \tilde{m}^{k-2} \tag{17.49}$$

sinnvoll erscheint.

Aufgabe 17.5

Beweisen Sie die Richtigkeit der Vermutung (17.49).

Aufgabe 17.6

Zeigen Sie: Im Falle einer Dreifachwurzel $\tilde{m}$ sind mit der in (17.49) gegebenen Lösungsfolge auch die Folgen

a) (v_k) mit $v_k = \frac{1}{2}\cdot k(k-1)\cdot\tilde{m}^k$

b) (w_k) mit $w_k = k^2\cdot\tilde{m}^k$

Lösungsfolgen der Gleichung (17.40).

Aufgabe 17.7

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 17.8

Besitzt das charakteristische Polynom

$$m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

der linearen homogenen Differenzengleichung

$$y_{k+3} + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0$$

eine von Null verschiedene Dreifachwurzel $\tilde{m}$, so bilden die Lösungsfolgen

$$(\tilde{m}^k),\quad (k\cdot\tilde{m}^k)\quad \text{und}\quad (k^2\cdot\tilde{m}^k)$$

ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit.

Die bisherige Diskussion in diesem Abschnitt und in [14.3] gibt uns deutliche Hinweise darauf, wie ein Fundamentalsystem im Falle noch höherer Mehrfachwurzeln aussieht.

Satz 17.9

Es sei

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0 \tag{17.50}$$

eine lineare homogene Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1m + a_0 \tag{17.51}$$

besitze die von Null und untereinander paarweise verschiedenen Wurzeln

$$m_1,\ m_2, \ldots,\ m_s. \tag{17.52}$$

Die Vielfachheit der Wurzel m_i $(i = 1,\ldots, s)$ sei n_i. Dann bilden nachstehende n Folgen ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit von (17.50):

$$\left.\begin{array}{lllll}
(m_1^k), & (k\cdot m_1^k), & (k^2\cdot m_1^k),\ldots, & (k^{n_1-1}\cdot m_1^k) \\
(m_2^k), & (k\cdot m_2^k), & (k^2\cdot m_2^k),\ldots, & (k^{n_2-1}\cdot m_2^k) \\
\ldots & \ldots & \ldots\quad\ldots & \ldots \\
(m_s^k), & (k\cdot m_s^k), & (k^2\cdot m_s^k),\ldots, & (k^{n_s-1}\cdot m_s^k)
\end{array}\right\} \tag{17.53}$$

Bemerkungen

1. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist offenbar

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_s = n = \text{Grad des charakteristischen Polynoms}$$

und weiterhin

$$\left.\begin{aligned} & m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = \\ & = (m - m_1)^{n_1} \cdot (m - m_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (m - m_s)^{n_s} \end{aligned}\right\} \qquad (17.54)$$

2. Ein formal vollständiger Beweis für Satz 17.9 erfordert die Durchführung der vollständigen Induktion in zwei Stufen:

   a) vollständige Induktion nach der Anzahl s der verschiedenen Wurzeln $m_1, \ldots, m_s$ und

   b) für jede Wurzel m_i vollständige Induktion nach ihrer Vielfachheit n_i.

Da ein solcher Beweis einerseits rein darstellungstechnisch sehr aufwendig wäre und andererseits kaum neue Erkenntnisse brächte, sei an dieser Stelle darauf verzichtet.

[17.7] Komplexe Wurzeln

Unter den verschiedenen Wurzeln $m_1, \ldots, m_s$ in (17.52) können, wie wir bereits im Falle der Ordnung 2 erkannt haben, durchaus komplexe Zahlen vorkommen; allerdings nur in konjugiert komplexen Paaren. Ist etwa

$$m_j = a + ib,$$

so muß es nach Aufgabe 17.4 ein $l \neq j$ $(1 \leq l \leq s)$ geben mit

$$m_l = a - ib.$$

Wie in Abschnitt [15.3] lassen sich auch diese komplexen Lösungsfolgen auf reelle Folgen zurückführen.

Aufgabe 17.8

> Zeigen Sie: Ist $(z_k) = (u_k + i\,v_k) = (u_k) + i\,(v_k)$ eine komplexe Lösungsfolge der Gleichung (17.50), so sind auch die reellen Folgen (u_k) und (v_k) Lösungsfolgen der Differenzengleichung.

Die Darstellung von m_j sei, wie in (15.14):

$$m_j = r\,(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Dann ist nach der Formel von Moivre (15.21):

$$m_j{}^k = r^k(\cos k\phi + i \sin k\phi)$$

und

$$k^p \cdot m_j{}^k = k^p \cdot r^k(\cos k\phi + i \sin k\phi)$$

Nach Aufgabe 17.8 sind also auch die Folgen

$$\left.\begin{aligned} & (r^k \cos k\phi),\ (k \cdot r^k \cos k\phi), \ldots,\ (k^{n_j - 1} \cdot r^k \cos k\phi) \\ \text{und}\quad & \\ & (r^k \sin k\phi),\ (k \cdot r^k \sin k\phi), \ldots,\ (k^{n_j - 1} \cdot r^k \sin k\phi) \end{aligned}\right\} \qquad (17.55)$$

Lösungsfolgen der Gleichung (17.50).

Es stellt sich die naheliegende Frage, ob die komplexen Lösungsfolgen

$$\left.\begin{array}{l}(m_j^{\,k}),\ (k\cdot m_j^{\,k}),\ldots,\ (k^{n_j-1}\cdot m_j^{\,k})\\ (m_l^{\,k}),\ (k\cdot m_l^{\,k}),\ldots,\ (k^{n_l-1}\cdot m_l^{\,k})\end{array}\right\} \tag{17.56}$$

im Fundamentalsystem (17.53) durch die reellen Lösungsfolgen in (17.55) ersetzt werden können, ohne daß die Basiseigenschaft des Fundamentalsystems zerstört wird.

Eine notwendige Voraussetzung dafür ist offensichtlich, daß die Vielfachheiten n_j und n_l übereinstimmen. Daß diese Bedingung erfüllt ist, folgt aus der Darstellung (17.54) des charakteristischen Polynoms. Beim Übergang von m_j zur konjugiert komplexen Wurzel m_l geht der Faktor $(m-m_j)^{n_j}$ des charakteristischen Polynoms gerade in den Faktor $(m-m_l)^{n_j}$ und umgekehrt der Faktor $(m-m_l)^{n_l}$ in den Faktor $(m-m_j)^{n_l}$ über. Da das charakteristische Polynom durch diesen Tausch nicht verändert wird, folgt daraus die Gleichheit der Exponenten

$$n_j = n_l.$$

Das gewünschte Resultat ergibt sich nun mit dem folgenden Satz aus der linearen Algebra:

Satz 17.10

Der reelle Vektorraum V besitze die Basis

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_i,\ldots,\ b_l,\ldots,\ b_n. \tag{17.57}$$

Dann bilden die Vektoren

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ r\cdot(b_i+b_l),\ldots,\ b_l,\ldots,\ b_n \tag{17.58}$$

für jede beliebige von Null verschiedene Zahl r ebenfalls eine Basis.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß für beliebige reelle Zahlen x_i $(i=1,\ldots,n)$ mit

$$x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_ir(b_i+b_l) + \ldots + x_lb_l + \ldots + x_nb_n = 0 \tag{17.59}$$

stets folgt:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Es gelte also (17.59). Eine leichte Umformung ergibt:

$$x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_irb_i + \ldots + (x_ir + x_l)b_l + \ldots + x_nb_n = 0. \tag{17.60}$$

Da die Vektoren in (17.57) nach Voraussetzung eine Basis bilden, folgt aus (17.60):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ldots,\ x_ir = 0,\ldots,\ x_ir + x_l = 0,\ldots,\ x_n = 0.$$

Mit $r \neq 0$ folgt weiter $x_i = 0$ und somit auch $x_l = 0$. Somit verschwinden alle Koeffizienten in (17.59), und die n Vektoren in (17.58) bilden eine Basis von V.

Die Lösungsfolgen in (17.55) können also an Stelle der Folgen in (17.56) zur Bildung eines Fundamentalsystems herangezogen werden, denn für $0 \leq p \leq n_j - 1$ ist

$$(k^p r^k \cos k\phi)_k = \frac{1}{2}((k^p m_j{}^k)_k + (k^p m_1{}^k)_k)$$

und

$$(k^p r^k \sin k\phi)_k = \frac{1}{2}((k^p m_j{}^k)_k - (k^p m_1{}^k)_k).$$

Wir fassen zusammen:

Satz 17.11

Die komplexen Wurzeln des charakteristischen Polynoms (17.51) treten stets in konjugiert komplexen Paaren m_j und m_1 $(j \neq 1)$ auf, deren Vielfachheiten n_j und n_1 übereinstimmen.

Die Lösungsfolgen

$$(m_j{}^k),\ (km_j{}^k), \ldots,\ (k^{n_j-1} m_j{}^k)$$

und

$$(m_1{}^k),\ (km_1{}^k), \ldots,\ (k^{n_1-1} m_1{}^k)$$

können im Fundamentalsystem (17.53) durch die Folgen

$$(r^k \cos k\phi),\ (k\, r^k \cos k\phi), \ldots,\ (k^{n_j-1} r^k \cos k\phi)$$

und

$$(r^k \sin k\phi),\ (k\, r^k \sin k\phi), \ldots,\ (k^{n_j-1} r^k \sin k\phi)$$

ersetzt werden, ohne daß die Basiseigenschaft zerstört wird.

Wir erläutern das Vorhergehende an einem

Beispiel. Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{k+6} - 7\, y_{k+4} + 72\, y_{k+3} - 73\, y_{k+2} + 72\, y_{k+1} - 65\, y_k = 0.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$m^6 - 7\,m^4 + 72\,m^3 - 73\,m^2 + 72\,m - 65 = 0$$

hat als Lösung die Nullstellen

$m_1 = 1$ mit der Vielfachheit $n_1 = 3$

$m_2 = 2 + 3i$ mit der Vielfachheit $n_2 = 1$

$m_3 = 2 - 3i$ mit der Vielfachheit $n_3 = 1$

$m_4 = -5$ mit der Vielfachheit $n_4 = 1$

Auf die Problematik des Auffindens von Nullstellen vorgegebener Polynome wollen wir hier nicht näher eingehen. Wir verweisen diesbezüglich auf die reichhaltige Literatur einerseits zur Algebra und andererseits zur numerischen und praktischen Mathematik. In unserem Beispiel kann man z. B. nach "Erraten" der Wurzel $m_1 = 1$ das gegebene Polynom sechsten Grades durch $(m-1)^3$ dividieren. Das daraus resultierende Polynom dritten Grades läßt sich dann noch elementarer lösen.

Ein Fundamentalsystem unserer Differenzengleichung ist also z. B. gegeben durch:

$$(1)_{k\geq 0};\ (k)_{k\geq 0};\ (k^2)_{k\geq 0};\ ((2+3i)^k)_{k\geq 0};((2-3i)^k)_{k\geq 0};\ ((-5)^k)_{k\geq 0}$$

Die konjugiert komplexen Wurzeln $m_2 = 2 + 3i$ und $m_3 = 2 - 3i$ besitzen die folgenden Darstellungen in Polarkoordinaten:

$$m_2 = r\cdot(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{und} \quad m_3 = r\cdot(\cos\psi + i\sin\psi)$$

mit $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}\sqrt{13}\ ; \qquad \sin\phi = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13}\sqrt{13}$$

$$\cos\psi = \frac{2}{\sqrt{13}} = \cos\phi\ ; \qquad \sin\psi = \frac{-3}{\sqrt{13}} = \sin(-\phi)$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist also zum Beispiel:

$$(1^k)_{k\geq 0};\ (k)_{k\geq 0};\ (k^2)_{k\geq 0};\ (\sqrt{13}^{\,k}\cdot\cos k\phi)_{k\geq 0};$$

$$(\sqrt{13}^{\,k}\cdot\sin k\phi)_{k\geq 0};\ ((-5)^k)_{k\geq 0}$$

mit $\phi = \arc\cos\left(\frac{2}{13}\sqrt{13}\right)$.

Numerisch ergibt sich näherungsweise:

$r \cong 3,6;\quad \cos\phi \cong 0,5547;\quad \sin\phi \cong 0,832$

$\phi \cong \arc\cos(0,5547) \cong 0,983$ (in Bogenmaß)

$\phi \cong 56,3°$ (im Gradmaß; Vollkreis: 360°)

§ 18 Die Lösungsgesamtheit inhomogener linearer Differenzengleichungen

Die strukturelle Beschreibung der Lösungsgesamtheit linearer inhomogener Differenzengleichungen der Form

$$f_n(k)\cdot y_{k+n} + f_{n-1}(k)\cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = g(k) \quad (18.1)$$

kennen wir bereits aus Satz 16.1 und Satz 16.2. Von dort ist bekannt, daß sich jede Lösung von (18.1) als Summe einer fest vorgegebenen Lösung der inhomogenen Gleichung (18.1) und einer geeigneten Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$f_n(k)\cdot y_{k+n} + f_{n-1}(k)\cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k)\cdot y_{k+1} + f_0(k)\cdot y_k = 0 \quad (18.2)$$

beschreiben läßt. Man kennt also die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung (18.1), wenn man eine einzige spezielle Lösung von (18.1) und die Lösungsgesamtheit der zugehörigen homogenen Gleichung kennt.

Derartige Kenntnisse in bezug auf die Lösungsgesamtheit der Gleichung (18.2) liegen insbesondere aus § 17 für den Fall konstanter Koeffizientenfunktionen

$$f_n(k) = 1,\ f_{n-1}(k) = a_{n-1}, \ldots,\ f_1(k) = a_1,\ f_0(k) = a_0$$

vor, mit dem wir uns im folgenden eingehender befassen wollen. Die Gleichung (18.1) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = g(k) \quad (18.3)$$

Wir stehen im folgenden somit vor der Aufgabe, für verschiedene Funktionstypen $g(k)$ spezielle Lösungen der Gleichung (18.3) zu finden. Daß es zur Lösung dieser Aufgabe kein Patentrezept geben kann, ist wegen der unübersehbaren Fülle möglicher Funktionstypen für $g(k)$ plausibel. Einzelne Methoden haben wir im Abschnitt [11.3] anläßlich der Diskussion von Gleichungen erster Ordnung kennengelernt.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall:

[18.1] Konstante Inhomogenität

Bei einer Gleichung des Typs

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b, \text{ mit } b \neq 0 \tag{18.4}$$

empfiehlt es sich, zunächst nach einer konstanten Lösung

$$y_0 = y_1 = y_2 = \ldots = y_k = \ldots$$

zu suchen. Durch Ausklammern der y_i auf der linken Seite von (18.4) erkennen wir unmittelbar:

Satz 18.1

> Eine konstante Lösung der Gleichung (18.4) existiert genau dann, wenn
>
> $$1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \neq 0.$$

Die eindeutig bestimmte konstante Lösungsfolge ist dann gegeben durch

$$y_k = \frac{b}{1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0} \tag{18.5}$$

Dieses Ergebnis ist eine unmittelbare Verallgemeinerung von Satz 16.3.

Als weitaus schlagkräftigere Methode zur Gewinnung spezieller Lösungen erweist sich jedoch das in § 12 bereits dargestellte Verfahren der Homogenisierung, das wir im folgenden ausbauen wollen.

[18.2] Das charakteristische Polynom im Prozeß der Homogenisierung

Die zu (18.4) gehörende homogenisierte Gleichung erhalten wir nach dem in § 12 dargestellten Verfahren wie folgt:

Subtraktion der Gleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \tag{18.6}$$

von

$$y_{k+n+1} + a_{n-1}y_{k+n} + \ldots + a_2 y_{k+3} + a_1 y_{k+2} + a_0 y_{k+1} = b \tag{18.7}$$

führt zur homogenisierten Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k+n+1} &+ (a_{n-1} - 1)y_{k+n} + (a_{n-2} - a_{n-1})y_{k+n-1} + \ldots \\ &\ldots + (a_1 - a_2)y_{k+2} + (a_0 - a_1)y_{k+1} - a_0 y_k = 0 \end{aligned} \tag{18.8}$$

Nach Satz 12.1 ist jede Lösung von (18.6) auch eine Lösung der homogenisierten Gleichung (18.8). Wir stehen also vor der Aufgabe:

1. die Lösungsgesamtheit von (18.8) zu ermitteln und
2. aus dieser Lösungsgesamtheit diejenigen Lösungen herauszufiltern, die zusätzlich die Gleichung (18.6) erfüllen.

Das charakteristische Polynom der zu (18.6) gehörenden homogenen Gleichung ist

$$p(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1m + a_0 \tag{18.9}$$

Zur homogenisierten Gleichung (18.8) gehört das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_1(m) &= m^{n+1} + (a_{n-1} - 1)m^n + (a_{n-2} - a_{n-1})m^{n-1} + \ldots \\ &\quad \ldots + (a_1 - a_2)m^2 + (a_0 - a_1)m - a_0 \end{aligned} \tag{18.10}$$

Eine leichte Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} p_1(m) &= m^{n+1} + a_{n-1}m^n + a_{n-2}m^{n-1} + \ldots + a_1m^2 + a_0m - \\ &\quad - m^n - a_{n-1}m^{n-1} - \ldots \qquad \ldots - a_1m - a_0 = \\ &= m \cdot p(m) - p(m) = (m-1)\cdot p(m) \end{aligned}$$

Satz 18.2

Ist p(m) das charakteristische Polynom der Gleichung (18.6), so gilt für das charakteristische Polynom $p_1(m)$ der homogenisierten Gleichung (18.8):

$$p_1(m) = (m-1)\cdot p(m) \tag{18.11}$$

Das charakteristische Polynom $p_1(m)$ hängt insbesondere nicht vom Wert der konstanten Inhomogenität b ab.

In der Logik der Vorgehensweise von § 12 stellt die Diskussion der konstanten Inhomogenität die Induktionsverankerung für die Behandlung polynomialer Inhomogenitäten der Form

$$g(k) = c_rk^r + c_{r-1}k^{r-1} + \ldots + c_1k + c_0 \tag{18.12}$$

dar.

Im Prozeß der schrittweisen Reduktion des Polynomgrades r wurde die zu homogenisierende Gleichung "an der Stelle k" jeweils von derselben Gleichung "an der Stelle k + 1" subtrahiert. Wie beim Übergang von (18.6) und (18.7) zu (18.8) hat dies jedesmal die Multiplikation des zu (18.6) gehörenden charakteristischen Polynoms p(m) mit dem Faktor (m - 1) zur Folge. Wir erhalten das Ergebnis:

Satz 18.3

Es sei

$$g(k) = c_rk^r + c_{r-1}k^{r-1} + \ldots + c_1k + c_0 \tag{18.13}$$

ein Polynom vom Grade r und

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = g(k) \tag{18.14}$$

eine inhomogene Differenzengleichung n-ter Ordnung. Ist p(m) das charakteristische Polynom der zu (18.14) gehörenden homogenen Gleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0, \qquad (18.15)$$

so hat das charakteristische Polynom der im Sinne des Homogenisierungsprozesses von § 12 zu (18.14) gehörenden homogenisierten Gleichung die Gestalt:

$$\hat{p}(m) = (m-1)^{r+1} \cdot p(m) \qquad (18.16)$$

Auch dieses charakteristische Polynom ist unabhängig von den Koeffizienten des Polynoms $g(k)$.

Das charakteristische Polynom $\hat{p}(m)$ der durch Homogenisierung aus (18.14) entstehenden homogenen Differenzengleichung hat also die mindestens $(r+1)$-fache Mehrfachwurzel 1 zusätzlich zu den Wurzeln

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

des Polynoms $p(m)$. Sind die Wurzeln $m_1, m_2, \ldots, m_n$ alle von 1 und untereinander verschieden, so ist

$$(m_1^k), (m_2^k), \ldots, (m_n^k), (1), (k), (k^2), \ldots, (k^r) \qquad (18.17)$$

ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit der homogenisierten Gleichung. Ist andernfalls etwa noch

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 1 \quad \text{und} \quad m_i \neq 1 \text{ für } s < i \leq n, \qquad (18.18)$$

so ist entsprechend den Ausführungen in Abschnitt [17.5]

$$(1), (k), (k^2), \ldots, (k^{s-1}), (m_{s+1}^k), \ldots, (m_n^k), (k^s), \ldots, (k^{s+r}) \qquad (18.19)$$

ein solches Fundamentalsystem. Wir nehmen $m_i \neq m_j$ für $s < i, j \leq n$ an, um die Verhältnisse nicht zu kompliziert zu machen.

Im ersten Fall lautet die "allgemeine Lösung" der homogenisierten Gleichung, mit den Konstanten $C_1, \ldots, C_{n+r}$:

$$y_k = \underbrace{C_1 m_1^k + C_2 m_2^k + \ldots + C_n m_n^k}_{=:\, u_k} + \underbrace{C_{n+1} + C_{n+2}k + C_{n+3}k^2 + \ldots + C_{n+r+1}k^r}_{=:\, v_k} \qquad (18.20)$$

und im zweiten Fall:

$$y_k = \underbrace{C_1 + C_2 k + \ldots + C_s k^{s-1} + C_{s+1} m_{s+1}^k + \ldots + C_n m_n^k}_{=:\, u_k} + \underbrace{C_{n+1}k^s + \ldots + C_{n+r+1}k^{s+r}}_{=:\, v_k} \qquad (18.21)$$

Da die Folge (u_k) für jede Belegung der Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ eine Lösung der zu (18.14) gehörenden homogenen Gleichung ist, kann dieser Bestandteil bei der Suche nach einer speziellen Lösung von (18.14) weggelassen werden, und wir erkennen:

Satz 18.4

Die inhomogene Differenzengleichung (18.14) mit polynomialer Inhomogenität vom Grade r

$$g(k) = c_r k^r + c_{r-1} k^{r-1} + \ldots + c_1 k + c_0$$

besitzt eine spezielle Lösung ebenfalls in der Form eines Polynoms h(k).

Hat das charakteristische Polynom der zu (18.14) gehörenden homogenen Gleichung genau s-mal die Wurzel 1, so ist das Polynom h(k) vom Grade s + r und von der Form

$$h(k) = C_{n+1} k^s + \ldots + C_{n+r+1} k^{s+r}. \tag{18.22}$$

Zur endgültigen Ermittlung der speziellen Lösung y* gehört natürlich noch die Festlegung der unbekannten Koeffizienten $C_{n+1}, \ldots, C_{n+r}$. Dies kann mit Hilfe der in Abschnitt [11.3] erwähnten Methode der unbestimmten Koeffizienten erfolgen, die in Abschnitt [11.4] am Beispiel einer Exponentialfunktion erläutert wurde und die im folgenden auf weitere Funktionstypen angewandt werden soll.

[18.3] Diskussion von Beispielen und speziellen Funktionstypen

Beispiel 1

Wir greifen noch einmal die Lagerhaltungsgleichung aus Abschnitt [16.2] auf:

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \tag{18.23}$$

Im Falle $1 + a_1 + a_0 \neq 0$ gibt es die konstante Lösung

$$y_k = \frac{b}{1 + a_1 + a_0}.$$

Wir wollen deshalb nur den Fall

$$1 + a_1 + a_0 = 0 \tag{18.24}$$

betrachten.

Das charakteristische Polynom der zu (18.23) gehörenden homogenen Gleichung ist

$$p(m) = m^2 + a_1 m + a_0;$$

es besitze die Wurzeln m_1 und m_2.

In Verbindung mit den Wurzelsätzen von Vieta (13.12)

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= a_0 \\ m_1 + m_2 &= -a_1 \end{aligned}\right. \tag{18.25}$$

folgt aus (18.24):

$$1 - m_1 - m_2 + m_1 m_2 = 0,$$

also

$$(m_1 - 1)(m_2 - 1) = 0;$$

das heißt,

$$m_1 = 1 \quad \text{oder} \quad m_2 = 1 \tag{18.26}$$

Erster Fall: Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m_1 = 1$ und $m_2 \neq 1$. Dann ist nach Satz 18.4 eine spezielle Lösung:

$$y_k^* = h(k) = C \cdot k$$

Eingesetzt in (18.23), ergibt das:

$$C(k+2) + a_1 C(k+1) + a_0 Ck = b,$$

also

$$Ck\underbrace{(1 + a_1 + a_0)}_{=0} + 2C + a_1 C = b$$

Aus $m_1 = 1$ folgt mit Vieta und der in diesem Fall gemachten Voraussetzung:

$$a_0 = m_2 \neq 1$$

Also ist

$$2 + a_1 \neq 1 + a_1 + a_0 = 0,$$

und wir ermitteln die Konstante C zu:

$$C = \frac{b}{2 + a_1}$$

Eine spezielle Lösung von (18.23) lautet also:

$$y_k^* = \frac{b}{2 + a_1} \cdot k \tag{18.27}$$

Die allgemeine Lösung hat in diesem Fall somit die Form:.

$$y_k = C_1 + C_2 \cdot m_2^k + \frac{b}{2 + a_1} \cdot k \tag{18.28}$$

Zweiter Fall: Es sei $m_1 = m_2 = 1$. Dann ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$y_k^* = C k^2.$$

Einsetzen in (18.23) ergibt:

$$C(k+2)^2 + a_1 C(k+1)^2 + a_0 C k^2 = b$$

Die Koeffizienten von k^2 heben sich wegen $1 + a_1 + a_0 = 0$ auf. Für die Koeffizienten von k gilt wegen

$$a_1 = -m_1 - m_2 = -2 \tag{18.29}$$

ebenfalls:

$$C \cdot 4 + a_1 \cdot C \cdot 2 = 2 \cdot C \cdot (2 + a_1) = 0$$

Schließlich ergibt der Vergleich der zu k^0 gehörenden Koeffizienten:

$$C \cdot 4 + a_1 \cdot C = b$$

Nach (18.29) ist $4 + a_1 = 2$, und wir erhalten das Ergebnis:

$$C = \frac{b}{2}$$

Eine spezielle Lösung von (18.23) ist in diesem Fall also

$$y_k^* = \frac{b}{2} \cdot k^2, \tag{18.30}$$

und die allgemeine Lösung von (18.23) ist:

$$y_k = C_1 + C_2 \cdot k + \frac{b}{2} \cdot k^2 \tag{18.31}$$

Beispiel 2

Wir betrachten die Differenzengleichung:

$$S_{k+1} - S_k = (k+1)^4 \tag{18.32}$$

Bei Wahl des Anfangswertes $S = 1 = 1^4$ erhält man:

$$S_k = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 \tag{18.33}$$

Die zu (18.32) gehörende homogene Gleichung

$$S_{k+1} - S_k = 0$$

hat das charakteristische Polynom $p(m) = m - 1$ mit der Wurzel $m_1 = 1$. Nach Satz 18.4 existiert mindestens eine spezielle Lösung der Form

$$S_k^* = C_1 k + C_2 k^2 + C_3 k^3 + C_4 k^4 + C_5 k^5. \tag{18.34}$$

Eingesetzt in (18.32), ergibt dies:

$$\begin{aligned} &S_{k+1}^* - S_k^* = \\ &= C_1(k+1) + C_2(k+1)^2 + C_3(k+1)^3 + C_4(k+1)^4 + C_5(k+1)^5 - \\ &\quad - C_1 k - C_2 k^2 - C_3 k^3 - C_4 k^4 - C_5 k^5 = (k+1)^4 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$C_1 + C_2\left((k+1)^2 - k^2\right) + \ldots + C_5\left((k+1)^5 - k^5\right) = (k+1)^4$$

Mit dem binomischen Lehrsatz folgt weiter:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2(2k+1) + C_3(3k^2 + 3k + 1) + C_4(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) + \\ &\quad + C_5(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich nach den Potenzen von k ergibt das gestaffelte lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 &= 1 \\ 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 &= 4 \\ 3C_3 + 6C_4 + 10C_5 &= 6 \\ 4C_4 + 10C_5 &= 4 \\ 5C_5 &= 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$C_5 = \frac{1}{5}; \quad C_4 = \frac{1}{2}; \quad C_3 = \frac{1}{3}; \quad C_2 = 0; \quad C_1 = -\frac{1}{30}.$$

Die spezielle Lösung S_k^*, die in (18.34) mit Hilfe der unbestimmten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_5$ dargestellt wurde, lautet somit:

$$S_k^* = \frac{1}{5}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k \tag{18.35}$$

Ihr Anfangswert ist

$$S_1^* = 1,$$

und mit (18.33) folgt somit die Identität:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 = \frac{1}{5}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k \tag{18.36}$$

Bemerkung zum Beispiel 2

Aus Satz 18.4 folgt allgemein, daß die Summe der r-ten Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + k^r$$

als ein Polynom vom Grade $r + 1$ in der Variablen k darstellbar ist.

Es ist an der Zeit, die bisher mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten gemachten Erfahrungen bewußt zu reflektieren. Die beiden vorangehenden Beispiele sind Spezialfälle polynomialer Inhomogenitäten. Für diesen Funktionstyp gibt es, wie auch allgemein in Satz 18.4 formuliert, stets spezielle Lösungen der Differenzengleichung in Form von Polynomen. Die Dynamische-Prämien-Gleichung (11.18) hatte eine exponentielle Inhomogenität. Wir fanden eine spezielle Lösung in Form einer Exponentialfunktion. Diese Beispiele legen allgemein eine Vorgehensweise nach der folgenden plausiblen Methode nahe:

> Bei der Suche nach speziellen Lösungen inhomogener linearer Differenzengleichungen versuche man Lösungen zu finden, die vom selben Funktionstyp wie die Inhomogenitätsfunktion sind.

Das Prädikat "vom selben Funktionstyp" darf dabei nicht zu eng interpretiert werden. Einen Funktionstyp in diesem Sinne stellen zwar die Exponentialfunktionen oder auch die Polynome dar, nicht jedoch z. B. die konstanten Funktionen oder die linearen Funktionen.

Wir wollen beim nächsten Beispiel konsequent nach obiger Methode vorgehen.

Beispiel 3

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = A \cdot \sin(bk) + B \cdot \cos(bk) \tag{18.37}$$

A, B und b seien ebenso wie a_1 und a_0 feste Koeffizienten.

Wir versuchen, eine spezielle Lösung von ähnlichem trigonometrischem Typ unter Einbringung der zunächst unbestimmten Koeffizienten D und E zu finden:

$$y_k^* = D \cdot \sin(bk) + E \cdot \cos(bk) \tag{18.38}$$

Einsetzen in (18.37) liefert:

$$D\cdot\sin\{b(k+2)\} + E\cdot\cos\{b(k+2)\} + a_1\Big(D\cdot\sin\{b(k+1)\} + E\cdot\cos\{b(k+1)\}\Big) +$$
$$+ a_0\Big(D\cdot\sin(b\,k) + E\cdot\cos(b\,k)\Big) = A\cdot\sin(b\,k) + B\cdot\cos(b\,k)$$

Unter Einbringung der Additionstheoreme (15.17) erhalten wir:

$$(D\cdot\cos 2b - E\cdot\sin 2b + a_1 D\cdot\cos b - a_1 E\cdot\sin b + a_0 D)\cdot\sin bk +$$
$$+ (D\cdot\sin 2b + E\cdot\cos 2b + a_1 D\cdot\sin b + a_1 E\cdot\cos b + a_0 E)\cdot\cos bk =$$
$$= A\cdot\sin bk + B\cdot\cos bk$$

Der Versuch, die Koeffizienten anzugleichen, ergibt:

$$D\cdot(\cos 2b + a_1\cos b + a_0) - E\cdot(\sin 2b + a_1\sin b) = A$$
$$D\cdot(\sin 2b + a_1\sin b) + E\cdot(\cos 2b + a_1\cos b + a_0) = B$$

Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} d &= \cos 2b + a_1\cos b + a_0 \\ e &= \sin 2b + a_1\sin b \end{aligned}\right\} \tag{18.39}$$

erhalten wir

$$D\,d - E\,e = A$$
$$D\,e + E\,d = B$$

und nach naheliegender Rechnung (für $d^2 + e^2 \neq 0$):

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{A\,d + B\,e}{d^2 + e^2} \\ E &= \frac{B\,d - A\,e}{d^2 + e^2} \end{aligned}\right\} \tag{18.40}$$

Aufgabe 18.1

Zeigen Sie: Mit obigen Bezeichnungen ist:

$$d^2 + e^2 = 1 + a_1^2 + a_0^2 + 2\,a_1(1 + a_0)\cos b + 2\,a_0\cos 2b \tag{18.41}$$

Als besonders für physikalische Anwendungen wichtigen Sonderfall betrachten wir die speziellen Werte

$$a_1 = -2 \quad \text{und } A = 0. \tag{18.42}$$

Gleichung (18.37) lautet dann:

$$y_{k+2} - 2\,y_{k+1} + a_0 y_k = B\cos(b\,k) \tag{18.43}$$

Die Werte für d, e und $d^2 + e^2$ vereinfachen sich zu

$$\left.\begin{aligned} d &= 2\cos b\,(\cos b - 1) + (a_0 - 1) \\ e &= 2\sin b\,(\cos b - 1) \\ d^2 + e^2 &= 4(\cos b - 1)(a_0\cos b - 1) + (a_0 - 1)^2 \end{aligned}\right\} \tag{18.44}$$

Die in (18.38) angenommene Testfunktion lautet somit:

$$y_k^* = B\cdot\frac{2(\cos b - 1)\cos(b\,k - b) + (a_0 - 1)\cos b\,k}{4(\cos b - 1)(a_0\cos b - 1) + (a_0 - 1)^2} \tag{18.45}$$

Aufgabe 18.2

a) Verifizieren Sie die in (18.44) gegebenen Gleichungen.

b) Zeigen Sie, daß die in (18.45) gegebene Funktion y_k^* eine Lösung der Gleichung (18.43) darstellt.

Die zu (18.43) gehörende homogene Gleichung

$$y_{k+2} - 2\,y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \tag{18.46}$$

hat das charakteristische Polynom $m^2 - 2\,m + a_0$ mit den Nullstellen

$$m_1 = 1 + \sqrt{1-a_0} \quad \text{und} \quad m_2 = 1 - \sqrt{1-a_0}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (18.46) lautet also für $a_0 \neq 1$:

$$y_k = C_1\,(1 + \sqrt{1-a_0}\,)^k + C_2\,(1 - \sqrt{1-a_0}\,)^k;$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$y_k = C_1\,(1 + \sqrt{1-a_0}\,)^k + C_2(1 - \sqrt{1-a_0}\,)^k + y_k^* \tag{18.47}$$

mit y_k^* aus (18.45).

[18.4] Versuchslösungen

Unsere empirisch gewonnene Vermutung, daß lineare inhomogene Differenzengleichungen häufig spezielle Lösungen von "ähnlichem Funktionstyp" wie die Inhomogenitätsfunktion besitzen, hat sich also auch für trigonometrische Funktionen als nützlich erwiesen. Wir wollen für häufig vorkommende Funktionen eine Liste möglicher Versuchslösungen aufstellen. Die Differenzengleichung sei vom Typ

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = g(k).$$

Inhomogenitätsfunktion $g(k)$	Versuchslösung y_k
b (konstante Funktion)	C (konstante Lösung; beachte (#))
k^n	$C_0 + C_1 k + \ldots + C_n k^n$; beachte (#)
Polynom vom Grad r	Polynom vom Grad r + s, wo s die Vielfachheit der Nullstelle 1 im charakteristischen Polynom darstellt
a^k	$C \cdot a^k$
$a^k \cdot k^n$	$a^k \cdot (C_0 + C_1 k + \ldots + C_n k^n)$
cos(bk) bzw. sin(bk)	$C_1 \cdot \sin(bk) + C_2 \cdot \cos(bk)$
$a^k \cdot \sin(bk)$ bzw. $a^k \cdot \cos(bk)$	$a^k \left(C_1 \cdot \sin(bk) + C_2 \cdot \cos(bk)\right)$
(#) Dieser Lösungsansatz führt jedoch nur dann zum Erfolg, wenn das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung nicht die Nullstelle 1 besitzt.	

Tab. 18.1

Gelegentlich setzt sich die Inhomogenität additiv aus zwei Funktionen zusammen. Es sei etwa:

$$y_{k+n} + f_{n-1}(k) \cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = g(k) + h(k) \quad (18.48)$$

Kennt man nun etwa spezielle Lösungen der Gleichungen

$$y_{k+n} + f_{n-1}(k) \cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = g(k) \quad (18.49)$$

$$y_{k+n} + f_{n-1}(k) \cdot y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k) \cdot y_{k+1} + f_0(k) \cdot y_k = h(k), \quad (18.50)$$

so liegt die Frage nahe, ob die Summe dieser speziellen Lösungen eine spezielle Lösung von (18.48) ist. Die Richtigkeit dieser Vermutung bestätigt der

Satz 18.5 (Superpositionssatz)

Ist y_k^* bzw. y_k^{**} eine spezielle Lösung der Gleichung (18.49) bzw. (18.50), so ist $y_k^* + y_k^{**}$ eine spezielle Lösung der Gleichung (18.48).

Aufgabe 18.3

Beweisen Sie Satz 18.5.

Bemerkung

Satz 18.5 kann auch bei der Diskussion polynomialer Inhomogenitäten eingesetzt werden, wenn man ein Polynom als Summe von Funktionen des Typs $a_i k^i$ ansieht.

Aufgabe 18.4

a) Stellen Sie die rekursiv gegebene Funktion

$$S_{k+1} = S_k + k^5$$

für den Anfangswert $S_1 = 1$ in geschlossener Form dar (vgl. [18.3], Beispiel 2).

b) Führen Sie Entsprechendes für die Gleichung

$$S_{k+1} = S_k + k^6$$

durch.

Aufgabe 18.5

a) Zeigen Sie, daß die in der Tabelle 18.1 gegebene Inhomogenität $a^k \cdot k^n$ eine spezielle Lösung von der dort angegebenen Form besitzt.

b) Zeigen Sie das Entsprechende für die Inhomogenität $a^k \cdot \sin(bk)$.

Aufgabe 18.6

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y_{k+1} - y_k = (a-2) \cdot k + 1, \quad (18.51)$$

in der a eine fest vorgegebene natürliche Zahl sei.

b) Legen Sie die Lösungsfolge so fest, daß $y_1 = 1$ ist.

Aufgabe 18.7

Schreiben Sie, falls Sie Zugang zu einem Computer haben, ein Universalprogramm zur iterativ-numerischen Auswertung von Differenzengleichungen.

a) Das Programm sollte lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität bewältigen. Es sollte so konzipiert sein, daß die Ordnung der Gleichung, die Koeffizienten, die Inhomogenität und die beliebigen Anfangswerte $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ zu Beginn jedes Programmablaufes einzugeben sind.

b) Erweitern Sie das in a) beschriebene Programm so, daß es auch nicht-konstante Inhomogenitäten bewältigt.

Schreiben Sie das Programm übersichtlich im Rahmen der Ihnen zur Verfügung stehenden Strukturierungsmittel. Versehen Sie sowohl die Programmliste als auch (während des Programmablaufes) Eingabe- und Ausgabeoperationen mit erläuternden Kommentaren.

[18.5] Konvergenz, Stabilität, Gleichgewicht

Wir betrachten zunächst, des exemplarischen Charakters wegen, die Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b. \tag{18.52}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung hängt von den Wurzeln m_1 und m_2 des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$m^2 + a_1 m + a_0 \tag{18.53}$$

ab. Sind m_1 und m_2 beide von 1 und voneinander verschieden, so lautet die allgemeine Lösung nach (18.20)

$$y_k = C_1 m_1{}^k + C_2 m_2{}^k + C_3. \tag{18.54}$$

Wie wir bereits in Satz 8.2 gesehen haben, konvergieren die Folgen $(m_i{}^k)_k$ genau dann, wenn $|m_i| < 1$ ist $(i = 1, 2)$. Ein fundamentales und unschwer zu zeigendes Ergebnis über die Konvergenz von Folgen besagt:

Satz 18.6 (Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit den algebraischen Verknüpfungen)

Die Folgen (A_k) und (B_k) seien konvergent mit $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ und $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$.

a) Dann konvergieren auch die Folgen $(A_k + B_k)$ und $(A_k \cdot B_k)$. Darüber hinaus ist

$$\lim_{k\to\infty} (A_k + B_k) = A + B \quad \text{und} \quad \lim_{k} (A_k \cdot B_k) = A \cdot B$$

b) Ist für alle k $B_k \neq 0$ und $B \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $\left(\frac{A_k}{B_k}\right)$, und es ist

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{A_k}{B_k}\right) = \frac{A}{B}.$$

c) Aus a) folgt insbesondere für die Multiplikation mit einer Konstanten C: Die Folge $(C\cdot A_k)$ konvergiert, und es ist

$$\lim_{k\to\infty} (C\cdot A_k) = C\cdot A.$$

Mit Satz 18.6 folgt aus der Darstellung (18.54) sofort, daß die Lösungsfolge y_k unabhängig von den Koeffizienten C_1, C_2 und C_3 konvergiert, falls $|m_1| < 1$ und $|m_2| < 1$ ist. In diesem Falle sagt man auch: "Die allgemeine Lösung (18.54) der Gleichung (18.52) konvergiert."

Liegt umgekehrt Konvergenz der Folge y_k vor, so folgt , wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|m_1| > |m_2|$ gilt,

$$y_k = m_1^{\,k}\left(C_1 + C_2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^k\right) + C_3.$$

Wegen $\left|\frac{m_2}{m_1}\right| < 1$ wird das Konvergenzverhalten von y_k also vom Faktor m_1 bestimmt. Es gilt somit: Bei verschiedenen Wurzeln m_1 und m_2 konvergiert die Folge y_k aus (18.54) *genau dann*, wenn $|m_1| < 1$ und $|m_2| < 1$ ist.

Für den Grenzwert der Folge (18.54) gilt auf Grund der Gleichung (18.52):

$$\lim_{k\to\infty} (y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k) = b;$$

also wegen $\lim\limits_{k\to\infty} y_{k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \frac{b}{1 + a_1 + a_0} \quad (\text{für } 1 + a_1 + a_0 \neq 0).$$

Der Grenzwert der Folge y_k ist also stets (und insbesondere unabhängig von den Anfangswerten) die konstante Lösung.

Wie wir in Abschnitt [18.3], Beispiel 1 gesehen haben, ist die Bedingung

$$1 + a_1 + a_0 = 0$$

gleichwertig zu

$$m_1 = 1 \quad \text{oder} \quad m_2 = 1.$$

In der allgemeinen Lösung (18.54) tritt dann nach (18.21) mindestens ein Linearfaktor, etwa wie folgt, auf:

$$y_k = C_1 + C_2 m_2^{\,k} + C_3 k,$$

was offensichtlich die Divergenz der Folge nach sich zieht.

Auch wenn die Inhomogenität polynomialer Natur vom Grade $r \geq 1$ ist, divergieren die sich aus (18.20) und (18.21) ergebenden Lösungsfolgen.

Wir haben bisher die Voraussetzung $m_1 \neq m_2$ gemacht. Ist $m_1 = m_2 \neq 1$, so lautet die allgemeine Lösung der Gleichung (18.52):

$$y_k = C_1 m_1^k + C_2 k m_1^k + C_3 \tag{18.55}$$

Eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz der Folge y_k ist offenbar $|m_1| < 1$.

Allerdings könnte der Faktor km_1^k das Konvergenzverhalten stören.

Daß dies nicht der Fall ist, zeigt die Lösung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 18.8

Zeigen Sie:

a) Die Folge $(k \cdot q^k)_k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

b) Die Folge $(k^n \cdot q^k)_k$ konvergiert für festes $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $|q| < 1$.

Im Falle der Gleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \tag{18.56}$$

verlaufen die soeben für den Fall $n = 2$ durchgeführten Überlegungen völlig analog.

Satz 18.7

Das zu (18.56) gehörende charakteristische Polynom

$$m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$$

besitze die Nullstellen $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Die in (18.20) oder (18.21) gegebene allgemeine Lösung y_k konvergiert genau dann, wenn $|m_i| < 1$ (für $i = 1, \ldots, n$).

Im Falle der Konvergenz gilt weiterhin

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \frac{b}{1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0} = \text{konstante Lösung.}$$

Die konstante Lösung

$$y_k^* = \frac{b}{1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0}$$

heißt auch *Gleichgewichtswert* der Differenzengleichung. Dieser Gleichgewichtswert bzw. die gegebene Differenzengleichung wird als *stabil* bezeichnet, wenn jede Lösungsfolge unabhängig von den Anfangswerten gegen ihn konvergiert.

Es wäre wünschenswert, wenn man das Konvergenzverhalten jeder die Gleichung (18.56) erfüllenden Folge nicht erst an den Wurzeln des charakteristischen Polynoms, sondern bereits an den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_{n-1}$ der Gleichung selbst ablesen könnte. Die Suche nach praktikablen Kriterien stellt ein umfangreiches Teilgebiet der Theorie der Differenzengleichungen und ihrer Anwendungen dar; siehe z. B. (Rommelfanger, 4.3).

Für die durch (18.52) gegebene Gleichung zweiter Ordnung gelten die in der folgenden Aufgabe gegebenen Kriterien:

Aufgabe 18.9

Zeigen Sie: Für die Wurzeln m_1 und m_2 des charakteristischen Polynoms

$$m^2 + a_1 m + a_0$$

gilt genau dann $|m_1| < 1$ und $|m_2| < 1$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$1 + a_1 + a_0 > 0$$
$$1 - a_1 + a_0 > 0$$
$$1 - a_0 > 0$$

Aufgabe 18.10 Reflexion der Existenz konstanter Lösungen

Wir wissen bereits, daß in bezug auf die inhomogene lineare Gleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \text{ (mit } b \neq 0) \qquad (*)$$

die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

(I) Die Gleichung (*) besitzt eine konstante Lösung.

(II) $1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \neq 0$

Von Satz 18.4 her wissen wir weiterhin, daß wir unter der Voraussetzung von Bedingung

(III) Das charakteristische Polynom

$$p(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$$

der zu (*) gehörenden homogenen Gleichung besitzt die Nullstelle 1,

nach einer speziellen polynomialen Lösung mindestens ersten Grades von (*) zu suchen haben.

a) Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung von Bedingung (III) besitzt die Gleichung (*) keine konstante Lösung.

b) Begründen Sie, warum Aufgabenteil a) in Verbindung mit Satz 18.4 die Gleichwertigkeit der Bedingung (I) mit der Negation von Bedingung (III) bedeutet (symbolisch: (I) $\Longleftrightarrow \neg$(III)).

Bemerkung

Aus (I) $\Longleftrightarrow$ (II) und (I) $\Longleftrightarrow \neg$(III) folgt ersichtlich (II) $\Longleftrightarrow \neg$(III).

In den Aussagen (II) und (III) kommen Differenzengleichungen überhaupt nicht mehr vor. Wir haben über den Umweg der Differenzengleichungen somit das folgende rein algebraische Ergebnis gewonnen:

Folgerung

Das Polynom

$$p(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$$

besitzt genau dann die Nullstelle 1, wenn für seine Koeffizientensumme gilt:

$$1 + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0.$$

c) Beweisen Sie die Aussage der Folgerung direkt (durch Einsetzen der Nullstelle 1 in das Polynom).

d) Informieren Sie sich z. B. in (v. d. Waerden) oder in (Bronstein-Semendjajew) über die Lösungen von Gleichungen n-ten Grades und die dort geltende Verallgemeinerung des Wurzelsatzes von Vieta.

   Folgern Sie daraus direkt die Gleichwertigkeit von Bedingung (II) mit der Negation von Bedingung (III).

e) Schauen Sie sich noch einmal Beispiel 1 in Abschnitt [18.3] an.

V INNERMATHEMATISCHE ANWENDUNGEN

§ 19 Figurierte Zahlen

Der ausgeprägte Sinn der Griechen für Ästhetik und ihre Art und Weise, Mathematik zu treiben, beeinflußten sich gegenseitig. So war Mathematik für die Griechen im wesentlichen Geometrie. Arithmetische Sachverhalte gewannen ihre volle Bedeutung aus der geometrischen Interpretation heraus. Ein Themenkreis, in dem die enge Verschmelzung geometrischer und arithmetischer Denkweisen besonders gut zur Geltung kommt, ist das Gebiet der figurierten Zahlen.

Wir betrachten die untenstehenden Punktmuster.

Die unter den Punktmustern in Abbildung 19.1 stehenden Zahlen heißen *Dreieckszahlen*, die Zahlen in Abbildung 19.2 *Quadratzahlen*. Die Namensgebung erklärt sich von selbst. Die aufgezeichneten endlich vielen Punktmuster tragen immanent den Charakter der Fortsetzbarkeit in sich. Bezeichnen wir etwa die Dreieckszahlen mit D_k ($k = 1, 2, \ldots$) und die Quadratzahlen mit Q_k, so entnehmen wir den Punktmustern unmittelbar die rekursiven Konstruktionsvorschriften:

$$D_{k+1} = D_k + k + 1 \qquad \text{(Anfangswert: } D_1 = 1) \tag{19.1}$$

$$Q_{k+1} = Q_k + 2k + 1 \qquad \text{(Anfangswert: } Q_1 = 1) \tag{19.2}$$

Die beiden rekursiven Gleichungen ermöglichen ohne weiteres die Fortsetzung der zugehörigen Folgen über den Index $k = 5$ hinaus. Ein Computer kann hierbei, wie in ähnlichen Situationen schon oft, nützliche Dienste leisten. Aus verschiedenen Gründen, insbesondere zum Erkennen von Gesetzmäßigkeiten, ist man aber auch an der expliziten Darstellung der Folgen interessiert. In bezug auf die Quadratzahlen erkennt man durch bloßes Hinsehen

$$Q_k = k^2 \tag{19.3}$$

(vgl. auch Aufgabe 4.8). Die Dreieckszahlen bildeten unser Eingangsbeispiel zur Erläuterung des Prinzips der vollständigen Induktion; mit (4.2) erhalten wir

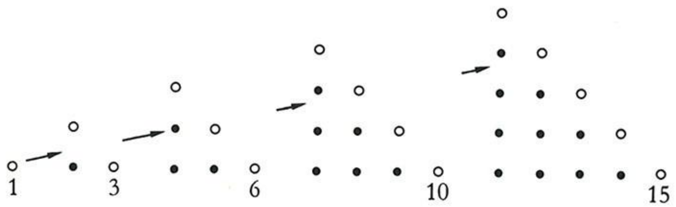


Abb. 19.1

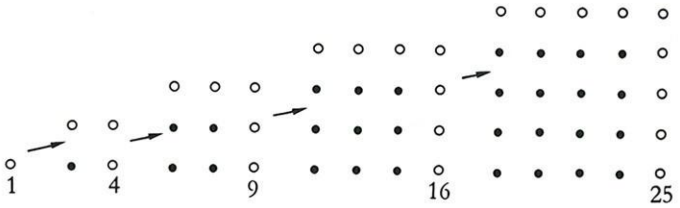


Abb. 19.2

$$D_k = \frac{k(k+1)}{2} \, . \qquad (19.4)$$

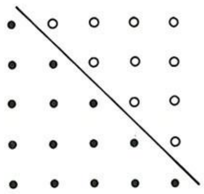
Die eingangs gegebene geometrische Deutung der Dreiecks- und der Viereckszahlen ermöglicht die Entdeckung vieler Gesetzmäßigkeiten. So erkennen wir an Abbildung 19.3 die Relation

$$D_5 + D_4 = Q_5 ,$$

die sich unmittelbar wie folgt verallgemeinern läßt:

$$D_{k+1} + D_k = Q_{k+1} \qquad (19.5)$$

Abb. 19.3



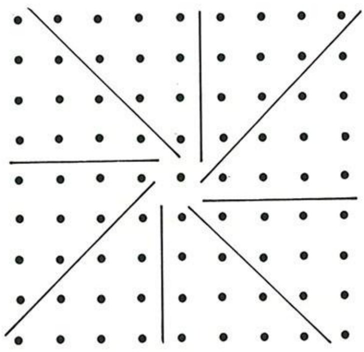


Abb. 19.4

Aufgabe 19.1

Beweisen Sie (19.5) mit vollständiger Induktion unter Verwendung der Rekursionsgleichungen (19.1) und (19.2).

Aufgabe 19.2

Mit Hilfe der Dreieckszahlen läßt sich Gleichung (4.1) wie folgt schreiben:

$$D_k^{\,2} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3$$

Stellen Sie dieses Gesetz bzw. die Form (4.1) durch ein geeignet strukturiertes Punktmuster dar.

Aufgabe 19.3

Leiten Sie aus dem Punktmuster in Abbildung 19.4 eine Relation zwischen Dreiecks- und Quadratzahlen her.

Aufgabe 19.4

a) Es sei E_k die maximale Anzahl der Gebiete, in die die Ebene durch k Geraden zerlegt wird. Begründen Sie:

$$E_{k+1} = E_k + (k + 1)$$

Geben Sie E_k explizit an.

b) Der dreidimensionale Raum werde durch k Ebenen in maximal R_k Teilräume zerlegt. Begründen Sie: $R_{k+1} = R_k + E_k$.

Geben Sie R_k explizit an.

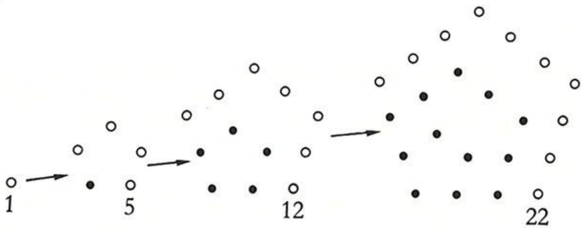


Abb. 19.5

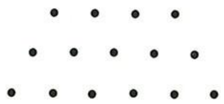


Abb. 19.6

Aufgabe 19.5

Das Punktmuster der Pentagonalzahlen (Fünfeckszahlen) beginnt wie in Abbildung 19.5.

a) Wie lautet die nächste Pentagonalzahl?

b) Setzen Sie die in Abbildung 19.5 implizit gegebene Konstruktionsvorschrift in ein rekursives Bildungsgesetz um.

c) Stellen Sie die k-te Pentagonalzahl P_k in expliziter Form dar.

Aufgabe 19.6

Zeichnen Sie eine Folge von hexagonalen (sechseckigen) Punktmustern, deren Bildungsgesetz mit den entsprechenden Regeln für Dreiecks-, Vierecks- und Fünfeckszahlen übereinstimmt. Stellen Sie die Hexagonalzahlen rekursiv und explizit dar.

Aufgabe 19.7

Die Punktezahl des Punktmusters in Abbildung 19.6 bezeichnet man als *Trapezzahl* $T_{4,3}$ (4 = Anfangszahl, 3 = Zeilenzahl). Allgemein sei

$$T_{a,k} = a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+k-1)$$

die Trapezzahl mit Anfangszahl a und Zeilenzahl k.

a) Stellen Sie $T_{a,k}$ für festes a rekursiv und explizit in Abhängigkeit von k dar.

b) Begründen Sie geometrisch am Punktmuster:

$$T_{a,k} = D_k + (a-1)k = D_{k-1} + a \cdot k$$

c) Man sagt, die natürliche Zahl n besitze eine *Trapezdarstellung*, wenn $n = T_{a,k}$ für geeignetes a und k ist.

Beispiel: $9 = 4 + 5 = T_{4,2}$

$= 2 + 3 + 4 = T_{2,3}$

$= 9 = T_{9,1}$

Jede Zahl n besitzt die "triviale" Trapezdarstellung $n = T_{n,1}$.

Zeigen Sie: Die Zweierpotenzen 2^m besitzen nur die triviale Trapezdarstellung.

Aufgabe 19.8

a) Für die Fibonacci-Zahlen

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1, \quad f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$$

gilt die Gleichung:

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}$$

Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch im Falle $k = 8$. Begründen Sie, daß sich diese spezielle geometrische Interpretation auf den allgemeinen Fall übertragen läßt.

b) Zeigen Sie, daß für die obigen Fibonacci-Zahlen weiterhin die Gleichung

$$f_k^2 = f_{k-1} \cdot f_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

gilt.
Folgern Sie daraus:

$$f_{2k}^2 = f_{2k-1} \cdot f_{2k+1} - 1$$

Erklären Sie mit Hilfe dieser Gleichung die optische Täuschung beim folgenden "Beweis" für die Behauptung "64 = 65":

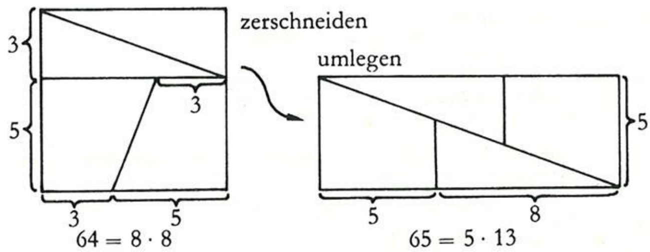


Abb. 19.7

Geben Sie mit Hilfe der obigen Gleichung weitere zu derartigen Scheinbeweisen führende Zerlegungen an.

[19.1] Polygonalzahlen

Das bisher an speziellen Vieleckstypen durchgeführte Verfahren ist offenbar auf beliebige Vielecke (Polygone) ausdehnbar. Für Polygone mit E Ecken lautet die Konstruktionsvorschrift der Punktmuster wie folgt:

Ist das k-te Punktmuster gegeben ($k \geq 2$), so erhält man daraus das $(k + 1)$-te Punktmuster, indem man einen offenen Kranz neuer Punkte so an das alte Punktmuster anlegt, daß die Randpunkte der Figur ein E-Eck bilden, auf dessen Seiten jeweils $k + 1$ Punkte liegen.

Alle neu hinzukommenden Punkte werden in diesem Sinne zu Randpunkten des neuen E-Ecks; zusätzlich bleiben die Randpunkte zweier Seiten des vorangehenden E-Ecks als Randpunkte des neuen E-Ecks erhalten.

Das Verfahren beginnt in der ersten Stufe mit einem Punkt und setzt sich in der zweiten Stufe mit einem E-Eck fort.

Wir wollen die Polygonalzahlen zum Typ des E-Ecks, die gelegentlich auch E-gonal-Zahlen genannt werden, mit $G_k(E)$ bezeichnen. Wenn - wie im folgenden - die Eckenzahl E festgehalten wird, schreiben wir auch kürzer nur G_k statt $G_k(E)$.

Zur Aufstellung eines rekursiven Bildungsgesetzes überlegen wir, daß auf E - 2 Seiten jeweils k + 1 neue Punkte dazukommen. Dabei werden allerdings die E - 3 gemeinsamen Eckpunkte doppelt gezählt. Durch entsprechende Korrektur erhalten wir:

$$G_{k+1} = G_k + (E-2)(k+1) - (E-3)$$

Eine naheliegende algebraische Umformung ergibt:

$$G_{k+1}(E) = G_k(E) + k(E-2) + 1 \tag{19.6}$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung kennen wir bereits aus Aufgabe 18.6, wobei nur der Parameter a durch E zu ersetzen ist. Wir erhalten die Lösung:

$$G_k(E) = \frac{E-2}{2} \cdot k^2 + \frac{4-E}{2} \cdot k \tag{19.7}$$

Wenn wir in (19.7) E (statt k) variieren, erhalten wir nach einer leichten Umformung

$$G_k(E+1) = G_k(E) + G_{k-1}(3), \tag{19.8}$$

wobei natürlich $G_{k-1}(3) = D_{k-1}$ ist.

Aufgabe 19.9

a) Verifizieren Sie (19.8).

b) Deuten Sie (19.8) geometrisch im Kontext der figurierten Zahlen.

Aufgabe 19.10

"Spielen" Sie mit figurierten Zahlen und versuchen Sie dabei, weitere Gesetzmäßigkeiten zu entdecken.

[19.2] Pyramidalzahlen

Eine wichtige Technik bei der Behandlung von Folgen ist ihre sukzessive Aufsummierung. Die Glieder der so erhaltenen neuen Folge nennen wir nach § 4, Beispiel 5 die Teilsummen oder Partialsummen der neuen Folge. Die Summenfolge der Dreieckszahlen lautet somit:

1, 4, 10, 20, 35,...

Diese neuen Zahlen kann man mit etwas Phantasie ebenfalls als figurierte Zahlen deuten. Man stelle sich dazu die einzelnen Punktmuster in Abbildung 19.1 als aus einer dreieckigen Pyramide herausgeschnittene Höhenschichten vor (Abb. 19.8)

Man nennt die Glieder dieser Summationsfolge deshalb auch *Pyramidalzahlen*. Ihr rekursives Bildungsgesetz lautet im allgemeinen Falle:

$$H_{k+1}(E) = H_k(E) + G_{k+1}(E) \tag{19.9}$$

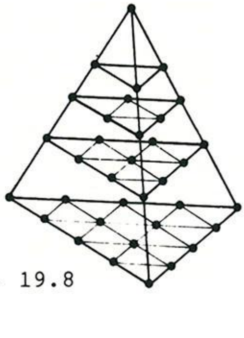


Abb. 19.8

Aufgabe 19.11

Stellen Sie die Pyramidalzahl $H_k(E)$ in expliziter Abhängigkeit von k dar.
(Anfangswerte: $H_1(E) = 1$, $H_2(E) = E + 1$.)

§ 20 Summierung

Wir wollen in diesem Paragraphen das in § 4, Beispiel 5 angegebene Prinzip der Reihenbildung mit den inzwischen entwickelten Methoden untersuchen. Die Teilsummen (Partialsummen) s_k einen gegebenen Folge (y_k) sind gegeben durch

$$s_{k+1} - s_k = y_{k+1} \tag{20.1}$$

und

$$s_{Anfang} = y_{Anfang};$$

das heißt im allgemeinen $s_1 = y_1$ oder $s_0 = y_0$.

Gleichung (20.1) kann in bezug auf die Folge (s_k) als lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung mit der Inhomogenität y_k angesehen werden. Da das charakteristische Polynom

$$p(m) = m - 1$$

der zu (20.1) gehörenden homogenen Differenzengleichung

$$s_{k+1} - s_k = 0 \tag{20.2}$$

die Nullstelle 1 besitzt, folgt aus Satz 18.4 der

Satz 20.1

Ist die Folge (y_k) in Abhängigkeit von k polynomialer Natur, etwa vom Grade r, so ist die Summenfolge (s_k) ebenfalls polynomial, und zwar vom Grade $r + 1$.

Für die Folgen aus Abschnitt [18.3], Beispiel 2 ergibt sich daraus unmittelbar die bereits von dort bekannte

Folgerung:

Die Folgenglieder s_k mit

$$s_k = 1^r + 2^r + 3^r + \ldots + k^r$$

lassen sich für jedes $r \in \mathbb{N}$ als Polynom vom Grade $r + 1$ (in k) darstellen.

Für den Fall, daß die Folge (y_k) Lösung einer linearen Differenzengleichung ist, stellt sich die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen den charakteristischen Polynomen der zu (y_k) bzw. (s_k) gehörenden homogenen Gleichungen gibt.

Die Folge (y_k) erfülle also die Differenzengleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_k, \tag{20.3}$$

deren zugehöriges charakteristisches Polynom durch

$$p(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 \tag{20.4}$$

gegeben ist. Mit (20.1) erhalten wir nach einer Indexverschiebung um +1 unmittelbar die Differenzengleichung

$$(s_{k+n+1} - s_{k+n}) + a_{n-1}(s_{k+n} - s_{k+n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + a_1(s_{k+2} - s_{k+1}) + a_0(s_{k+1} - s_k) = b_{k+1} \qquad (20.5)$$

für die Summenfolge (s_k).

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung, das man durch Ersetzen von y_{k+i} durch m^i erhält, lautet:

$$q(m) = (m^{n+1} - m^n) + a_{n-1}(m^n - m^{n-1}) + \ldots + a_1(m^2 - m) + a_0(m-1), \qquad (20.6)$$

und wir erkennen, daß

$$q(m) = (m-1)\cdot p(m) \qquad (20.7)$$

ist.

Ein Vergleich mit (18.11) zeigt, daß das charakteristische Polynom $q(m)$ der Summenfolge (s_k) mit dem durch Homogenisierung (§ 12) aus der Gleichung (20.3) entstehenden charakteristischen Polynom übereinstimmt, falls die Inhomogenität b_k konstant ist ($b_k = b$). In etwas laxer, aber einprägsamer Weise können wir somit formulieren:

Satz 20.2

Für die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b \qquad (20.8)$$

bedeuten Homogenisierung (§ 12) und Summierung im wesentlichen dasselbe.

Durch beide Prozesse wird das charakteristische Polynom $p(m)$ von Gleichung (20.8) in das Polynom

$$q(m) = (m-1)\cdot p(m)$$

übergeführt.

Aufgabe 20.1

Erweitern Sie das Universalprogramm von Aufgabe 18.7 so, daß neben der rekursiven Ermittlung der Folgenwerte y_k auch die durch (20.1) gegebenen Teilsummen s_k ausgedruckt werden.

Aufgabe 20.2

Geben Sie die untenstehenden Summenfolgen für festes $q \in \mathbb{R}$ in expliziter Form an:

a) $r_k = r_{k-1} + q^k; \quad r_1 = q$

b) $s_k = s_{k-1} + k\cdot q^k; \quad s_1 = q$

c) $t_k = t_{k-1} + k^2\cdot q^k; \quad t_1 = q$

Zeigen Sie, daß die Folgen jeweils für $|q| < 1$ konvergieren, und bestimmen Sie:

a') $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$

b') $\lim_{k \to \infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k$

c') $\lim_{k \to \infty} t_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^k$

§ 21 Flächeninhalte

Beispiel 1

Wir untersuchen im folgenden die Frage, wie sich die Flächeninhalte der in Abbildung 21.1 gegebenen Gebiete A und B verhalten. Die Grenze zwischen A und B sei dabei gegeben durch die Parabel

$$y = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2.$$

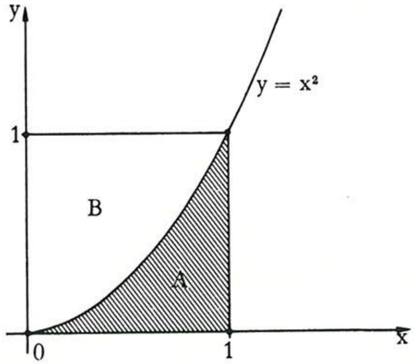


Abb. 21.1

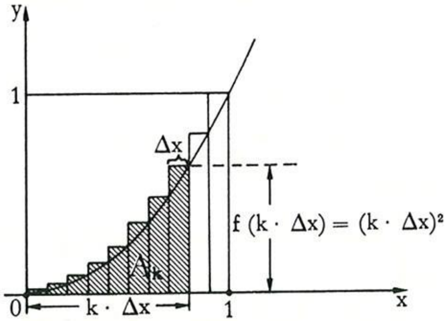


Abb. 21.2

Die Grundidee ist, die Fläche A durch eine Folge von Rechtecksflächen anzunähern (Abb. 21.2).

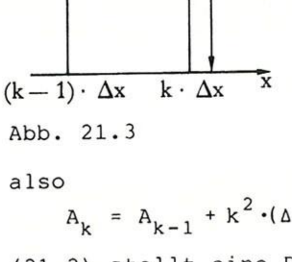


Abb. 21.3

Wir unterteilen dazu das Intervall $[0, 1]$ auf der x-Achse in kleine, gleich große Abschnitte der Länge Δx. Das über dem Intervall $[(k-1)\cdot\Delta x,\ k\cdot\Delta x]$ liegende Flächenstück der Fläche A_k ersetzen wir durch das Rechteck mit den Seitenlängen Δx und $f(k\cdot\Delta x) = (k\cdot\Delta x)^2$.

Flächeninhalt des Rechtecks:

$$\Delta x \cdot f(k\cdot\Delta x) = k^2 \cdot (\Delta x)^3$$

Die fortlaufende Aufsummierung dieser Rechtecksflächen wird beschrieben durch die Gleichung:

$$A_k = A_{k-1} + \Delta x \cdot f(k\cdot\Delta x) \quad (\text{mit } A_0 = 0) \qquad (21.1)$$

also

$$A_k = A_{k-1} + k^2 \cdot (\Delta x)^3 \quad (\text{mit } A_0 = 0) \qquad (21.2)$$

(21.2) stellt eine Differenzengleichung für A_k mit quadratischer

Inhomogenität $k^2 \cdot (\Delta x)^3$ dar. Wegen der fest gewählten Streifenbreite Δx ist $(\Delta x)^3$ in diesem Term als Konstante anzusehen. Nach Satz 18.4 besitzt (21.2) eine spezielle Lösung der Form

$$A_k^* = C_3 k^3 + C_2 k^2 + C_1 k \tag{21.3}$$

Durch Einsetzen in (21.2) ermitteln wir die Koeffizienten C_1, C_2 und C_3. Aus

$$A_k^* - A_{k-1}^* = k^2 \cdot (\Delta x)^3$$

folgt

$$C_3 k^3 + C_2 k^2 + C_1 k - C_3 (k-1)^3 - C_2 (k-1)^2 - C_1 (k-1) = k^2 \cdot (\Delta x)^3$$

und schließlich

$$3\,C_3 k^2 - 3\,C_3 k + C_3 + 2\,C_2 k - C_2 + C_1 = (\Delta x)^3 \cdot k^2.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 3\,C_3 \qquad\qquad &= (\Delta x)^3 \\ -3\,C_3 + 2\,C_2 \qquad &= 0 \\ C_3 - C_2 + C_1 &= 0; \end{aligned}$$

also

$$C_3 = \frac{1}{3}(\Delta x)^3; \qquad C_2 = \frac{1}{2}(\Delta x)^3; \qquad C_1 = \frac{1}{6}(\Delta x)^3$$

und

$$A_k^* = \frac{1}{3}k^3 \cdot (\Delta x)^3 + \frac{1}{2}k^2 \cdot (\Delta x)^3 + \frac{1}{6}k \cdot (\Delta x)^3 . \tag{21.4}$$

Bei der Streifenbreite Δx besteht das Intervall $[0,\ 1]$ aus $n = \frac{1}{\Delta x}$ Abschnitten, und ein Näherungswert für die gesuchte Fläche A ist gegeben durch

$$A_n = \frac{1}{3}n^3(\Delta x)^3 + \frac{1}{2}n^2(\Delta x)^3 + \frac{1}{6}n(\Delta x)^3 ,$$

was wegen $n \cdot \Delta x = 1$ zu

$$A_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\Delta x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \tag{21.5}$$

vereinfacht werden kann.

Durch Verkleinerung der Streifenbreite Δx wird die gesuchte Fläche A immer besser durch die Summe A_n der Rechtecksflächen angenähert. Durch Grenzübergang erhalten wir

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} A_n = \frac{1}{3} \tag{21.6}$$

Aufgabe 21.1

Zeigen Sie durch Nachvollzug des obigen Verfahrens, daß die schraffierte Fläche in Abbildung 21.4 für beliebiges positives $x_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$A = \frac{1}{3} x_0^3 \qquad (21.7)$$

gegeben ist.

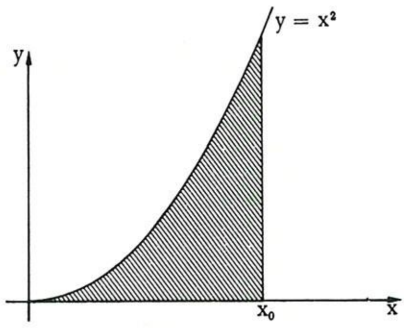


Abb. 21.4

Aufgabe 21.2

a) Lösen Sie die Differenzengleichung

$$s_{k+1} - s_k = y_k$$

mit $y_k = a \cdot k$, a sei eine feste Konstante.

b) Unterziehen Sie die Flächenberechnungsmethode einer Kontrolle! Berechnen Sie nach der Methode von Beispiel 1 die über dem Intervall $[0, x_0]$ liegende und durch den Funktionsgraphen der Funktion

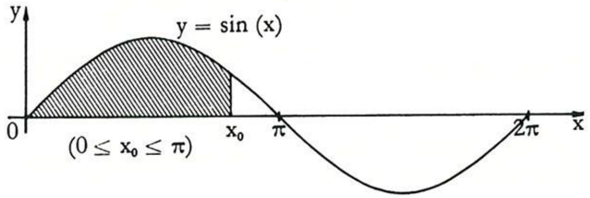
$$f: x \longrightarrow a \cdot x$$

nach oben begrenzte Fläche. Ermitteln Sie die Fläche elementargeometrisch und vergleichen Sie.

Beispiel 2

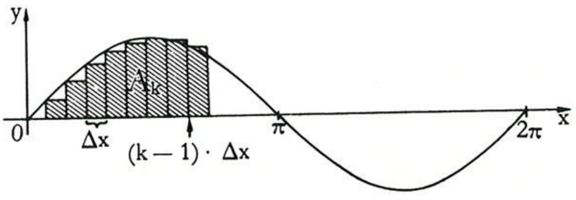
Wir wollen den Flächeninhalt der in Abbildung 21.5 schraffierten Fläche berechnen.

Abb. 21.5



Diesmal nähern wir die gesuchte Fläche durch Rechtecksflächen wie in Abbildung 21.6 dargestellt an.

Abb. 21.6



Entsprechend den Gleichungen (21.1) und (21.2) gilt jetzt

$$A_k = A_{k-1} + \Delta x \cdot f((k-1) \cdot \Delta x)$$

bzw.

$$A_{k+1} - A_k = \Delta x \cdot f(k \cdot \Delta x) \qquad \text{mit } A_0 = 0; \qquad (21.8)$$

also

$$A_{k+1} - A_k = \Delta x \cdot \sin(k \cdot \Delta x) \qquad \text{mit } A_0 = 0. \qquad (21.9)$$

Aufgabe 21.3

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten, daß die Differenzengleichung

$$y_{k+1} - y_k = a \cdot \sin(k \cdot b) \tag{21.10}$$

mit festen Koeffizienten a und $b \in \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der Gestalt

$$y_k^* = -\frac{a}{2} \cdot \sin(k \cdot b) + \frac{a \cdot \sin b}{2(\cos b - 1)} \cdot \cos(k \cdot b) \tag{21.11}$$

besitzt.

Mit $a = b = \Delta x$ lautet die allgemeine Lösung von (21.9) somit

$$A_k = C - \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin(k \cdot \Delta x) + \frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)} \cdot \cos(k \cdot \Delta x). \tag{21.12}$$

Die Konstante C berechnet sich wegen $A_0 = 0$ zu

$$C = C(\Delta x) = -\frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)} \tag{21.13}$$

Das Intervall $[0, x_0]$ sei in n Abschnitte der Breite Δx unterteilt; es gelte also

$$x_0 = n \cdot \Delta x.$$

Dann ist die Näherungsfläche A_n der gesuchten Fläche A gegeben durch

$$A_n = C(\Delta x) - \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin x_0 + \frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)} \cdot \cos x_0 \tag{21.14}$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$ nähert sich die Fläche A_n immer besser der Fläche A an; es ist

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} A_n. \tag{21.15}$$

Auf Grund der Verträglichkeit der Limesbildung mit den algebraischen Verknüpfungen (Satz 18.6) ist

$$\lim_{\Delta x \to 0} A_n =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} C(\Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin x_0 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)} \cdot \cos x_0 \tag{21.16}$$

Für jedes x_0 ist

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin x_0 = 0,$$

und Gleichung (21.16) vereinfacht sich zu

$$\lim_{\Delta x \to 0} A_n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)} \cdot (\cos x_0 - 1). \tag{21.17}$$

Hierbei bereitet der Grenzübergang im Hinblick auf den Term $\frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)}$ Schwierigkeiten, denn die getrennte Grenzwertbildung für Zähler und Nenner führt auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$; Satz 18.6 ist hier nicht anwendbar.

Wir müssen also versuchen, den Term $\frac{\Delta x \cdot \sin \Delta x}{2(\cos \Delta x - 1)}$ so umzuformen, daß die Grenzwertbildung möglich wird. Um nur einen Typ von trigonometrischen Funktionen behandeln zu müssen, versuchen wir, den Nenner als Sinusfunktion auszudrücken. Ausgangspunkt für derartige Umformungen sind fast immer die Additionstheoreme (15.17).

Speziell für $\cos\alpha$ können wir schreiben:

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

also

$$\cos\alpha + 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

und somit

$$\cos\alpha - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{21.18}$$

Also ist mit $\Delta v = \frac{1}{2}\Delta x$:

$$\frac{\Delta x \cdot \sin\Delta x}{2(\cos\Delta x - 1)} = \frac{\Delta x \cdot \sin\Delta x}{-4\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \frac{\Delta v \cdot \sin(2\cdot\Delta v)}{-2\sin^2(\Delta v)}$$

Weiterhin ist nach den Additionstheoremen

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\Delta x \cdot \sin\Delta x}{2(\cos\Delta x - 1)} = -\frac{\Delta v}{\sin\Delta v} \cdot \cos\Delta v \tag{21.19}$$

Wenn es uns gelänge,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

zu bestimmen, könnten wir in (21.19) den Grenzübergang durchführen.

Wir deuten $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ als Strecken am Einheitskreis (Abb. 21.7).

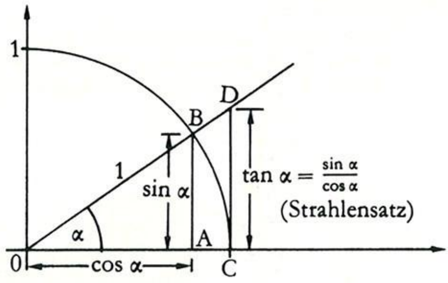


Abb. 21.7

Ein Vergleich der Dreiecksflächen OAB, OCD und des Kreisausschnitts OCB ergibt für $\alpha \neq 0$:

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \leqq \pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{21.20}$$

also

$$\cos\alpha \leqq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leqq \frac{1}{\cos\alpha} \tag{21.21}$$

Wegen $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos\alpha = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{1}{\cos\alpha} = 1$ ist somit

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1. \tag{21.22}$$

Die Anwendung des Verträglichkeitssatzes (Satz 18.6) auf (21.19) ergibt somit:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\Delta x}{2(\cos\Delta x - 1)} = \lim_{\Delta v \to 0} \left(-\frac{\Delta v}{\sin\Delta v} \cdot \cos\Delta v\right) = -1 \tag{21.23}$$

Wir sind jetzt in der Lage, den Grenzübergang in (21.17) durchzuführen:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A_n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\Delta x}{2(\cos\Delta x - 1)}(\cos x_0 - 1) =$$

$$= (-1)\cdot(\cos x_0 - 1) =$$

$$= 1 - \cos x_0.$$

Als Endergebnis erhalten wir das Resultat: Die gesuchte Fläche A in Abbildung 21.5 ist gegeben durch

$$A = 1 - \cos x_0. \tag{21.24}$$

Aufgabe 21.4

Berechnen Sie die schraffierte Fläche in Abbildung 21.8 ohne Nachvollzug des obigen Grenzüberganges, sondern unter Anwendung von (21.24) mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen (Translationssymmetrie).

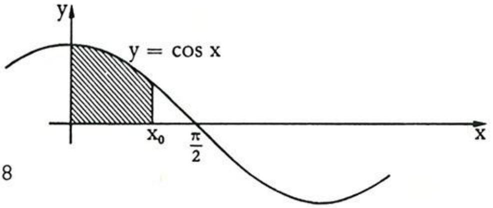


Abb. 21.8

Aufgabe 21.5

Oft kann der Flächeninhalt A eines von der x-Achse, den Geraden $x = a$ und $x = b$ und dem Funktionsgraphen einer vorgegebenen Funktion f begrenzten Flächenstücks (Abb. 21.9) nicht wie in den

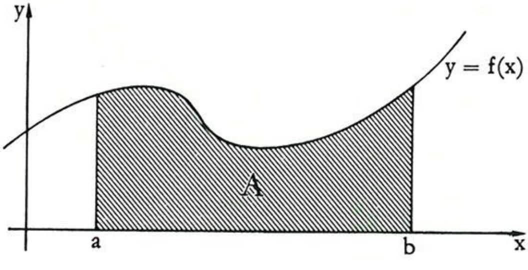


Abb. 21.9

beiden vorangehenden Beispielen durch eine elementare Funktion g ausgedrückt werden. Auch in diesem Fall kann die oben geschilderte Annäherung durch Rechtecke zur approximativen Ermittlung des numerischen Wertes von A herangezogen werden.

a) Schreiben Sie ein Universalprogramm, das für jede in BASIC oder PASCAL oder auf Ihrem Computer definierbare Funktion bei vorgegebener Streifenzahl n ($n\cdot\Delta x = b - a$) die beiden Rechtecksapproximierungen (21.1) bzw. (21.8) zur Ermittlung numerischer Näherungswerte durchführt.

b) Schreiben Sie für monotone Funktionen ein entsprechendes Programm, das die Streifenbreite Δx selbständig so lange verkleinert, bis der Unterschied zwischen Überschätzung und Unterschätzung dem Betrage nach kleiner als eine beliebig vorzugebende reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ist.

c) Begründen Sie, warum das in b) dargestellte Abbruchkriterium bei nicht-monotonen Funktionen zu falschen Ergebnissen führen kann.

§ 22 Irrfahrten

[22.1] Die symmetrische Irrfahrt

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Glücksspiel:

> Jeder der Spieler setzt 5 DM. Sie werfen eine Münze mit den Seiten Kopf (K) und Zahl (Z). Bei K erhält Spieler A 1 DM von Spieler B, bei Z muß A 1 DM an B zahlen.

Wir zeichnen uns einen Plan der Spielsituation:

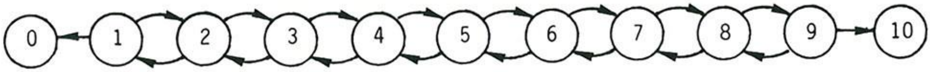
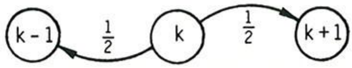


Abb. 22.1

Der Plan, auch *Graph* genannt, besteht aus Kreisen (*Zuständen*) und Pfeilen (*Übergängen*). Die jeweilige Spielsituation ist eindeutig durch den Kontostand des Spielers B gekennzeichnet, den wir in den Kreisen notiert haben. Vom Zustand k ist jeweils der Übergang zu den Zuständen k-1 oder k+1 möglich. Wir nehmen zunächst an, daß es sich um eine "faire" Münze handelt. Dies möge bedeuten, daß in langen Wurfserien Kopf und Zahl etwa gleich häufig auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl sei also jeweils gleich $\frac{1}{2}$. Man bezeichnet sie als die *Übergangswahrscheinlichkeit* von Zustand k nach Zustand k+1 bzw. k-1 (Abb. 22.2).

Abb. 22.2



Die Übergänge nach 0 bzw. 10 sind Einbahnstraßen. Wenn einer dieser Zustände erreicht ist, ist das Spiel beendet.

Daß die Gewinnchancen für Spieler A gleich $\frac{1}{2}$ sein dürften, ist auf Grund der absoluten Symmetrie des Spiels in bezug auf die beiden Spieler ziemlich klar.

Weniger offensichtlich ist die Antwort auf die Frage, wie lange ein solches Spiel im Durchschnitt dauert. Eine weitere interessante Frage ist, wie groß die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A ist, wenn sich das Spiel im Zustand 2 oder 7 bzw. allgemein im Zustand k befindet.

Ein Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage stellt die folgende Mittelwertsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar.

Erste Mittelwertsregel

Die Wahrscheinlichkeit p_k, vom Zustand k zum Zustand 0 zu gelangen, ist gleich dem gewichteten arithmetischen Mittel der Wahrscheinlichkeiten, von den Nachbarzuständen k+1 und k-1 nach 0 zu gelangen:

$$p_k = a \cdot p_{k+1} + b \cdot p_{k-1} \tag{22.1}$$

Nachbarzustände eines Zustands (k) sind diejenigen Zustände, die von (k) aus in einem Schritt erreicht werden können.

Als Gewichtungsfaktoren a und b sind die Übergangswahrscheinlichkeiten von (k) nach (k+1) bzw. (k-1) zu wählen. Man kann diese durchaus plausible Mittelwertsregel - ebenso wie die später anzusprechende zweite Mittelwertsregel - als Grundannahme (Axiom) der Wahrscheinlichkeitsrechnung ansehen. Bei der Zugrundelegung eines anderen Axiomensystems, etwa dem nach Kolmogoroff, lassen sich die Mittelwertsregeln als beweisbare Sätze ableiten.

In unserem Beispiel gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten a und b:

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Gleichung (22.1) läßt sich als homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$p_{k+1} - \frac{1}{a} p_k + \frac{b}{a} p_{k-1} = 0, \qquad (22.2)$$

in diesem Falle also, bei Indexverschiebung um +1,

$$p_{k+2} - 2\, p_{k+1} + p_k = 0 \qquad (22.3)$$

deuten. Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$m^2 - 2\,m + 1 = 0$$

hat die Doppelwurzel

$$m_1 = m_2 = 1.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (22.3) lautet somit:

$$p_k = C_1 + C_2 \cdot k \qquad (22.4)$$

Aus den Spielregeln ergibt sich für die Endzustände (0) und (10)

$$p_0 = 1 \quad \text{und} \quad p_{10} = 0.$$

Für die Koeffizienten C_1 und C_2 folgt daraus

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 1$$

$$C_1 + C_2 \cdot 10 = 0,$$

also

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = -\frac{1}{10}$$

und

$$p_k = 1 - \frac{1}{10} k. \qquad (22.5)$$

Plausibilitätskontrolle: $p_5 = \frac{1}{2}$, wie bereits erkannt.

Bemerkungen

1. Die Gleichungen (22.2) bzw. (22.3) sowie die Lösung (22.5) sind zwar ohne Einschränkungen in bezug auf den Gültigkeitsbereich der Indices formuliert, eine sinnvolle Interpretation im Kontext der Spielsituation ist jedoch nur für die Indexmenge {0, 1, 2, ..., 10} möglich.

2. Die endgültige Festlegung der Lösungsfolge p_k in (22.5) erfolgte diesmal nicht wie bisher durch die Anfangswerte, sondern durch die bekannten Werte p_0 und p_{10} an den Enden (Rändern) des Gültigkeitsbereiches der Zustandsmenge. Man spricht in derartigen Fällen von *Randwertproblemen*.

Auch im Hinblick auf die durchschnittliche Spieldauer ist die Annahme sinnvoll, daß die Dauer d_k, um von Zustand k aus einen der Endzustände zu erreichen, eng mit den entsprechenden Spieldauern d_{k+1} und d_{k-1} zusammenhängt. Wir können hier allerdings nicht einfach das gewichtete arithmetische Mittel aus d_{k+1} und d_{k-1} bilden, da zum Erreichen eines der Nachbarzustände ja zusätzlich noch ein Übergangsschritt benötigt wird.

Zweite Mittelwertsregel

Die mittlere Spieldauer d_k, das ist die durchschnittliche Anzahl der Schritte, um vom Zustand k aus einen der Randzustände zu erreichen, ist gleich dem um 1 vermehrten gewichteten arithmetischen Mittel der entsprechenden Spieldauern der Nachbarzustände von k. Die Gewichtung findet wieder durch die Übergangswahrscheinlichkeiten statt.

Im obigen Fall ist also

$$d_k = a \cdot d_{k+1} + b \cdot d_{k-1} + 1 \tag{22.6}$$

mit

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Gesucht ist also jetzt, wiederum nach einer Indexverschiebung, eine geeignete Lösung der inhomogenen Gleichung

$$d_{k+2} - 2\,d_{k+1} + d_k = -2. \tag{22.7}$$

Da die Koeffizientensumme $1 - 2 + 1$ der zugehörigen homogenen Gleichung gleich Null ist, existiert keine konstante Lösung. Aus Beispiel 1, zweiter Fall in Abschnitt [18.3] kennen wir jedoch die spezielle Lösung

$$d_k^* = \frac{-2}{2} \cdot k^2 = -k^2.$$

Die allgemeine Lösung von (22.7) lautet somit:

$$d_k = C_1 + C_2 \cdot k - k^2 \tag{22.8}$$

Die Festlegung der Koeffizienten C_1 und C_2 erfolgt auch hier wieder durch die Randwerte, nämlich:

$$d_0 = d_{10} = 0 \tag{22.9}$$

Es ist also

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 10,$$

und wir erhalten die Lösung

$$d_k = 10\,k - k^2 = k\,(10 - k). \tag{22.10}$$

Bemerkung

Bei einer zufallsgesteuerten Bewegung auf den Zuständen eines Graphen wie in Abbildung 22.1 spricht man von einer *Irrfahrt*. In Abbildung 22.1 haben wir es mit einer eindimensionalen Irrfahrt zu tun. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten nach links und nach rechts gleich groß sind (siehe Abb. 22.2), spricht man von einer *symmetrischen Irrfahrt*.

In unmittelbarer Verallgemeinerung der bisherigen Resultate (22.5) und (22.10) erhalten wir das Ergebnis:

Satz 22.1

Für die symmetrische Irrfahrt auf dem Graphen in Abbildung 22.3 gilt:

a) Die Wahrscheinlichkeit p_k, vom Zustand k aus den Zustand 0 zu erreichen, ist

$$p_k = 1 - \frac{1}{r} \cdot k. \tag{22.11}$$

b) Die durchschnittliche Dauer einer Irrfahrt, die im Zustand k beginnt, beläuft sich auf

$$d_k = k\,(r - k) \tag{22.12}$$

Übergänge.

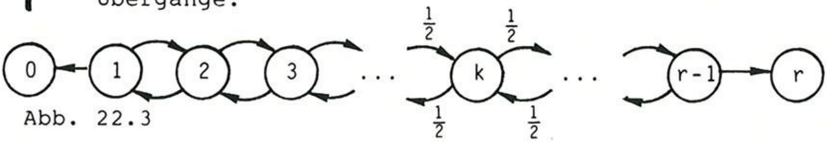


Abb. 22.3

Aufgabe 22.1

a) Simulieren Sie mit einer Münze fünf Irrfahrten auf dem Graphen von Abbildung 22.1, die alle im Zustand 4 beginnen. Vergleichen Sie die empirisch ermittelten Werte mit (22.5) bzw. (22.10).

b) Führen Sie eine Simulation mit wesentlich mehr "Durchläufen" mit Hilfe eines Computers durch. Informieren Sie sich über die Erzeugung von "Zufallszahlen".

Aufgabe 22.2

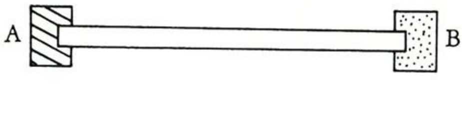
Vollziehen Sie die Überlegungen dieses Abschnitts im allgemeineren Falle von $r + 1$ statt 11 Zuständen nach.

Aufgabe 22.3

Ein Metallstab von 1 m Länge ist an beiden Enden eingespannt (Abb. 22.4).

Das linke Lager A weist eine Temperatur von 150 °C auf; im rechten Lager beträgt die Temperatur 20 °C. Wie sieht die Temperaturverteilung im Metallstab aus? Wir wollen den Prozeß der Modellbildung durch zwei Hilfsmaßnahmen erleichtern:

Abb. 22.4



- Vernachlässigung der den Stab umgebenden Atmosphäre; der Wärmeaustausch finde nur innerhalb des Stabes und mit den Lagern statt.
- Diskretisierung; wir unterteilen den Stab in kleine Scheiben von z. B. 1 cm Dicke. Die Temperatur sei innerhalb eines Scheibchens überall gleich.

Wir nehmen an, daß die Randscheibchen des Stabes dieselbe Temperatur wie die angrenzenden Lager haben, während für die inneren Scheibchen gilt: Die Temperatur t_k jedes Scheibchens ist der Mittelwert aus den Temperaturen der beiden benachbarten Scheibchen:

$$t_k = \frac{1}{2} t_{k+1} + \frac{1}{2} t_{k-1}$$

Stellen Sie für k = 1,..., 100 die Temperatur t_k explizit dar.

Aufgabe 22.4

Bei Tischtennisspielen zwischen annähernd gleich starken Spielern kommt es häufig zum Spielstand 20 : 20. Wie lange dauern solche Spiele im Durchschnitt noch? Die Spieldauer werde durch die Anzahl der noch folgenden Angaben gemessen. Das Spiel ist zu Ende, sobald ein Spieler zwei Punkte mehr hat als sein Gegner.

Aufgabe 22.5

a) Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis eine der Seiten (K oder Z) mit drei Würfen in Führung liegt, z. B. K K Z K Z Z K K Z K K. Aus wie vielen Würfen besteht eine solche Wurfserie im Durchschnitt?

b) Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis eine der Seiten dreimal unmittelbar hintereinander aufgetreten ist, z. B. K Z Z K K Z K K K. Wie groß ist die durchschnittliche Länge einer Wurfserie?

c) Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis dreimal unmittelbar hintereinander Z erschienen ist. Wie lang ist eine Wurfserie im Durchschnitt?

Aufgabe 22.6

Wir betrachten in dieser Aufgabe die symmetrische Irrfahrt auf einer unbegrenzten Geraden. Geben Sie eine rekursive Gleichung für die Wahrscheinlichkeit $p_k^{(n)}$ an, vom Zustand 0 aus im n-ten Zug den Zustand k zu erreichen ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $-n \leq k \leq n$). Stellen Sie die Anfangswerte ($0 \leq n \leq 3$) in einem geeigneten graphischen Schema dar.

[22.2] Die asymmetrische Irrfahrt

Im folgenden betrachten wir eine Irrfahrt auf dem Graphen in Abbildung 22.5 mit verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten. Der Übergang nach rechts, also z. B. von Zustand k nach k+1 finde stets mit der Wahrscheinlichkeit a, der Übergang nach links mit der Wahrscheinlichkeit b statt ($0 < a < 1$; $a + b = 1$; $a \neq b$). Aus der er-

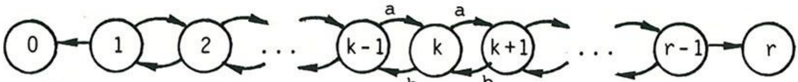


Abb. 22.5

sten Mittelwertsregel folgt für die Wahrscheinlichkeit p_k, vom Zustand (k) aus den Zustand (0) zu erreichen, nach (22.1):

$$p_k = a \cdot p_{k+1} + b \cdot p_{k-1} \tag{22.13}$$

Die sich daraus ergebende Differenzengleichung

$$p_{k+2} - \frac{1}{a} p_{k+1} + \frac{b}{a} p_k = 0 \tag{22.14}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$m^2 - \frac{1}{a} m + \frac{b}{a} \tag{22.15}$$

mit den Wurzeln

$$m_1 = \frac{1}{2a}(1 + \sqrt{1 - 4ab}) = \frac{1}{2a}(1 + \sqrt{1 - 4a + 4a^2}) =$$

$$= \frac{1}{2a}(1 + 1 - 2a) = \frac{1-a}{a} = \frac{b}{a}$$

und

$$m_2 = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{b}{a} = 1. \quad \text{(Man beachte: } b = 1 - a\text{)}$$

Die allgemeine Lösung von (22.14) lautet somit:

$$p_k = C_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k + C_2 \tag{22.16}$$

Die Randwerte $p_0 = 1$ und $p_r = 0$ ermöglichen die Bestimmung der Koeffizienten C_1 und C_2 durch:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^r + C_2 = 0$$

Es ist also

$$C_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r}; \qquad C_2 = \frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^r}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r}$$

$$p_k = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^k - \left(\frac{b}{a}\right)^r}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r} \tag{22.17}$$

Für die *mittlere Dauer* einer im Zustand k beginnenden asymmetrischen Irrfahrt auf dem Graphen in Abbildung 22.5 ergibt sich aus der zweiten Mittelwertsregel

$$d_k = a\,d_{k+1} + b\,d_{k-1} + 1$$

die inhomogene Differenzengleichung

$$d_{k+2} - \frac{1}{a} d_{k+1} + \frac{b}{a} d_k = -\frac{1}{a}. \tag{22.18}$$

Da das charakteristische Polynom (22.15) der zugehörigen homogenen Gleichung die einfache Nullstelle $m_2 = 1$ besitzt, hat die Gleichung (22.18) nach (18.27) die spezielle Lösung

$$d_k^* = \frac{-\frac{1}{a}}{2-\frac{1}{a}} \cdot k = \frac{1}{1-2a} \cdot k = \frac{1}{b-a} \cdot k;$$

und die allgemeine Lösung lautet:

$$d_k = C_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k + C_2 + \frac{1}{b-a} \cdot k \tag{22.19}$$

Die Festlegung der Koeffizienten C_1 und C_2 erfolgt mit Hilfe der Randwerte

$$d_0 = d_r = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^r + C_2 + \frac{1}{b-a} \cdot r = 0;$$

also

$$C_1 = \frac{\frac{1}{a-b} \cdot r}{\left(\frac{b}{a}\right)^r - 1} = -C_2.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 22.2

Für die asymmetrische Irrfahrt auf dem Graphen in Abbildung 22.5 gilt:

a) Die Wahrscheinlichkeit p_k, vom Zustand (k) aus den Zustand (0) zu erreichen, ist

$$p_k = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^k - \left(\frac{b}{a}\right)^r}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^r} \tag{22.20}$$

b) Die durchschnittliche Dauer einer Irrfahrt, die im Zustand (k) beginnt, beläuft sich auf

$$d_k = \frac{\frac{1}{a-b} \cdot r}{\left(\frac{b}{a}\right)^r - 1} \cdot \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^k - 1\right\} + \frac{1}{b-a} \cdot k \tag{22.21}$$

Übergänge.

Aufgabe 22.7

Schreiben Sie ein Programm zur Simulation der asymmetrischen Irrfahrt und vergleichen Sie die Ergebnisse mit (22.20) bzw. (22.21).

Aufgabe 22.8

Bearbeiten Sie die Aufgabe 22.4 unter der Bedingung, daß sich zwei Tischtennisspieler A und B gegenüberstehen, deren Spielstärken sich wie
a) 5 : 4
b) a : b
verhalten. Ersteres bedeute: A gewinnt von neun Ballwechseln mit B im Durchschnitt fünf, B vier.

c) Ermitteln Sie ohne Differentialrechnung dasjenige Verhältnis a : b der Spielstärken, bei dem die durchschnittliche Spieldauer ein Maximum annimmt.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Spiel?

Aufgabe 22.9

Eine Firma, die Mietwagen verleiht, hat zwei Filialen A und B. Die Wagen werden für den Pendelverkehr zwischen A und B benötigt (z. B. zwischen Flughafen und Stadtmitte). Da die Versorgung mit öffentlichen Verkehrsmitteln in Richtung von A nach B besser ist als in Richtung von B nach A, wollen durchschnittlich 40 % der Kunden den Mietwagen für Fahrten von A nach B und 60 % von B nach A benutzen.

a) Wie viele Vermietungen sind ohne Rücktransport leerer Mietwagen durch Firmenpersonal im Durchschnitt möglich, wenn zu Beginn in A und in B je 20 Wagen bereitstehen?

b) Wie müßten die Wagen zu Beginn auf A und B verteilt sein, damit in jeder der Filialen so lange wie möglich Wagen zur Verfügung stehen?

[22.3] Untersuchung von Strategien bei Glücksspielen

Folgende Methode wird oft als "unfehlbare" Strategie beim Roulettespiel dargestellt:

- Man setze 1 DM auf Rot.
- Gewinnt man, so kassiert man den Gewinn und setzt wieder 1 DM.
- Verliert man, so verdoppelt man jeweils den Einsatz, bis man gewinnt.

Aufgabe 22.10

Berechnen Sie den Gewinn oder gegebenenfalls den Verlust nach jeder Spielserie, zwischen dem Einsatz von 1 DM und dem ersten Gewinn.

Aufgabe 22.11

Begründen Sie, woran diese Strategie in der Praxis scheitert.

Vom theoretischen Aspekt her ist diese Strategie trotzdem interessant. Anstatt den Einsatz bei Verlust jeweils zu verdoppeln, könnte man ihn auch z. B. verdreifachen, vervierfachen,... oder aber auch um einen festen Betrag erhöhen.

Wir wollen im folgenden annehmen, daß sich der Einsatz nach jedem Verlustspiel wie folgt verändert:

$$E_{k+1} = a E_k + b \qquad (22.22)$$

(bei festen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$).

Beginnt man jeweils mit dem Ersteinsatz

$$E_1 = E,$$

so lautet der Einsatz E_k im Falle $a \neq 1$ nach $k-1$ aufeinanderfolgenden Verlusten in expliziter Form:

$$E_k = a^{k-1}\left(E + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1} \tag{22.23}$$

Aufgabe 22.12

Überprüfen Sie Gleichung (22.23).

Die Zusammenfassung der Einzelspiele vom Ersteinsatz E bis zum ersten Gewinn nennen wir der Kürze halber im folgenden einen *Satz*. Um die Bilanz nach jedem Satz aufstellen zu können, müssen wir die Summe S_k aller Einsätze bis zum k-ten Einzelspiel einer jeden Verlustserie ermitteln. Es ist

$$S_1 = E$$

$$S_{k+1} = S_k + E_{k+1}. \tag{22.24}$$

S_k ist also die Lösung der folgenden Differenzengleichung erster Ordnung:

$$S_{k+1} - S_k = a^k \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1} \tag{22.25}$$

Die zugehörige homogene Gleichung

$$S_{k+1} - S_k = 0$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$S_k = C. \tag{22.26}$$

Die Inhomogenitätsfunktion

$$f(k) := a^k \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1} \tag{22.27}$$

zerlegen wir entsprechend dem Superpositionssatz (Satz 18.5) in die exponentiellen bzw. konstanten Bestandteile

$$a^k \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \quad \text{und} \quad -\frac{b}{a-1}.$$

Aus (22.25) ergeben sich damit die Gleichungen:

$$S_{k+1} - S_k = a^k \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \tag{22.28}$$

$$S_{k+1} - S_k = -\frac{b}{a-1} \tag{22.29}$$

Nach der Tabelle 18.1 besitzt (22.28) eine Lösung der Form

$$S_k^* = C_1 a^k.$$

Die Konstante C_1 ergibt sich durch Einsetzen in (22.28):

$$C_1 a^{k+1} - C_1 a^k = a^k \left(E + \frac{b}{a-1}\right)$$

$$C_1 = \frac{1}{a-1}\,(E + \frac{b}{a-1})$$

Also ist

$$S_k^* = \frac{a^k}{a-1}\,(E + \frac{b}{a-1})\,. \tag{22.30}$$

Für (22.29) ergibt sich, ähnlich wie bei der Tilgungsgleichung, die spezielle Lösung:

$$S_k^{**} = -k\cdot\frac{b}{a-1} \tag{22.31}$$

Eine spezielle Lösung von (22.25) ist also:

$$S_k^{***} = S_k^* + S_k^{**} = \frac{a^k}{a-1}\cdot(E + \frac{b}{a-1}) - k\cdot\frac{b}{a-1}$$

Die allgemeine Lösung von (22.25) ist somit gegeben durch

$$S_k = C + S_k^{***} = C + \frac{a^k}{a-1}\cdot(E + \frac{b}{a-1}) - k\cdot\frac{b}{a-1}\,.$$

Anpassung der Konstanten C auf den Anfangswert $S_1 = E$ ergibt:

$$C = -\frac{1}{a-1}\cdot E - \frac{b}{(a-1)^2}$$

$$S_k = (E + \frac{b}{a-1})\cdot\frac{a^k - 1}{a-1} - k\cdot\frac{b}{a-1} \tag{22.32}$$

Erfolgt der erste Gewinn nach dem n-ten Einzelspiel - besteht also der Satz aus n Spielen -, so steht dem kumulativen Einsatz S_n die Ausschüttung A_n gegenüber.

Aufgabe 22.13

Begründen Sie: Ein Glücksspiel ist sinnvollerweise dann "fair" zu nennen, wenn

a) bei der Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ (bzw. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) die Auszahlung das Doppelte (bzw. Dreifache, Vierfache) des Einsatzes beträgt,

b) wenn allgemein bei der Gewinnwahrscheinlichkeit p (mit $0 < p \leq 1$) die Auszahlung das $\frac{1}{p}$-fache des Einsatzes beträgt.

Im Hinblick auf unser Strategieproblem wollen wir zunächst annehmen daß die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist und die Auszahlung das Doppelte des Einsatzes ausmacht:

$$A_n = 2\,E_n \tag{22.33}$$

Die Bilanz nach einem Satz der Länge n ist dann:

$$B_n = A_n - S_n = 2\,E_n - S_n$$

$$B_n = (E + \frac{b}{a-1})\cdot\frac{a^{n-1}(a-2)+1}{a-1} + (n-2)\cdot\frac{b}{a-1} \tag{22.34}$$

Plausibilitätskontrolle: Im eingangs betrachteten Fall mit $a = 2$ und $b = 0$ ist $B_n = E$, unabhängig von der Satzlänge n.

Im folgenden wollen wir den durchschnittlichen Verdienst D bei einer gegen unendlich strebenden Anzahl von Sätzen berechnen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Satz der Länge n ist $(\frac{1}{2})^n$. Der durchschnittliche Verdienst ist somit:

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot B_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{a-1} + \frac{n-2}{2^n} \cdot \frac{b}{a-1}\right) \tag{22.35}$$

An dieser Stelle müssen wir eine Aussage über die Möglichkeit der Umordnung von Reihen heranziehen, die wir hier nicht beweisen wollen.

Riemannscher Umordnungssatz

Die Reihenfolge der Glieder der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kann genau dann ohne Veränderung des Reihenwertes umgeordnet werden, wenn die Reihe der zugehörigen Absolutbeträge konvergiert, wenn also eine reelle Zahl r existiert mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = r.$$

Bemerkung

Daß die Umordnung von Reihen nicht unproblematisch ist, zeigt das folgende Beispiel: Es sei $a_n = 1$, $b_n = -1$. Dann ist

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0,$$

doch

$$a_1 + (b_1 + a_2) + (b_2 + a_3) + \ldots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots =$$
$$= 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Da das Umordnungskriterium im Hinblick auf die Glieder $\frac{n-2}{2^n} \cdot \frac{b}{a-1}$ und $\frac{1}{2^n} \cdot \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{a-1}$ in (22.35) für $0 \leqq a < 2$ $(a \neq 1)$ erfüllt ist (beachte auch Aufgabe 18.8,b), folgt:

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{2^n(a-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^n} \cdot \frac{b}{a-1} =$$

$$= \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{1}{a-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{2^n} - \frac{2a^{n-1}}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{b}{a-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right).$$

Nach dem Umordnungssatz können die nun verbleibenden Reihen wie folgt umgestellt werden:

$$D = \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{1}{a-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) +$$

$$+ \frac{b}{a-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Aufgabe 22.14

Zeigen Sie:

a) Die "geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hat für $|q| < 1$ den Reihenwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

Hinweis: Aufgabe 4.1,a.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^n$ hat für $|q| < 1$ den Reihenwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Hinweis: Multiplikation der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^n$ mit $(1-q)$.

Bemerkung

Ein anderer Weg zur Berechnung der Reihenwerte ist mit Hilfe der expliziten Darstellungen möglich; vgl. Aufgabe 20.2.

Im Hinblick auf den durchschnittlichen Verdienst D erhalten wir das Ergebnis:

$$D = \left(E + \frac{b}{a-1}\right)\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\left(\frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}} - \left(1 + \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{b}{a-1}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} + 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 22.3

Bei einem Glücksspiel sei die Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ und die Ausschüttung pro Spiel gleich dem Doppelten des Einsatzes. Jeder Satz verlaufe vom ersten Setzen bis zum ersten Gewinn. Ist der Ersteinsatz jeweils durch

$$E_1 = E$$

und die weiteren Einsätze bei Verlust durch

$$E_{k+1} = a\,E_k + b \qquad (a \neq 1)$$

gegeben, so sind der Einsatz E_k und die Summe der Einsätze S_k für das k-te Spiel gegeben in (22.23) und (22.32). Die Bilanz nach einem Satz der Länge n ist

$$B_n = \left(E + \frac{b}{a-1}\right) \cdot \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{a-1} + (n-2) \cdot \frac{b}{a-1} .$$

Im Falle $0 \leq a < 2$ und $a \neq 1$ ist der durchschnittliche Gewinn:

$$D = 0$$

Aufgabe 22.15

Untersuchen Sie die in diesem Abschnitt diskutierte Fragestellung im Falle

a) $a = 1$; das heißt $E_{k+1} = E_k + b$,

b) $a > 2$.

Aufgabe 22.16

a) Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Bilanzfunktion B_n $(= B_n(a, b, E))$ für festes n, b und E von der Variablen a.

b) Untersuchen Sie insbesondere die in der Bilanzfunktion B_n auftretenden Funktionen

$$g_n(a) = \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{a-1}$$

$$h_n(a) = \frac{a^{n-1}(a-2)+1}{(a-1)^2}$$

in Abhängigkeit von a.

c) Zeigen Sie:

$$g_n(a) = a^{n-1} - (a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1)$$

Aufgabe 22.17

Untersuchen Sie das Strategieproblem im Falle der Gewinnwahrscheinlichkeit p $(0 < p \leq 1)$ und der Ausschüttungsquote:

Ausschüttung = $\frac{1}{p}$-faches des Einsatzes.

§ 23 Mittelwerte und gleitende Durchschnitte

Nehmen wir an, die Graphik in Abbildung 23.1 gibt die Preisentwicklung eines Konsumgutes, in monatlichen Abständen gemessen, an. Für die am Markt beteiligten Gruppen stellt sich häufig die Frage, wie die Preisentwicklung weitergeht.

Bei einer in den meisten Fällen wohl unangemessenen, sehr kurzfristigen Betrachtungsweise der Preisentwicklung könnte man auf die Idee kommen, die auf den beiden letzten Meßwerten beruhende Tendenz einfach linear zu extrapolieren (gepunktete Linie). Eine andere Möglichkeit besteht darin, einfach den letzten Meßwert als Schätzwert zu übernehmen (gestrichelte Linie).

Dazu einen kleinen Vergleich. Im Hinblick auf die Wettervorhersage heißt es: Wenn man zum Zwecke der täglichen Wettervorhersage grundsätzlich prognostizieren würde: "Das Wetter wird morgen so, wie es heute war", hätte man in etwa 75 % der Fälle recht. Durch den Einsatz moderner meteorologischer Mittel gelingt es, diesen Prozent-

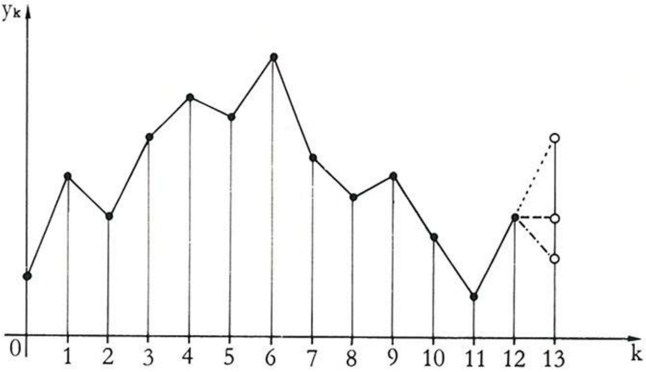


Abb. 23.1

satz auf ca. 80 % zu verbessern.

Eine der am häufigsten praktizierten Methoden besteht jedoch darin, als Prognosewert ein Mittel aus einer festen Anzahl vorhergehender Meßwerte zu wählen. Wählt man etwa das arithmetische Mittel der beiden letzten Meßwerte, so erhält man den in Abbildung 23.1 strichpunktiert dargestellten Verlauf der Graphik. Die entsprechende Weiterführung dieser Mittelbildung führt zur Folge der *gleitenden Durchschnitte* d_k in bezug auf die ursprünglich gegebene Folge y_k:

$$d_1 = \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$d_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\ldots$$

$$d_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \qquad (23.1)$$

Der gleitende Durchschnitt d_k kann also als Schätzwert für y_{k+1} angesehen werden.

Aufgabe 23.1

Zeichnen Sie die durch (23.1) gegebene Folge der gleitenden Durchschnitte d_k auf Transparentfolie in Abbildung 23.1 ein.

Bei manchen Zeitreihen erscheint es als angemessen, nicht nur die beiden letzten, sondern die letzten drei, vier oder allgemein g ($g \in \mathbb{N}$) Meßwerte zur Mittelbildung heranzuziehen. Das Analogon zu (23.1) lautet dann:

$$d_k = \frac{1}{g}(y_{k-g+1} + y_{k-g+2} + \ldots + y_{k-1} + y_k) \qquad (23.2)$$

In (23.2) gehen alle g Meßwerte mit demselben Gewicht $\frac{1}{g}$ ein. Man nennt die rechte Seite von (23.2) das *arithmetische Mittel* der Werte $y_{k-g+1}, \ldots, y_k$. Gleichung (23.2) wird auch als g-*gliedriger gleitender Durchschnitt* bezeichnet. Der Wert von y_{k-g+1} liegt jedoch im Vergleich zu dem "frischen" Wert y_k weit zurück. Bei vielen Problemen erscheint es deshalb angebracht, die neueren Werte stärker zu gewichten als die älteren, wie etwa in

$$d_k = \frac{1 \cdot y_{k-g+1} + 2 \cdot y_{k-g+2} + \ldots + g \cdot y_k}{1 + 2 + \ldots + g} \tag{23.3}$$

oder allgemein mit den Gewichten $m_1, \ldots, m_g$ $(m_i \geq 0)$ in

$$d_k = \frac{m_1 \cdot y_{k-g+1} + m_2 \cdot y_{k-g+2} + \ldots + m_g \cdot y_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_g} \tag{23.4}$$

Die rechte Seite von (23.4) bezeichnet man als das gewichtete oder gewogene arithmetische Mittel der Werte $y_{k-g+1}, \ldots, y_k$. Das zu y_{k-g+i} gehörende Gewicht ist $\frac{m_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_g}$. Die Summe aller Gewichte ist auf 1 normiert:

$$\frac{m_1}{m_1 + \ldots + m_g} + \frac{m_2}{m_1 + \ldots + m_g} + \ldots + \frac{m_g}{m_1 + \ldots + m_g} = 1$$

Konsequenterweise nennt man d_k in (23.4) den *gewichteten* g-*gliedrigen gleitenden Durchschnitt* in bezug auf die Folge y_k.

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 23.1 fällt auf, daß der Graph der gleitenden Durchschnitte bei grob qualitativer Betrachtungsweise einen ruhigeren, "glatteren" Verlauf hat als der Graph der ursprünglichen Folge y_k. Wir wollen im folgenden versuchen, diesen groben Eindruck etwas zu präzisieren.

An Gleichung (23.1) läßt sich bereits das Wesentliche erkennen. Der gleitende Durchschnitt d_k ist das arithmetische Mittel von y_{k-1} und y_k. Geometrisch ausgedrückt ist d_k der Mittelpunkt des Intervalls $[y_{k-1}, y_k]$ und liegt somit insbesondere zwischen den Randpunkten y_{k-1} und y_k. Insgesamt heißt das, daß für jeden Zeitabschnitt t die Punkte

$$d_1, d_2, \ldots, d_t$$

zwischen den Punkten

$$y_0, y_1, \ldots, y_t$$

liegen. Der aus der Anschauung gewonnene Eindruck des "glatteren" Verlaufs des Graphen der d_k im Vergleich zum Graphen der y_k ist somit bestätigt.

Was ist nun die charakterisierende Eigenschaft des Mittelpunktes S zweier vorgegebener Punkte P_1 und P_2, die sich sinnvoll auf mehr als zwei Punkte P_i $(i = 1, \ldots, g)$ übertragen läßt?

Wir stellen fest, daß sich die Vektoren $\overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{SP_2}$ genau dann gegenseitig aufheben, wenn S der Mittelpunkt von P_1 und P_2 ist (Abb.23.2).

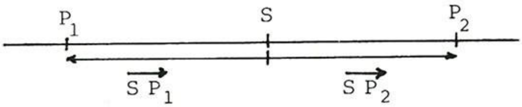


Abb. 23.2

Allgemein definieren wir den *Mittelpunkt* der Punkte $P_1, \ldots, P_g$ als denjenigen Punkt S, für den die Summe der Vektoren $\overrightarrow{SP_i}$ Null wird:

$$\sum_{i=1}^{g} \overrightarrow{SP_i} = 0 \tag{23.5}$$

Ein solcher Punkt existiert stets und ist eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$v_S = \frac{1}{g}(v_1 + v_2 + \ldots + v_g), \tag{23.6}$$

wo v_i die Ortsvektoren der Punkte P_i und v_S den Ortsvektor von S darstellt (Abb. 23.3).

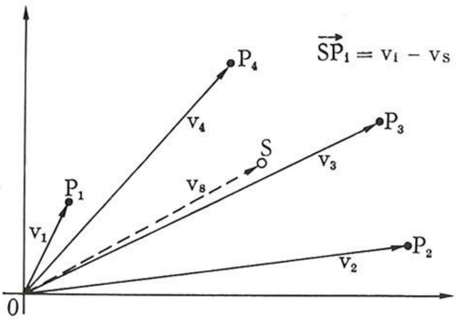


Abb. 23.3

Aufgabe 23.2

Beweisen Sie, daß der durch (23.6) gegebene Punkt S die Bedingung (23.5) erfüllt.

Liegen die Punkte $P_1, \ldots, P_g$ alle auf einer Geraden, so lassen sich die Vektoren $\overrightarrow{SP_i}$ als richtungsorientierte Abstände von S nach P_i deuten. Bei Identifizierung des Punktes P mit seinem Abstand vom Nullpunkt ist dann

$$\overrightarrow{SP_i} = S - P_i. \tag{23.7}$$

Gleichung (23.6) nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$S = \frac{1}{g}(P_1 + \ldots + P_g) \tag{23.8}$$

an.

In die obige Definition des Mittelpunktes gehen alle Punkte P_i gleichgewichtig ein. Häufig hat man sich die Punkte P_i jedoch mit der Masse m_i behaftet vorzustellen. Die Gesamtmasse ist dann

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_g, \tag{23.9}$$

und der Anteil der Masse des Punktes P_i an der Gesamtmasse ist $\frac{m_i}{M}$.

Der *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* der auf den Punkten P_i konzentrierten Massen m_i ist in Analogie zum Mittelpunkt (siehe oben) definiert als der Punkt S, für den die Summe der gewichteten Vektoren $m_i \cdot \overrightarrow{SP_i}$ Null wird:

$$\sum_i m_i \cdot \overrightarrow{SP_i} = 0 \tag{23.10}$$

Auch diese Gleichung definiert den Punkt S in eindeutiger Weise; mit den in (23.6) verwendeten Bezeichnungen ist

$$v_S = \frac{m_1}{M} \cdot v_1 + \frac{m_2}{M} \cdot v_2 + \ldots + \frac{m_g}{M} \cdot v_g . \tag{23.11}$$

Im eindimensionalen Fall, wo alle massebehafteten Punkte P_i auf einer Geraden liegen, gilt entsprechend:

$$S = \frac{m_1}{M} \cdot P_1 + \frac{m_2}{M} \cdot P_2 + \ldots + \frac{m_g}{M} \cdot P_g \tag{23.12}$$

Aufgabe 23.3

Zeigen Sie, daß der durch (23.11) gegebene Punkt S die Bedingung (23.10) erfüllt.

Die obige Definition des Schwerpunktes legt noch die folgende Interpretation im Rahmen der Mechanik nahe:

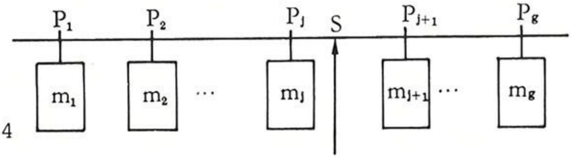


Abb. 23.4

An der (schwerelosen) x-Achse seien an den Punkten $P_1, \ldots, P_g$ die Massen $m_1, \ldots, m_g$ angebracht. An welcher Stelle muß der Querbalken (hier die x-Achse) unterstützt werden, damit dieses System der massebehafteten Punkte P_i im Gleichgewicht ist? Die Summe der linksdrehend wirkenden Drehmomente muß dann gleich der Summe der rechtsdrehend wirkenden Drehmomente sein. Nach dem Hebelgesetz ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\sum_{i=1}^{j} m_i \cdot (S - P_i) = \sum_{i=j+1}^{g} m_i \cdot (P_i - S),$$

das heißt, wenn

$$\sum_{i=1}^{g} m_i \cdot (S - P_i) = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$\sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot (S - P_i) = 0.$$

Der Schwerpunkt ist also derjenige Punkt, bei dessen Unterstützung das System der massebehafteten Punkte P_i im Gleichgewicht ist.

Sowohl aus der geometrischen als auch aus der mechanischen Interpretation der Mittelbildung (23.8) bzw. (23.12) geht hervor, daß der Punkt S stets zwischen dem kleinsten und dem größten der P_i-Werte liegt.

Im Hinblick auf die gleitenden Durchschnitte in (23.4) können wir also formulieren:

Satz 23.1

Für jede Folge (y_k), jede Gliederzahl g, jede Gewichtsverteilung $m_1, \ldots, m_g$ $(m_i \geqq 0)$ und jeden Zeitraum $[k, \ldots, k+t]$ liegen die Werte der gleitenden Durchschnitte

$$d_k, d_{k+1}, \ldots, d_{k+t} \tag{23.13}$$

zwischen den Werten

$$y_{k-g+1}, \ldots, y_{k+t}. \tag{23.14}$$

Genauer: Sind d_{min}, d_{max}, y_{min}, y_{max} jeweils die Minima und Maxima der in (23.13) und (23.14) gegebenen Folgenausschnitte, so gilt:

$$y_{min} \leqq d_{min} \leqq d_{max} \leqq y_{max}.$$

Bemerkung

Man kann natürlich einwenden, daß dieser Vergleich der y-Werte mit den d-Werten nicht fair ist, da die Anzahl der herangezogenen y-Werte die Anzahl der d-Werte um g - 1 übertrifft. Je größer aber der betrachtete Zeitraum $[k, k+t]$ wird, desto weniger fällt diese "Vorleistung" der y_i ins Gewicht.

Wenn wir den Graphen der Folge y_k in Abbildung 23.1 als die sprunghafte Bewegung eines Punktes deuten, dann verläuft bei Projektion auf die y-Achse die Bewegung des Punktes, der zur Folge d_k gehört, "innerhalb" des Bewegungsspielraums der durch die Folge y_k gegebenen Punkte (Abb. 23.5).

Aufgabe 23.4

Beweisen Sie für die nach (23.2) gebildeten gleitenden Durchschnitte d_k die sogenannte Fortschreibungsformel

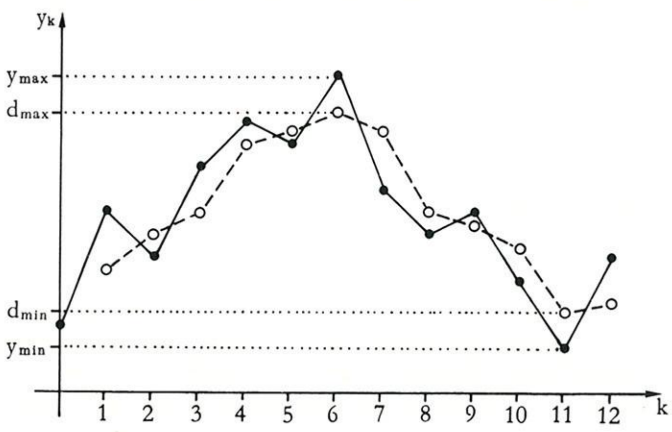


Abb. 23.5

$$d_{k+1} = d_k + \frac{y_{k+1} - y_{k-g+1}}{g}$$

Aufgabe 23.5

Schreiben Sie ein Programm, das für eine beliebige rekursiv gegebene Folge (y_k), eine beliebige Gliederzahl g und eine beliebige Gewichtung mit $m_1, \ldots, m_g$ die durch (23.4) gegebenen gleitenden Durchschnitte berechnet.

Versuchen Sie, im Rahmen der Möglichkeiten Ihres Computers den graphischen Verlauf der Folgen am Bildschirm oder Plotter (x, y-Koordinatenschreiber) wiederzugeben.

Aufgabe 23.6

Zeigen Sie ohne Differentialrechnung, daß der Mittelpunkt S zweier Punkte P_1 und P_2 derjenige Punkt ist, für den die Summe der Abstandsquadrate

$$(S - P_1)^2 + (S - P_2)^2$$

einen minimalen Wert annimmt.

Wir verallgemeinern diesen Sachverhalt in

Satz 23.2

Auf der x-Achse seien die g Punkte $P_1, \ldots, P_g$ gegeben. (Wir identifizieren die Punkte P_i mit ihren Koordinaten.)

a) Derjenige Punkt S, für den die Summe der Abstandsquadrate

$$A = \sum_{i=1}^{g} (S - P_i)^2 \tag{23.15}$$

minimal wird, ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{g} P_i . \tag{23.16}$$

b) Es seien $m_1, \ldots, m_g \in \mathbb{R}$ $(m_i \geq 0)$ und $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_g$. Derjenige Punkt, für den die gewichtete Summe der Abstandsquadrate

$$A = \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot (S - P_i)^2 \tag{23.17}$$

minimal wird, ist gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i . \tag{23.18}$$

Beweis: Da a) durch die Spezialisierung

$$m_i = 1 \quad (i = 1, \ldots, g)$$

aus b) hervorgeht, brauchen wir nur den zweiten Teil zu beweisen.

Mit der Abkürzung

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i$$

ist in (23.17)

$$A = \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i^2 - \sum_{i=1}^{g} 2 \cdot \frac{m_i}{M} \cdot P_i \cdot S + \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot S^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i^2 - \overline{P}^2 + \overline{P}^2 - 2 \cdot \overline{P} S + S^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i^2 - \overline{P}^2 + (\overline{P} - S)^2.$$

Da $\sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i^2 - \overline{P}^2$ von S überhaupt nicht abhängt und da $(\overline{P} - S)^2$ stets positiv oder gleich Null ist, nimmt A den minimalen Wert für

$$S = \overline{P} = \sum_{i=1}^{g} \frac{m_i}{M} \cdot P_i$$

an.

Aufgabe 23.7

Zur Demonstration der glättenden Wirkung bei der Bildung von gleitenden Durchschnitten wollen wir einmal eine rekursiv gegebene Folge anstatt, wie in diesem Zusammenhang meist üblich, einer empirisch gegebenen Folge untersuchen.

Geben Sie die Folge der gleitenden Durchschnitte zu

a) $y_{k+1} = -0{,}9\, y_k$; $y_0 = 1$

b) $y_{k+1} = a\, y_k$ $(a \in \mathbb{R})$; $y_0 = 1$

in expliziter Form an. Wählen Sie dabei jeweils

1. $g = 2$; $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$
2. $g = 3$; $m_1 = \frac{1}{6}$; $m_2 = \frac{1}{3}$; $m_3 = \frac{1}{2}$.

Zeichnen Sie die Schaubilder für die Fälle a 1 und a 2.

§ 24 Das Verfahren von Heron

Wir betrachten im folgenden die Aufgabe, für eine positive Zahl a die Zahl $\sqrt{a}$ näherungsweise zu ermitteln. Die folgende geometrische Interpretation erweist sich als sehr hilfreich:

Gesucht ist die Seitenlänge eines Quadrats vom Flächeninhalt a.

Wir approximieren das gesuchte Quadrat wie folgt durch Rechtecke des Flächeninhalts a:

1. Als erste grobe Näherung wählen wir die Seitenlängen $x_1 = 1$.

und $y_1 = a$.

2. Außer im (trivialen) Fall $a = 1$ sind die Rechteckseiten x_1 und y_1 unterschiedlich lang. Wir verringern diesen Unterschied, indem wir die kleinere Seite vergrößern und die größere verkleinern, ohne den Flächeninhalt des Rechtecks zu verändern. Konkret wählen wir als eine der neuen Seiten das arithmetische Mittel von x_1 und y_1:

$$y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

Die zugehörige Seite x_2 ist dann

$$x_2 = \frac{a}{y_2}.$$

3. Dieses Ausgleichungsverfahren wird nun sinngemäß fortgesetzt. Sind etwa, für $k \geqq 1$, die Seiten y_k und $x_k = \frac{a}{y_k}$ gegeben, so ergibt sich als neue Seitenlänge:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}\left(y_k + \frac{a}{y_k}\right) \tag{24.1}$$

Die zugehörige Seite x_{k+1} schreiben wir im folgenden nicht mehr explizit auf, da sie sich zwangsläufig aus y_{k+1} und dem Flächeninhalt a ergibt.

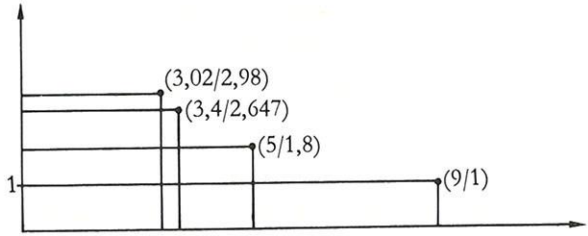


Abb. 24.1

Gleichung (24.1) ist eine nichtlineare Differenzengleichung mit der konstanten, aber numerisch im allgemeinen unbekannten Lösung $y_k = \sqrt{a}$.

Aufgabe 24.1

a) Stellen Sie das Heron-Verfahren im Flußdiagramm dar.

b) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur näherungsweisen Ermittlung von $\sqrt{a}$. Der Eingangsparameter a ist dabei flexibel zu halten.

Trotz der großen Anschaulichkeit der geschilderten Vorgehensweise sind noch einige implizit gemachte Annahmen zu überprüfen.

Aufgabe 24.2

Zeigen Sie:

a) Für das geometrische Mittel $\sqrt{a \cdot b}$ und das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ zweier positiver reeller Zahlen a und b gilt stets:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

b) Für $a \geq 1$ gilt mit y_{k+1} aus (24.1)

$$y_{k+1} \geq \sqrt{a} \quad \text{und} \quad \frac{a}{y_{k+1}} \leq \sqrt{a}$$

Für $a \leq 1$ gilt:

$$y_{k+1} \leq \sqrt{a} \quad \text{und} \quad \frac{a}{y_{k+1}} \geq \sqrt{a}$$

c) Für $a \geq 1$ gilt:

$$y_{k+1} \leq y_k$$

Für $a \leq 1$ gilt:

$$y_{k+1} \geq y_k$$

d) Die durch (24.1) und $y_1 = a$ gegebene Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert stets.

e) $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = \sqrt{a}$

f) Die durch (24.1) und einen beliebigen Anfangswert $y_1 > 0$ gegebene Folge (y_k) konvergiert stets.

Eine naheliegende direkte Verallgemeinerung des oben für die Quadratwurzel gegebenen Heron-Verfahrens stellt die folgende Rekursionsgleichung zur Bestimmung von $\sqrt[m]{a}$ $(m \in \mathbb{N})$ dar:

$$y_{k+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)y_k + \frac{a}{y_k^{m-1}}\right) \tag{24.2}$$

Aufgabe 24.3

Interpretieren Sie die Gleichung (24.2) geometrisch.

Hinweis: Quader des Volumens a im m-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe 24.4

a) Stellen Sie einen Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt[m]{a}$ auf.

b) Setzen Sie den Algorithmus in ein Computerprogramm um.

VI WACHSTUMSPROZESSE IN REKURSIVER DARSTELLUNG

§ 25 Vorbemerkungen zur Frage der Begriffsbildung; Abgrenzung der behandelten Problemkreise

Die im folgenden zu diskutierenden Wachstumsprozesse werden ausnahmslos anhand rekursiver Gleichungen eingeführt. Es sind also Prozesse, denen formal gesehen Differenzengleichungen zugrunde liegen, wie wir sie bisher auch schon betrachtet haben. Allerdings werden wir es verstärkt mit nichtlinearen Gleichungen zu tun haben. Die Verwendung des Terminus "Wachstumsprozeß" ist darauf zurückzuführen, daß die speziellen im folgenden darzustellenden rekursiven Gleichungen im Verlaufe der Konstruktion mathematischer Modelle besonders in den Wirtschafts-, Sozial- und Naturwissenschaften entstehen. Obwohl das Anwendungsspektrum der rekursiven Prozesse weit allgemeiner ist, werden wir eine primär biologisch gefärbte Sprech- und Bezeichnungsweise verwenden. Wir hoffen, daß dies der Entwicklung einer konkreten Anschaulichkeit zuträglich ist. Die Übertragung auf nichtbiologische Wachstumsprozesse ist vielfach unschwer möglich und eröffnet häufig interessante Interpretationsfragen in dem entsprechenden Anwendungsgebiet.

Den Träger des Wachstumsvorganges bezeichnen wir grundsätzlich als *Population* (Bevölkerung). Diese kann tatsächlich die menschliche Bevölkerung eines Landes, eines Erdteils, einer Stadt oder auch der ganzen Welt sein. Der Begriff "Bevölkerung" kann aber auch eine Tierpopulation, eine Algenmenge, ein im Laborversuch zu untersuchendes Präparat (Hefepilzkultur, chemische Substanzen) oder eine wirtschaftliche Größe (Sozialprodukt, Lohn, Guthaben) bedeuten. Der Wachstumsprozeß findet im Verlaufe der Zeit statt. Wir denken uns eine gewisse Zeitspanne, etwa das Zeitintervall von 0 bis T in n gleich große Abschnitte der Dauer Δt eingeteilt:

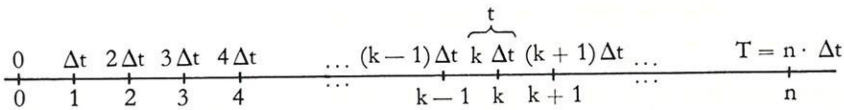


Abb. 25.1

Die Größe der Population zum Zeitpunkt t bezeichnen wir kurz mit B_t. (Wer mag, kann die Größe B_t auch einfach als Bestand zum Zeitpunkt t deuten.) Gelegentlich ist es günstiger, einfach die Nummer des Zeitpunktes zu verwenden. Dann schreiben wir B_k. Die Indices k und t sind durch die Gleichung

$$t = k \cdot \Delta t \qquad \text{bzw.} \qquad k = \frac{t}{\Delta t} \tag{25.1}$$

miteinander verbunden. Da t und k (bzw. $t + \Delta t$ und $k + 1$) jeweils denselben Zeitpunkt beschreiben, ist stets

$$B_t = B_k \qquad \text{und} \qquad B_{t+\Delta t} = B_{k+1}.$$

Die Veränderung des Bevölkerungsbestandes beim Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist durch die Größe

$$\Delta B_t := B_{t+\Delta t} - B_t \qquad (\text{bzw. } \Delta B_k := B_{k+1} - B_k)$$

gegeben. Dieser Nettozuwachs bzw. Nettoschwund setzt sich aus reinen Zugängen, die wir am folgenden als *Geburten* bezeichnen wollen, und reinen Abgängen, im folgenden *Sterbefälle* genannt, zusammen. Die für uns zentrale Grundgleichung jedes biologisch gedeuteten Wachstumsprozesses lautet:

$$B_{k+1} = B_k + G_k - S_k \tag{25.2}$$

G_k steht für die Geburten, S_k für die Sterbefälle beim Übergang von k zu $k+1$ bzw. von t zu $t+\Delta t$.

Die Funktionen $k \longrightarrow G_k$ bzw. $k \longrightarrow S_k$ nennen wir auch die *Geburtenfunktion* bzw. die *Sterbefunktion* des Wachstumsprozesses.

Diese biologische Interpretation ist natürlich nur für

$$G_k \geq 0 \qquad \text{und} \qquad S_k \geq 0 \tag{25.3}$$

sinnvoll. Die Größe

$$\Delta B_k = B_{k+1} - B_k \qquad (= G_k - S_k) \tag{25.4}$$

bezeichnen wir im folgenden grundsätzlich als (Bevölkerungs-)*Zuwachs*, selbst wenn ΔB_k negativ sein sollte. Neben diesem Zuwachs wird jeder Wachstumsprozeß durch eine Fülle von charakteristischen Größen beschrieben, deren Bezeichnung in der Literatur allerdings sehr uneinheitlich und gelegentlich nicht einmal selbtkonsistent ist.

Aufgabe 25.1

Wie viele Begriffe lassen sich aus den Bestimmungswörtern

Wachstums-, Reproduktions- und Zuwachs-

und den Grundwörtern

-rate, -quote, -faktor, -quotient, -koeffizient, -index, -geschwindigkeit und -intensität

bilden?

Im Hinblick auf die Bewertung eines Wachstumsprozesses ist neben dem absoluten Zuwachs ΔB_k besonders auch der auf das vorhandene Bevölkerungsvolumen bezogene relative Zuwachs

$$b_k := \frac{\Delta B_k}{B_k} \tag{25.5}$$

(für $B_k \neq 0$) von Bedeutung. Obwohl uns zur Bezeichnung dieser Größe der Begriff "Zuwachsintensität" gut geeignet erscheint, wollen wir doch die zwar verwaschenere und abgegriffenere, aber stärker verbreitete Bezeichnung (relative) *Zuwachsrate* verwenden. Entsprechend wird mit

$$g_k := \frac{G_k}{B_k} \quad \text{die } \textit{Geburtenrate} \tag{25.6}$$

und mit

$$s_k := \frac{S_k}{B_k} \quad \text{die } \textit{Sterberate} \tag{25.7}$$

beim Übergang vom Zeitpunkt k zum Zeitpunkt k + 1 bezeichnet. Aus (25.2) folgt sofort

$$b_k = g_k - s_k . \tag{25.8}$$

Den in der Gleichung

$$B_{k+1} = B_k + \Delta B_k = (1 + b_k) \cdot B_k \tag{25.9}$$

auftretenden Faktor

$$w_k := 1 + b_k \tag{25.10}$$

bezeichnen wir als *Wachstumsrate*. Für die Wachstumsrate gilt offenbar, falls $B_k \neq 0$ ist:

$$w_k = \frac{B_{k+1}}{B_k} .$$

Wir wollen diese Bezeichnungen nun auf die Zeitvariable t übertragen. Die Grundgleichung lautet dann

$$B_{t+\Delta t} = B_t + G_t - S_t . \tag{25.11}$$

Der Zuwachs im halboffenen Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ ist

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t . \tag{25.12}$$

Ein Maß für die Schnelligkeit des Zuwachses ist durch die Größe

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} \quad (= \text{Zuwachs in der Zeit } \Delta t) \tag{25.13}$$

gegeben. Obwohl auch diese Größe in der Literatur gelegentlich als Wachstums- oder Zuwachsrate bezeichnet wird, werden wir sie der Deutlichkeit halber im folgenden *Zuwachsgeschwindigkeit* nennen.

Da ein Zuwachs von 1000 Individuen im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ für eine Population aus 10 000 Individuen weit mehr bedeutet als etwa für eine Population von 1 000 000 Individuen, ist ein geeignetes Maß für die Dynamik des Wachstums einer Bevölkerung offenbar nicht allein die in (25.13) gegebene Zuwachsgeschwindigkeit, sondern der Quotient aus Zuwachsgeschwindigkeit und Populationsgröße. Wir bezeichnen daher mit

$$b_t = \frac{\frac{\Delta B_t}{\Delta t}}{B_t} = \frac{\Delta B_t}{\Delta t \cdot B_t} \tag{25.14}$$

die relative *Zuwachsrate* der Population bei Verwendung der Zeitvariablen Δt. Diese Definition ist konsistent mit (25.5), da bei Verwendung der Zeitvariablen k die Intervallänge Δt durch 1 zu ersetzen ist. Bei der Übertragung $t \longrightarrow k$ und $\Delta t \longrightarrow 1$ geht (25.14) in (25.5) über. Als Kurzfassung können wir uns merken:

Zuwachsrate = absoluter Zuwachs pro Zeitdauer und Populationsgröße
(= Pro-Kopf-Zuwachsgeschwindigkeit)

Aus (25.14) erhalten wir die mit (25.9) übereinstimmende Rekursionsgleichung

$$B_{t+\Delta t} = B_t + B_t \cdot b_t \cdot \Delta t = (1 + b_t \cdot \Delta t) \cdot B_t . \tag{25.15}$$

Entsprechend (25.11) definieren wir die Wachstumsrate als den Quotienten aus neuer und alter Populationsgröße, bezogen auf das durchlaufene Zeitintervall Δt:

$$w_t = \frac{\frac{B_{t+\Delta t}}{B_t}}{\Delta t} = \frac{B_{t+\Delta t}}{B_t \cdot \Delta t} \tag{25.16}$$

Hieraus folgt:

$$B_{t+\Delta t} = B_t \cdot w_t \cdot \Delta t \tag{25.17}$$

Ein Vergleich mit (25.15) ergibt:

$$w_t \cdot \Delta t = 1 + b_t \cdot \Delta t \tag{25.18}$$

Auch diese Gleichung ist konsistent mit (25.10). Die größere Bedeutung kommt, vor allem im Hinblick auf den möglichen Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$, dem Begriff der Zuwachsrate b_t zu.

Der Vollständigkeit halber ergänzen wir noch:

$$g_t = \frac{G_t}{B_t \cdot \Delta t} \qquad \text{(Geburtenrate)} \tag{25.19}$$

$$s_t = \frac{S_t}{B_t \cdot \Delta t} \qquad \text{(Sterberate)} \tag{25.20}$$

Aus der Grundgleichung (25.11) wird bei Verwendung dieser Bezeichnungen:

$$B_{t+\Delta t} = B_t + g_t \cdot \Delta t \cdot B_t - s_t \cdot \Delta t \cdot B_t \tag{25.21}$$

Wir halten für das folgende fest:

Satz 25.1

Beim Übergang von der Zeitvariablen k zur Zeitvariablen t sind die Bestandgrößen

$$B_k,\ G_k \text{ und } S_k \qquad (\text{bzw. } B_{k+1},\ G_{k+1} \text{ und } S_{k+1})$$

jeweils durch

$$B_t,\ G_t \text{ und } S_t \qquad (\text{bzw. } B_{t+\Delta t},\ G_{t+\Delta t} \text{ und } S_{t+\Delta t})$$

zu ersetzen, während die Raten

$$b_k,\ g_k,\ s_k \text{ und } w_k$$

jeweils durch

$$b_t \cdot \Delta t,\ g_t \cdot \Delta t,\ s_t \cdot \Delta t \text{ und } w_t \cdot \Delta t$$

zu ersetzen sind.

Das Wachstum verschiedener Populationen beeinflußt sich häufig gegenseitig (Räuber-Beute-Beziehung zwischen Hasen und Füchsen, Konkurrenz zwischen Füchsen und Luchsen bei der Hasenjagd usw.). Dennoch gibt es einen großen Komplex von Wachstumsprozessen, wo sich eine isolierte Population unabhängig von Interaktionen mit anderen Populationen entwickelt. Wegen dieser Bedeutung einerseits und der leichteren Zugänglichkeit andererseits werden wir uns deshalb zunächst mit dem Wachstum isolierter Populationen beschäftigen. Im Sinne des grundlegenden naturwissenschaftlichen Prinzips der Trennung von Einflußfaktoren bei komplexen Vorgängen ist die Behandlung isolierter Populationen auch für die Diskussion interagierender Populationen von Bedeutung.

Das Wachstum einer Bevölkerung kann von inneren (endogenen) Merkmalen wie z. B. Fruchtbarkeit und Sterblichkeit einer Population oder auch von äußeren (exogenen) Faktoren wie z. B. Kapazitätsbeschränkung durch Nahrungsmittel- oder Raummangel, Erreichung eines Sättigungsgrades in der Versorgung mit bestimmten Waren geprägt sein. Wir haben den Eindruck, daß die endogen erklärten Wachstumsvorgänge eher in der Biologie, die exogenen eher in den Wirtschaftswissenschaften auftreten. Natürlich gibt es starke Überlappungen, besonders bei komplexeren Wachstumsprozessen. Die Reinform endogener oder exogener Beschreibung beschränkt sich nur auf die einfachsten Modelle.

Wir beginnen im folgenden mit der Diskussion vorwiegend endogen erklärten Wachstums. Des weiteren nehmen wir zunächst an, daß die betrachteten Populationen in sich homogen sind. Wir vernachlässigen also insbesondere solche Aspekte, die sich möglicherweise durch Fluktuationen in der Alters- und Geschlechtsstruktur einer Bevölkerung ergeben.

Alle in diesem Kapitel entwickelten Modelle für Wachstumsprozesse sind deterministischer Natur. Die Berücksichtigung von zufallsbedingten Einflußfaktoren ist einer tiefergehenden Analyse der Wachstumsprozesse vorbehalten.

§ 26 Einige Typen vorwiegend endogen erklärter Wachstumsprozesse von isolierten Populationen

Einige wichtige Wachstumsprozesse haben wir bereits ausführlich diskutiert, so z. B. den durch die Gleichung

$$y_{k+1} = A \cdot y_k + B \tag{26.1}$$

beschriebenen Prozeß. Für $A = 1 + p$ mit $0 < p < 1$ und $B > 0$ kann (26.1) etwa als Anwachsen eines mit $100 \cdot p\,\%$ verzinsten Sparguthabens bei konstanter periodischer Einzahlung B gedeutet werden. Für $B < -p \cdot y_0$ entspricht die Gleichung einem Tilgungsvorgang. Für $-p \cdot y_0 \leqq B \leqq 0$ kann man (26.1) als das Abfischen in einem Fischteich ohne Reduktion des ursprünglich gegebenen Fischbestandes interpretieren ("Erntevorgang"). Im ersten Falle waren die "Geburten"- und die "Sterbefunktion" gegeben durch

$$G_k = (A - 1) \cdot y_k + B; \qquad S_k = 0 \tag{26.2}$$

Im zweiten und dritten Fall wäre

$$G_k = (A - 1) \cdot y_k \quad \text{und} \quad S_k = |B|. \tag{26.3}$$

Beim Tilgungsvorgang haben wir es mit einem negativen "Zuwachs" Δy_k zu tun, also mit einer Abnahme des Bestandes, hier der Restschuld. In den beiden anderen Fällen ist der Zuwachs positiv. Die Geburtenrate ist dabei stets konstant:

$$g_k = \frac{G_k}{y_k} = A - 1$$

Die Sterberaten werden bei wachsendem y_k immer kleiner:

$$s_k = \frac{|B|}{y_k}$$

Als unglücklicher Umstand ist anzusehen, daß die konstante Sterbefunktion B des Tilgungsprozesses im Finanzwesen als Tilgungs*rate* bezeichnet wird. Da B die Tilgung pro Zeiteinheit angibt, wäre im Sinne der hier verwendeten Terminologie von Tilgungs*geschwindigkeit* zu sprechen. Das entspräche durchaus auch der natürlichen Anschauung, da für $B < B^*$ bei gleichem Anfangsdarlehen und gleichem Zinssatz der durch B^* gegebene Tilgungsprozeß schneller beendet ist als der durch B beschriebene Vorgang.

Bekannte Spezialfälle des durch (26.1) gegebenen Wachstumsprozesses erhält man für

$$B = 0: \quad y_{k+1} = A \cdot y_k \qquad \text{(geometrische Folge)}$$

$$A = 1: \quad y_{k+1} = y_k + B \qquad \text{(arithmetische Folge)}.$$

Auch in anderen Wachstumsmodellen wird die Geburtenrate - wie in (26.1) - als eine Konstante der Population angesehen, die sich also insbesondere nicht mit der Populationsgröße verändert. Das charakteristische Beschreibungsmerkmal der im folgenden zu behandelnden Wachstumsfunktionen wird also meist die Sterbefunktion S_k sein.

[26.1] Freies Wachstum und Tilgungswachstum

In einem der einfachsten Modelle nehmen wir an, daß neben der Geburtenrate auch die Sterberate konstant ist. Es sei also

$$\left.\begin{array}{ll} g_k = g = \text{konstant} & \text{für alle } k, \text{ und} \\ s_k = s = \text{konstant} & \text{für alle } k. \end{array}\right\} \tag{26.4}$$

Nach den Definitionen (25.6) und (25.7) bedeutet das

$$G_k = g \cdot B_k \tag{26.5}$$

$$S_k = s \cdot B_k \tag{26.6}$$

und somit

$$B_{k+1} = B_k + g \cdot B_k - s \cdot B_k = (1 + g - s) \cdot B_k. \tag{26.7}$$

Aus der Konstanz von Geburten- und Sterberate folgt, daß auch die Zuwachsrate konstant ist:

$$b = g - s \tag{26.8}$$

Die Lösungsfolgen von (26.7) sind geometrische Folgen mit der Wachstumsrate

$$w = 1 + g - s = 1 + b \tag{26.9}$$

als konstantem Quotienten aufeinanderfolgender Folgenglieder. Als explizite Lösung dieser zu den einfachsten Typen gehörenden Differenzengleichung haben wir in Satz 7.1 die durch

$$B_k = w^k \cdot B_0 \tag{26.10}$$

gegebene Folge kennengelernt.

Da die Zuwachsrate $b = g - s$ durch keine Einflußfaktoren "gestört" wird, spricht man bei diesem Wachstumsvorgang auch von einem *unbehinderten* oder *freien* Wachstum. Auf Grund der expliziten Darstellung (26.10) heißt dieses Wachstum auch noch *geometrisches* oder *exponentielles Wachstum*.

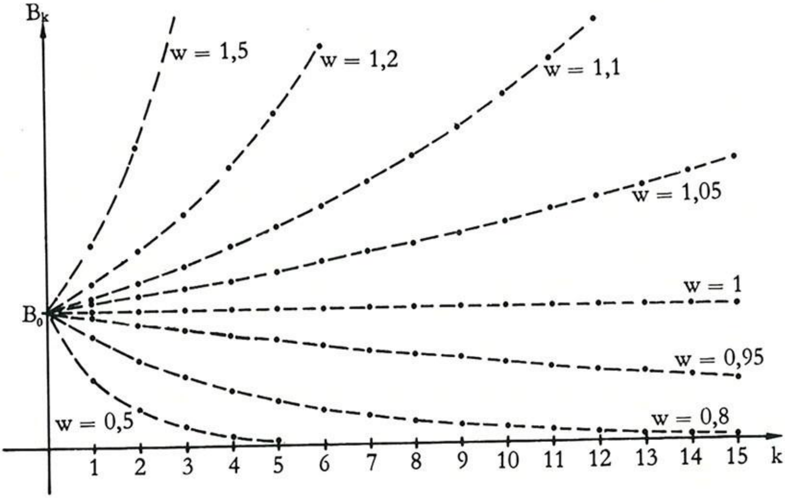


Abb. 26.1

Aufgabe 26.1

Die folgende Tabelle gibt die Bevölkerungszahlen und Zuwachsraten einiger Länder im Jahre 1970 an. Erstellen Sie unter Verwendung eines Computers oder Taschenrechners für jedes Land eine Liste mit den Einwohnerzahlen für die Jahre 1970, 1975, 1980, 1985, 1990, 1995, 2000 (unter der Annahme, daß die Zuwachsraten konstant bleiben).

Land	Einwohnerzahl 1970 in Millionen	Zuwachsrate in Hundertsteln
Volksrepublik China	760	1,6
Indien	540	2,3
USA	205	1
Brasilien	93	3
Mexiko	50	3,5

Tab. 26.1

Für das Tilgungswachstum, das sachlich eng mit dem freien Wachstum verknüpft ist, wie wir in § 3 gesehen haben, wollen wir ein weiteres Beispiel geben.

Die Schlankheitskur

Der Energieverbrauch eines Menschen setzt sich aus dem sogenannten Grundumsatz zur Aufrechterhaltung der Körperfunktionen und dem "zusätzlichen Energiebedarf" zusammen. Bei leichter körperlicher Arbeit, z. B. bei Lehrern, beträgt der zusätzliche Bedarf etwa 4000 Kilojoule (kJ) pro Tag. Der tägliche Grundumsatz hängt vom jeweiligen Körpergewicht ab. Als grobe Regel gilt: Pro Kilogramm Körpergewicht sind für den Grundumsatz ca. 100 kJ zu veranschlagen. Für diejenigen, bei denen die letzte Kur schon länger zurückliegt: 1 Kilokalorie entspricht 4,2 Kilojoule.

Ein 80 kg schwerer Lehrer hat also, bei gleichbleibender körperlicher Belastung,einen täglichen Energieverbrauch von

$$80 \cdot 100 \text{ kJ} + 4000 \text{ kJ} = 12\,000 \text{ kJ}.$$

Allgemein: Verbrauch bei W Kilogramm Körpergewicht, in kJ:

$$W \cdot 100 + 4000$$

Soll das Körpergewicht reduziert werden, so kann dies nur dadurch erfolgen, daß die tägliche Energiezufuhr durch die Nahrungsmittel geringer ist als der Energieverbrauch. Eine Einsparung von ungefähr 25 000 kJ führt zu einem Abbau von 1 kg Fettgewebe. Entsprechendes gilt auch für den Aufbau von Fettpolstern. Wird bei einer Schlankheitskur täglich eine feste, unter dem individuellen Verbrauch liegende Energiezufuhr von Z kJ durchgehalten, so beträgt die vom momentanen Gewicht abhängige tägliche Energieeinsparung:

$$(W_k \cdot 100 + 4000) - Z$$

W_k ist das Gewicht in kg am k-ten Tag der Kur.

Die Gewichtsreduzierung am k-ten Tag beträgt daher, in kg:

$$\frac{1}{25\,000} \cdot (W_k \cdot 100 + 4000 - Z)$$

Der Verlauf des Körpergewichts während der Kur wird somit durch die folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$W_{k+1} = W_k - \frac{1}{25\,000} \cdot (100 \cdot W_k + 4000 - Z)$$

$$W_{k+1} = \frac{249}{250} \cdot W_k + \frac{Z - 4000}{25\,000}$$

Die tägliche Energiezufuhr ist hierbei eine frei vorgebbare, aber konstante Größe. Die gefundene Differenzengleichung ist also vom Typ der Tilgungsgleichung, deren Lösung nach Satz 7.1 in Abhängigkeit vom Anfangswert W_0 folgendermaßen lautet:

$$W_k = \left(W_0 - \frac{Z - 4000}{100}\right) \cdot \left(\frac{249}{250}\right)^k + \frac{Z - 4000}{100}$$

Ein Beispiel mit konkreten Werten:

Ein 90 kg schwerer Lehrer führt zwei Wochen lang eine 8000-kJ-Diät durch. Sein Gewicht im Laufe der Kur beträgt somit, in kg:

$$W_k = 50 \cdot \left(\frac{249}{250}\right)^k + 40$$

Nach Ablauf der zwei Wochen hat er dann das Gewicht, in kg:

$$W_{14} = 50 \cdot \left(\frac{249}{250}\right)^{14} + 40 \cong 87,3$$

Die vierzehntägige Kur hat ihm also eine Gewichtsreduzierung von 2,7 kg eingebracht.

Literatur: Ulrich Klever, Kalorien-Joule-Kompaß, Gräfe und Unzer Verlag, München.

[26.2] Logistisches Wachstum

Die Annahme, daß die Sterberate und somit bei konstanter Geburtenrate auch die Zuwachsrate konstant seien, läßt sich offenbar nur für begrenzte Zeiträume aufrechterhalten. Bei steigender Populationsgröße kommt es zu Nahrungsmittelknappheit, Raumnot, Streß durch "Gedränge" und ähnlichen die Sterberate beeinflussenden Phänomenen. Im folgenden Modell wird deshalb angenommen, daß die Sterberate s_k proportional zur Populationsgröße sei:

$$s_k = m \cdot B_k \qquad \text{(m: Mortalität)} \tag{26.11}$$

Die Zahl der Sterbefälle im Zeitintervall $[k, k+1)$ ist dann gleich

$$S_k = s_k \cdot B_k = m \cdot B_k^2, \tag{26.12}$$

und die Grundgleichung dieses Wachstumsprozesses lautet:

$$B_{k+1} = B_k + G_k - S_k = B_k + g \cdot B_k - m \cdot B_k^2$$

$$B_{k+1} = (1+g) \cdot B_k - m \cdot B_k^2 \tag{26.13}$$

Aufgabe 26.2

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das die durch (26.13) gegebene Folge für variabel vorzugebendes g und m, ausgehend von einem Anfangswert B_0, iterativ ausdruckt.

b) Stellen Sie einige der Folgen graphisch dar.

Bei Verwendung der Zeitvariablen t statt k nimmt (26.13) die folgende Gestalt an:

$$B_{t+\Delta t} = B_t + G_t - S_t$$

mit:

$$G_t = g \cdot \Delta t \cdot B_t$$

$$S_t = s_t \cdot \Delta t \cdot B_t = m \cdot B_t \cdot \Delta t \cdot B_t .$$

Es ist also:

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t = (g \cdot \Delta t - m \cdot B_t \cdot \Delta t) \cdot B_t,$$

und die Zuwachsgeschwindigkeit beträgt:

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = (g - m \cdot B_t) \cdot B_t = g \cdot B_t - m \cdot B_t^2 \tag{26.14}$$

Der folgende Trick mag dem Anfänger zwar unmotiviert erscheinen, er zählt aber zu einem gewissen methodischen Standardrepertoire, das im Verlaufe der intensiveren Beschäftigung mit derartigen Differenzengleichungen durchaus natürlich erscheint. Wir setzen

$$Z_t = \frac{1}{B_t} . \tag{26.15}$$

Dann ist die Zuwachsgeschwindigkeit für Z_t nach (26.15)

$$\frac{Z_{t+\Delta t} - Z_t}{\Delta t} = \frac{\dfrac{1}{B_{t+\Delta t}} - \dfrac{1}{B_t}}{\Delta t} = \frac{B_t - B_{t+\Delta t}}{\Delta t \cdot B_{t+\Delta t} \cdot B_t}$$

$$\frac{\Delta Z_t}{\Delta t} = -\frac{\Delta B_t}{\Delta t} \cdot \frac{1}{B_{t+\Delta t} \cdot B_t} = \frac{-g \cdot B_t + m \cdot B_t^2}{B_{t+\Delta t} \cdot B_t} \tag{26.16}$$

Für jeden festen Zeitpunkt t_0 und immer kleiner gewählte und schließlich gegen Null strebende Zeitintervalle Δt nähert sich $B_{t_0+\Delta t}$ bei kontinuierlichem Wachstum dem Wert B_{t_0} an, in Zeichen:

$$\lim_{\Delta t \to 0} B_{t_0+\Delta t} = B_{t_0}$$

Unter der Annahme eines sehr kleinen Intervalls Δt ersetzen wir somit näherungsweise den Wert von $B_{t_0+\Delta t}$ durch B_{t_0}. Da dies für jeden festen, aber beliebigen Zeitpunkt t_0 durchgeführt werden kann, ersetzen wir im folgenden allgemein $B_{t+\Delta t}$ durch B_t. Gleichung (26.16) geht dann über in:

$$\frac{\Delta Z_t}{\Delta t} = \frac{-g \cdot B_t + m \cdot B_t^2}{B_t^2} = -g \cdot \frac{1}{B_t} + m = -g \cdot Z_t + m$$

Also ist

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t - g \cdot \Delta t \cdot Z_t + m \cdot \Delta t. \tag{26.17}$$

In der Darstellung durch die Zeitvariable k nimmt diese Gleichung die Form der Tilgungsgleichung an:

$$Z_{k+1} = Z_k - g \cdot Z_k + m = (1-g) \cdot Z_k + m \tag{26.18}$$

Für eine von Null verschiedene Geburtenrate g lautet ihre explizite Lösung in Abhängigkeit vom Anfangswert Z_0 nach (7.6):

$$Z_k = (1-g)^k \cdot Z_0 + \frac{1-(1-g)^k}{g} \cdot m \tag{26.19}$$

Unter der Voraussetzung, daß das Zeitintervall Δt sehr klein ist, kann

$$B_k = \frac{g \cdot B_0}{g \cdot (1-g)^k + (1-(1-g)^k) m \cdot B_0}$$

beziehungsweise mit $G_0 = g \cdot B_0$ und $s_0 = m \cdot B_0$

$$B_k = \frac{G_0}{(1-g)^k (g - s_0) + s_0} \tag{26.20}$$

als Näherungslösung der nichtlinearen Differenzengleichung (26.13) angesehen werden.

Für Geburtenraten im Bereich $0 < g < 2$ und für $k \to \infty$ erhalten wir

$$(1-g)^k \to 0 \quad \text{und} \quad B_k \to \frac{g}{m}. \tag{26.21}$$

Der durch die iterative Auswertung in Aufgabe 26.2 gewonnene Eindruck, daß sich die Populationsgröße einer festen oberen Schranke nähert, ist also bestätigt. Diese obere Schranke

$$K = \frac{g}{m} \tag{26.22}$$

heißt die *Kapazität* der Umwelt für die Population B_k.

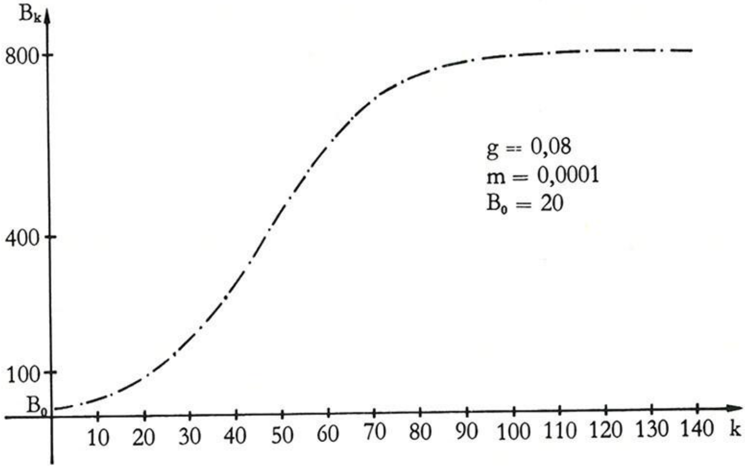


Abb. 26.2

Das durch (26.13) definierte Wachstum nennt man *logistisches Wachstum*.

Aufgabe 26.3

Zeigen Sie im Hinblick auf den durch (26.13) gegebenen Wachstumsprozeß:

a) Für $B_k < K = \frac{g}{m}$ ist $w_k > 1$.

b) Für $B_k > K = \frac{g}{m}$ ist $w_k < 1$.

Aufgabe 26.4

In leichter Verallgemeinerung des durch (26.11) bzw. (26.13) definierten Modells sei die Geburtenrate eines Wachtumsprozesses gegeben durch $g_k = g + \hat{g}\cdot B_k$ (statt bisher g_k = konstant = g). Dabei seien g und $\hat{g}$ feste, reelle Koeffizienten. Die Sterberate laute $s_k = (\hat{m} + m\cdot B_k)$ (statt bisher $s_k = m\cdot B_k$) mit den festen, reellen Koeffizienten $\hat{m}$ und m.

a) Zeigen Sie, daß der Wachstumsprozeß trotz des formal allgemeineren Ansatzes der Geburten- und der Sterberate ebenfalls vom Typ des logistischen Wachstums ist.

b) Bestimmen Sie die Kapazitätskonstante K dieses Wachtumsprozesses.

[26.3] Ertrag, Phasenkurve, Gleichgewicht

Ist die betrachtete Population ein Erntegut, z. B. ein Waldbestand, in dem regelmäßig Holz geschlagen wird, oder ein Fischbestand, der abgefischt wird, so kann der Zuwachs

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t$$

als derjenige Anteil des Bestandes angesehen werden, der ohne "Substanzverlust" der Population entnommen ("geerntet") werden kann. Unter gewissen ökonomischen Aspekten ist man daran interessiert, diesen Ernteertrag zu maximieren. Da der Ertrag bei vorgegebener Geburten- und Sterberate und fester Intervallgröße Δt nur von der Populationsgröße B_t abhängt, stellt sich die Frage, bei welchem Bestand der Ertrag am größten ist.

Im Falle des freien Wachstums ($B_{k+1} = w \cdot B_k$) wächst oder fällt der Ertrag pro Zeiteinheit

$$\Delta B_k = w^{k+1} B_0 - w^k B_0 = w^k \cdot B_0 \cdot (w-1)$$

monoton mit k.

Interessanter ist die Sachlage im Falle des logistischen Wachstums (26.14)

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t = g \cdot \Delta t \cdot B_t - m \cdot \Delta t \cdot B_t^2 .$$

Da der absolute Ertrag ΔB_t bei fester Intervallgröße Δt genau dann am größten ist, wenn die Zuwachsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = g \cdot B_t - m \cdot B_t^2 \tag{26.23}$$

am größten ist, wollen wir der Einfachheit halber die Abhängigkeit der Zuwachsgeschwindigkeit von der Populationsgröße untersuchen. Der Funktionsgraph der gesuchten Abhängigkeit ist nach (26.23) bei $m > 0$ eine nach unten geöffnete Parabel, die durch Subtraktion der Funktion

$$B_t \longrightarrow m \cdot B_t^2$$

von der Funktion

$$B_t \longrightarrow g \cdot B_t$$

gewonnen werden kann.

Aus Gleichung (26.23) folgt

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = B_t \cdot (g - m \cdot B_t) .$$

Die Zuwachsgeschwindigkeit ist also gleich Null für $B_t = 0$ und für $B_t = \frac{g}{m}$.

Aus Symmetriegründen (siehe Kurve) liegt die maximale Zuwachsgeschwindigkeit in der Mitte dieser beiden Werte, also bei

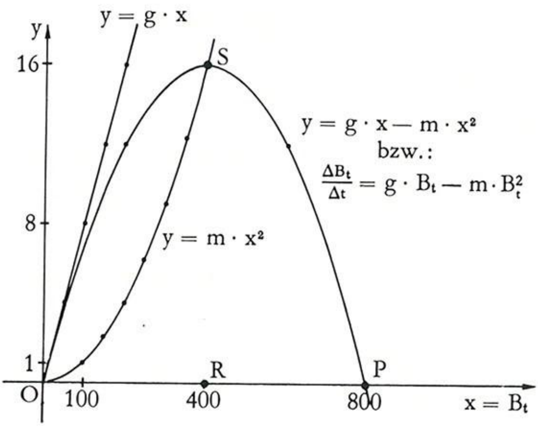


Abb. 26.3

$$B_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{m} = \frac{1}{2} \cdot K \tag{26.24}$$

Die Ernte weist also beim logistischen Wachstum dann den maximalen Ertrag auf, wenn der Bestand gerade die Hälfte des Kapazitätswertes einnimmt.

Die Darstellung der Zuwachsgeschwindigkeit $\frac{\Delta B_t}{\Delta t}$ in Abhängigkeit vom Bestand B_t, wie sie in Abbildung 26.3 für den Spezialfall des logistischen Wachstums erfolgt ist, heißt auch das *Phasenbild* des

Wachstumsprozesses. Der Kurvenpunkt $(B_t, \frac{\Delta B_t}{\Delta t})$ heißt der *Phasenpunkt*. Er wandert mit der Zeit entlang der *Phasenkurve*.

Im behandelten Beispiel wandert der Phasenpunkt für Bestände zwischen 0 und P im Verlauf der Zeit auf dem Kurvenstück vom Ursprung O über den Scheitel S zum Punkt P. Denn für derartige Bestände ist $\Delta B_t > 0$, also $B_{t+\Delta t} > B_t$. Ist die Abszisse des Phasenpunktes größer als $|\overline{OP}|$, so ist der "Zuwachs" beim Übergang von t nach $t + \Delta t$ negativ, das heißt $B_{t+\Delta t} < B_t$, und der Phasenpunkt wandert von rechts auf P zu. In den Punkten O und P ist der Zuwachs gleich Null. Ist etwa $B_t = 0$ oder $B_t = |\overline{OP}|$, so folgt $B_{t+\Delta t}, B_{t+2\Delta t}, \ldots, B_{t+n\cdot\Delta t} = B_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, der Wachstumsprozeß befindet sich im *Gleichgewicht*.

Bei kleinen Auslenkungen des Phasenpunktes aus der Gleichgewichtslage können die folgenden Fälle auftreten:

1. Die darauffolgenden Abweichungen von der Gleichgewichtslage konvergieren stets gegen Null. Dies ist in Abbildung 26.4 für den Gleichgewichtspunkt P angedeutet. Man spricht dann von einem *stabilen* Gleichgewicht.
2. Die weiteren Abweichungen von der Gleichgewichtslage konvergieren nicht immer gegen Null. Dies ist in Abbildung 26.4 für den Gleichgewichtspunkt O angedeutet. Ein solches Gleichgewicht nennt man *labil*.

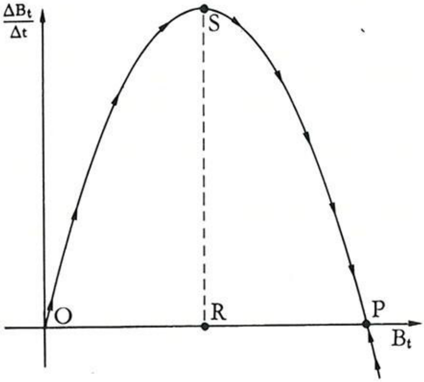


Abb. 26.4

In Abschnitt [27.3] werden wir allgemeine Kriterien für die Art von Gleichgewichtslagen kennenlernen. Wir werden insbesondere in Aufgabe 27.10 sehen, daß für logistisches Wachstum der Punkt P in Abbildung 26.4 genau dann ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, wenn die Geburtenrate g die Bedingung $g < 2$ erfüllt.

Aufgabe 26.5

Bei der Computer-Simulation eines Wachstumsprozesses durch ein von der Planung her entsprechend (26.13) logistisch angelegtes Modell wurde ein Eingabefehler gemacht. Statt die Konstanten g positiv bzw. $-m$ negativ einzugeben, wurden die Vorzeichen vertauscht: $g < 0$ und $-m > 0$.

Drucken Sie eine Wertetafel aus und stellen Sie den Wachstumsprozeß im (t, B_t)-Koordinatensystem dar. Zeichnen Sie die Phasenkurve und diskutieren Sie die Gleichgewichtslagen.

Aus Gründen, die Sie verstehen werden, wenn Sie das (t, B_t)-Schaubild gezeichnet haben, nennt man dieses Wachstum auch *explosives* oder *hyperexponentielles Wachstum*.

Aufgabe 26.6

Dem logistischen Wachstum lag eine nichtlineare Differenzengleichung vom folgenden Typ zugrunde, siehe (26.13):

$$y_{k+1} + a_1 \cdot y_k + a_2 \cdot y_k^2 = 0, \tag{26.25}$$

a_1, a_2 sind fest gewählte, reelle Koeffizienten.

a) Untersuchen Sie die Frage, ob die Gesamtheit aller Lösungsfolgen dieser Gleichung einen reellen Vektorraum bildet.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Lösungsgesamtheit der Gleichung

$$y_{k+1} + a_1 \cdot y_k + a_2 \cdot y_k^2 = b \quad (b \in \mathbb{R},\ b \neq 0) \tag{26.26}$$

entsprechend dem Sachverhalt bei linearen Differenzengleichungen aus der Lösungsgesamtheit von (26.25) und einer speziellen Lösung von (26.26) zusammensetzt.

[26.4] Wachstum bei Selbstvergiftung

Durch Stoffwechselvorgänge erzeugen die Individuen einer Population Abfallprodukte. Die Abfälle verseuchen dann den Lebensraum der Population und beeinflussen so die Sterberate. Wir wollen im folgenden den Fall untersuchen, daß sich die Abfallprodukte nicht im Laufe der Zeit abbauen, wie es z. B. bei einigen Kunststoffprodukten der Fall ist. Dann hängt die Abfallmenge A_k zum Zeitpunkt k ($k \geq 1$) von der Gesamtheit aller Individuen ab, die bis zum Zeitpunkt $k-1$ (einschließlich) gelebt haben:

$$A_k = A_k(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})$$

Für den Anfangswert gelte:

$$A_0 = 0$$

Im folgenden Modell wird angenommen, daß die Abfallmenge A_k proportional zur Summe aller Individuen ist, die bis zum Zeitpunkt $k-1$ (einschließlich) gelebt haben:

$$A_k = v_0 \cdot (B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1}), \tag{26.27}$$

v_0 ist eine positive reelle Konstante. Also ist

$$A_{k+1} = A_k + v_0 \cdot B_k. \tag{26.28}$$

Die Sterberate s_k sei ihrerseits proportional zur Abfallmenge A_k:

$$s_k = v_1 \cdot A_k, \tag{26.29}$$

v_1 ist eine positive reelle Konstante. Daraus folgt die Sterbefunktion

$$S_k = s_k \cdot B_k = v_1 \cdot A_k \cdot B_k. \tag{26.30}$$

Die Grundgleichung dieses Wachstumsprozesses, für den wieder eine konstante Geburtenrate g angenommen wird, lautet somit:

$$B_{k+1} = B_k + G_k - S_k$$

$$B_{k+1} = B_k + g \cdot B_k - s_k \cdot B_k = (1+g) B_k - v_1 \cdot A_k \cdot B_k \tag{26.31}$$

$$B_{k+1} = (1+g)\cdot B_k - v_1\cdot v_0(B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1})\cdot B_k \tag{26.31}$$

Aufgabe 26.7

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur iterativen Bestimmung der jeweiligen Populationsgröße B_k in Abhängigkeit vom Anfangswert B_0. Die Parameter g, v_0 und v_1 sollten dabei variabel eingebbar sein.

b) Stellen Sie einige der Folgen graphisch dar.

Bemerkung: Als Differenzengleichung gesehen ist (26.31) nichtlinear. Sie besitzt auch keine feste Ordnung.

Wir wollen nun den Übergang zur Zeitvariablen t durchführen. Gleichung (26.28) kann so interpretiert werden, daß der Zuwachs ΔA_k pro Zeiteinheit proportional zur Populationsgröße B_k ist. Bei der Übertragung auf die Zeitvariable t (Einheit Δt) bedeutet dies: Die Zuwachs*geschwindigkeit* des Abfalls ist proportional zur Populationsgröße:

$$\frac{\Delta A_t}{\Delta t} = v_0\cdot B_t \tag{26.32}$$

Daraus folgt

$$A_{t+\Delta t} = A_t + v_0\cdot\Delta t\cdot B_t. \tag{26.33}$$

Durch Aufsummieren erhält man:

$$A_t = A_{k\cdot\Delta t} = v_0\cdot\Delta t\cdot(B_0 + B_{\Delta t} + B_{2\cdot\Delta t} + \ldots + B_{(k-1)\cdot\Delta t}) \tag{26.34}$$

Die Bedingung "Die Sterberate ist proportional zur Abfallmenge" führt nun zur Gleichung

$$s_t = v_1\cdot A_t. \tag{26.35}$$

Die Grundgleichung des Wachstums lautet somit nach (25.21):

$$B_{t+\Delta t} = B_t + G_t - S_t$$

$$B_{t+\Delta t} = B_t + g\cdot\Delta t\cdot B_t - s_t\cdot\Delta t\cdot B_t$$

$$B_{t+\Delta t} = (1+g\cdot\Delta t)\cdot B_t - v_1\cdot A_t\cdot\Delta t\cdot B_t \tag{26.36}$$

Mit (26.34) erhalten wir die Gleichung

$$B_{t+\Delta t} = (1+g\cdot\Delta t)\cdot B_t - v_1\cdot v_0\cdot(\Delta t)^2\cdot(B_0 + B_{\Delta t} + \ldots + B_{t-\Delta t})\cdot B_t. \tag{26.37}$$

Für den Zuwachs der Population B_t folgt aus (26.36) und (26.33):

$$\Delta B_t = g\cdot\Delta t\cdot B_t - v_1\cdot A_t\cdot\Delta t\cdot B_t$$

$$\Delta B_t = g\cdot\Delta t\cdot\frac{\Delta A_t}{v_0\cdot\Delta t} - v_1\cdot A_t\cdot\Delta t\cdot\frac{\Delta A_t}{v_0\cdot\Delta t}$$

$$\Delta B_t = \frac{1}{v_0}\cdot(g\cdot\Delta A_t - v_1\cdot A_t\cdot\Delta A_t) \tag{26.38}$$

In dieser Gleichung ist der Populationszuwachs ΔB_t unter anderem auch in Abhängigkeit vom Zuwachs ΔA_t des Abfalls dargestellt. Wenn wir die einzelnen Populationszuwächse

$$\Delta B_0,\ \Delta B_{\Delta t},\ \Delta B_{2\cdot\Delta t},\ldots,\ \Delta B_{t-\Delta t}$$

zu B_0 addieren, erhalten wir das Gesamtvolumen der Population B_t. Gleichung (26.38) eröffnet also die Aussicht, daß möglicherweise ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Populationsgröße B_t und dem Gesamtabfall A_t herstellbar ist. Die Chance, einen solchen Zusammenhang zu finden, liegt nach den obigen Bemerkungen in der getrennten Aufsummierung der um B_0 erhöhten linken und rechten Seiten von Gleichung (26.38).

Die Summe der linken Seiten ergibt dann

$$B_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta B_{i\cdot\Delta t} = B_0 + \Delta B_0 + \Delta B_{\Delta t} + \ldots + \Delta B_{t-\Delta t} = B_t. \tag{26.39}$$

Die entsprechende Summe der rechten Seite ergibt

$$T := B_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{v_0}\cdot(g\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t} - v_1\cdot A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}), \tag{26.40}$$

das heißt,

$$T = B_0 + \frac{g}{v_0}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\Delta A_{i\cdot\Delta t} - \frac{v_1}{v_0}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}. \tag{26.41}$$

Wir berechnen zunächst

$$T_1 := \sum_{i=0}^{k-1}\Delta A_{i\cdot\Delta t} = (A_{\Delta t} - A_0) + (A_{2\cdot\Delta t} - A_{\Delta t}) + \ldots + (A_t - A_{t-\Delta t})$$

$$T_1 = A_t - A_0 = A_t \tag{26.42}$$

Die Aufsummierung der Terme $A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}$ in (26.41) ergibt:

$$T_2 = \sum_{i=0}^{k-1} A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t} = \sum_{i=0}^{k-1} A_{i\cdot\Delta t}\cdot(A_{(i+1)\Delta t} - A_{i\cdot\Delta t})$$

$$T_2 = \sum_{i=0}^{k-1}(A_{i\cdot\Delta t}\cdot A_{(i+1)\cdot\Delta t} - A^2_{i\cdot\Delta t}) \tag{26.43}$$

Da die Abfallmenge monoton steigt, vergrößert sich der Wert von T_2, wenn man den Term $A_{i\cdot\Delta t}\cdot A_{(i+1)\cdot\Delta t}$ durch $A^2_{(i+1)\Delta t}$ ersetzt. Als oberen Schätzwert für T_2 erhalten wir dadurch den Wert

$$\hat{T}_2 = \sum_{i=0}^{k-1}(A^2_{(i+1)\cdot\Delta t} - A^2_{i\cdot\Delta t}) = A^2_{k\cdot\Delta t} - A_0^2 = A^2_t. \tag{26.44}$$

Der Fehler F bei dieser Abschätzung ist

$$F = \sum_{i=0}^{k-1}(A^2_{(i+1)\cdot\Delta t} - A_{i\cdot\Delta t}\cdot A_{(i+1)\Delta t}) = \sum_{i=0}^{k-1} A_{(i+1)\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}$$

$$F = \sum_{i=0}^{k-1}(A_{i\cdot\Delta t} + \Delta A_{i\cdot\Delta t})\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}$$

$$F = \sum_{i=0}^{k-1}(A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t} + (\Delta A_{i\cdot\Delta t})^2).$$

Mit dem Wachstum der Population B_t ist auch das Wachstum der Abfallmenge ein kontinuierlicher Vorgang. Für sehr kleine Werte von Δt wird dann auch der Zuwachs $\Delta A_{i\cdot\Delta t}$ sehr klein. Vernachlässigt man den gegenüber dem Term $A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t}$ verschwindend kleinen Term $(\Delta A_{i\cdot\Delta t})^2$, so erhält man als Schätzwert für den Fehler F näherungsweise:

$$F = \sum_{i=0}^{k-1} A_{i\cdot\Delta t}\cdot\Delta A_{i\cdot\Delta t} = T_2$$

Andererseits erhält man T_2 offenbar als Differenz der oberen Schranke $\hat{T}_2$ und des Fehlers F:

$$T_2 = \hat{T}_2 - F = \hat{T}_2 - T_2$$

Also ist

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot\hat{T}_2 = \frac{1}{2}\cdot A_t^2 \qquad (26.45)$$

Einsetzen von T_1 und T_2 in (26.41) ergibt

$$T = B_0 + \frac{g}{v_0}\cdot A_t - \frac{v_1}{2v_0}\cdot A_t^2.$$

Insgesamt erhalten wir das Ergebnis:

$$B_t = B_0 + \frac{g}{v_0}\cdot A_t - \frac{v_1}{2v_0}\cdot A_t^2 \qquad (26.46)$$

Aufgabe 26.8

Führen Sie die entsprechenden Überlegungen zur Darstellung von B_t in Abhängigkeit von A_t im Falle einer beliebigen Anfangs-Abfallmenge A_0 (an Stelle von $A_0 = 0$) durch.

Auf Grund der Definition von g, v_0 und v_1 sind die Konstanten $\frac{g}{v_0}$ und $\frac{v_1}{v_0}$ ebenfalls positiv.

Die Kurve der Abhängigkeit der Variablen B_t von der Variablen A_t (Abb. 26.5) ist also eine nach unten geöffnete Parabel. Auch diese Kurve nennt man eine Phasenkurve des Wachstumsprozesses.

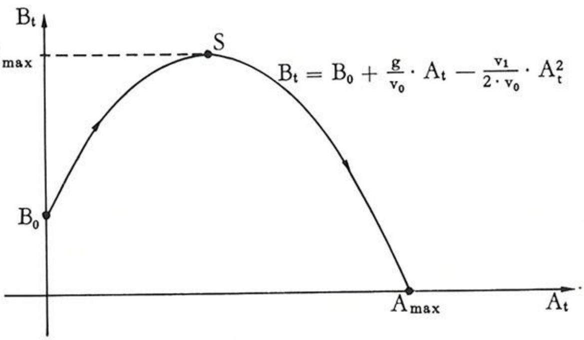


Abb. 26.5

Aufgabe 26.9

a) Interpretieren Sie die in Abbildung 26.5 gegebene Phasenkurv

b) Bestimmen Sie die maximale Abfallmenge A_{max} in Abhängigkeit von B_0.

c) Bestimmen Sie die maximale Populationsgröße B_{max} in Abhängig- keit von B_0.

Bemerkung

Unter etwas anderem Blickwinkel kann man auch die Abfallgröße A_t al eine Population ansehen, die ein gewisses Wachstumsverhalten aufweist. In diesem Sinne sind A_t und B_t zwei sich gegenseitig beeinflussende Populationen, und die Diskussion des Wachstums mit Selbstvergiftung weist bereits in die Richtung des Wachstums von interagierenden Populationen.

Aufgabe 26.10

Geben Sie die Geburten- und die Sterbefunktion bezüglich des Wachstums von A_t an.

§ 27 Einige Typen vorwiegend exogen erklärter Wachstumsprozesse von isolierten Populationen

[27.1] Sättigungswachstum

Besonders bei ökonomischen Wachstumsprozessen ist häufig die Annahme plausibel, daß das Wachstum einem Sättigungswert zustrebt. So ist etwa der Bestand und Zuwachs von gewissen Gebrauchs- und Haushaltsgegenständen (Auto, Rundfunk- und Fernsehgeräte, Kühlschrank, Telefon) vom Versorgungsgrad der Abnehmer mit diesen Gütern abhängig. Die relativ niedrigen Preise am Markt für Haushaltselektronik, besonders Rundfunkapparate, spiegeln einen hohen Sättigungsgrad wider. Nicht zuletzt um diesen abgesättigten Marktbereich zu verlassen, bemühen sich die Hersteller, scheinbar völlig neuartige Artikel auf den Markt zu bringen.

Bei derartigen Wachstumsvorgängen ist häufig die Annahme plausibel, daß die Zuwachsrate proportional zum noch freien "Marktpotential"

$$S - B_t$$

bei fester Sättigungsgrenze S ist. Das heißt:

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t \cdot B_t} = c \cdot (S - B_t) \qquad (c > 0) \tag{27.1}$$

Die Umformung in

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = (c \cdot S - c \cdot B_t) \cdot B_t = c \cdot S \cdot B_t - c \cdot B_t^2 \tag{27.2}$$

zeigt im Vergleich mit (26.14), daß das Sättigungswachstum in bezug auf die rekursive Beschreibung des Wachstumsprozesses mit dem logistischen Wachstum identisch ist, obwohl ersterem eine exogen und letzterem eine endogen orientierte Beschreibung der Wachstumsmechanik zugrunde liegt; beim Sättigungswachstum: Abstand von der von außen vorgegebenen Schranke S; beim logistischen Wachstum: Proportionalität zwischen Sterberate und Populationsgröße. (Die "Population" ist hierbei das in Rede stehende Wirtschaftsgut!)

Bis auf die Herstellung des Zusammenhanges zwischen der Sättigungsgrenze S und der aus dem logistischen Wachstum abgeleiteten Kapazitätsgrenze K erübrigt sich also die weitere Untersuchung des Sättigungswachstums.

Aufgabe 27.1

Stellen Sie den soeben beschriebenen Zusammenhang zwischen Sättigungsgrenze S und Kapazitätsgrenze K her; zeigen Sie:

$$K = S$$

Aufgabe 27.2

Zeigen Sie, daß die Rekursionsgleichung (26.14) des logistischen Wachstums auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = g \cdot B_t \cdot \left(\frac{K - B_t}{K}\right) \qquad (27.3)$$

(K: Kapazitätsgrenze, Sättigungsgrenze).

Deuten Sie das Verhalten des Faktors $\frac{K - B_t}{K}$ für sehr kleine Populationsgrößen und für solche Werte von B_t, die in der Nähe von K liegen. Beschreiben Sie die Wirkung des rechts in der Klammer stehenden Faktors auf den Term $g \cdot B_t$ in (27.3).

[27.2] Sättigungswachstum mit Schwellenwert

Beim Sättigungswachstum bzw. logistischen Wachstum hängt die Wachstumsrate von der konstanten Geburten- und der linearen Sterberate ab; siehe Abbildung 27.1:

$$b_k = \frac{\Delta B_k}{B_k} = g - m \cdot B_k \qquad (27.4)$$

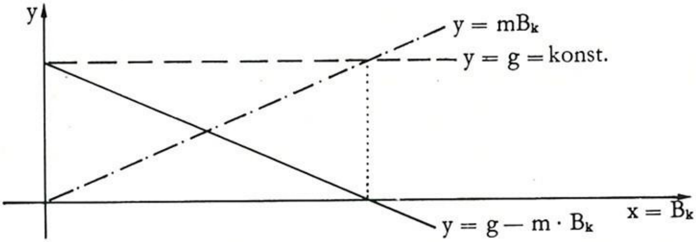


Abb. 27.1

Je kleiner die Population ist, desto größer ist die Wachstumsrate. Bei extrem kleinen Populationen ist in diesem Modellansatz die verschwindend kleine Sterberate vernachlässigbar, und das Wachstum verläuft in diesem Bereich fast exponentiell.

Diese Konsequenz aus den Modellannahmen des logistischen Wachstums befindet sich nicht im Einklang mit einer Fülle von beobachteten Wachstumsvorgängen. Es scheint häufig eher so zu sein, daß es eine Schwelle T gibt, bei deren Unterschreiten die Population ausstirbt.

Im konkreten Beispiel kann dies etwa bedeuten, daß ein Produkt zu wenig verbreitet ist und wegen des damit verbundenen zu geringen Bekanntheitsgrades vom Markt verschwindet. Bei Tierpopulationen kann es z. B. bedeuten, daß geschlechtsreife Individuen wegen der geringen "Populationsdichte" keinen Partner für die Fortpflanzung finden.

In Aufgabe 27.2 haben wir gesehen, wie das durch

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = g \cdot B_t$$

beschriebene exponentielle Wachstum durch den Multiplikationsfaktor $\left(\frac{K - B_t}{K}\right)$ so beeinflußt wird, daß es in der Nähe der Kapazitätsgrenze K praktisch konstant wird.

Aufgabe 27.3

a) Skizzieren Sie das Schaubild einer monotonen Funktion $y = f(x)$, die für $x < T$ negativ, für $x = T$ Null, für $x > T$ positiv ist und für $x \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$y(x) = \frac{x - T}{x}$$

diese Eigenschaften besitzt.

Stellen Sie $y(x)$ als die Summe zweier aus dem Mathematikunterricht wohlbekannter Grundfunktionen dar.

Fügen wir nun dem durch (27.3) beschriebenen logistischen Wachstum noch den Faktor

$$\frac{B_t - T}{B_t} \tag{27.5}$$

hinzu, so erhalten wir einen Wachstumsprozeß, dessen Zuwachsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta B_t}{\Delta t} = g \cdot B_t \cdot \frac{K - B_t}{K} \cdot \frac{B_t - T}{B_t} \tag{27.6}$$

unterhalb der Schwelle T negativ ist. Die Population erleidet also für $B_t < T$ einen Schwund und stirbt schließlich aus. Für $B_t = T$ stagniert das Populationswachstum, und für sehr große Werte von B_t im Vergleich zu T nähert sich das Wachstumsverhalten dem des logistischen Wachstums, denn der Term $\frac{B_t - T}{B_t}$ nähert sich dem Wert 1.

Das durch (27.6) beschriebene Wachstum nennen wir Sättigungswachstum oder logistisches Wachstum mit *Schwellenwert*.

Aufgabe 27.4

a) Stellen Sie die Gleichung (27.6) des Sättigungswachstums mit Schwellenwert in Abhängigkeit von der Zeitvariablen k in der rekursiven Form dar:

$$B_{k+1} = f(B_k)$$

b) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur iterativen Bestimmung der Werte B_k des Sättigungswachstums mit Schwellenwert, ausgehend von einem Anfangswert B_0. Der Anfangswert und die Parameter g, m und T sollten dabei variabel eingebbar sein.

c) Stellen Sie einige Wachstumsfolgen graphisch dar und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 26.2, insbesondere bei gleichen Werten für g und m.

Aufgabe 27.5

a) Begründen Sie, daß die Abhängigkeit der Zuwachsgeschwindigkeit $\frac{\Delta B_t}{\Delta t}$ von der Populationsgröße B_t im $(B_t, \frac{\Delta B_t}{\Delta t})$-Diagramm beim Sättigungswachstum mit Schwellenwert durch eine Parabel wiedergegeben wird.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Parabel in einem derartigen "Phasenbild".

[27.3] Abhängigkeit der Zuwachsrate von der Populationsgröße; Linearisierung

Die Zuwachsrate ist unabhängig vom Typ des Wachstumsprozesses nach (25.14) definiert als

$$b_t = \frac{\Delta B_t}{\Delta t \cdot B_t} . \tag{27.7}$$

Die bisher diskutierten Wachstumstypen sind somit charakterisiert durch die folgenden Zuwachsraten:

a) freies (geometrisches, exponentielles) Wachstum:

$$b_t = b = \text{konstant} \tag{27.8}$$

b) logistisches Wachstum nach (26.14):

$$b_t = g - m \cdot B_t \qquad (g,\ m > 0) \tag{27.9}$$

c) explosives (hyperexponentielles) Wachstum nach Aufgabe 26.5:

$$b_t = -g + m \cdot B_t \qquad (g,\ m > 0) \tag{27.10}$$

d) Wachstum mit Selbstvergiftung nach (26.37):

$$b_t = g - v_1 v_0 (B_0 + B_{\Delta t} + B_{2\cdot\Delta t} + \ldots + B_{(k-1)\cdot\Delta t}) \cdot \Delta t \tag{27.11}$$

e) Sättigungswachstum mit Schwellenwert nach (27.6):

$$b_t = \frac{g}{K} \cdot (K - B_t) \cdot \left(\frac{B_t - T}{B_t}\right) \qquad \text{mit } K = \frac{g}{m} \tag{27.12}$$

Die Umformung von (27.12) in die Form

$$b_t = (g - m \cdot B_t) + \left(m - \frac{g}{B_t}\right) \cdot T \tag{27.13}$$

zeigt, daß sich für festes B_t und $T \longrightarrow 0$ die Zuwachsrate der des logistischen Wachstums annähert. Für festes T und $B_t \longrightarrow \infty$ nähert sich b_t der wesentlich vom logistischen Wachstum bestimmten Grenzzuwachsrate

$$\hat{b}_t = (g - m \cdot B_t) + m \cdot T \tag{27.14}$$

an.

Die Funktionsschaubilder der entsprechenden Abhängigkeiten sind für die Diskussion des qualitativen Wachstumsverhaltens sehr aufschlußreich.

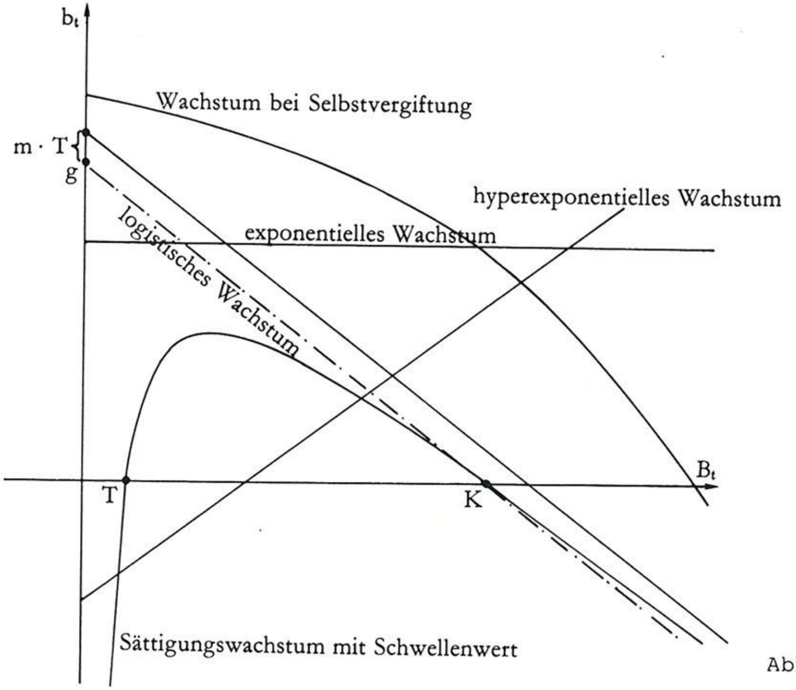


Abb. 27.2

Aufgabe 27.6

Bestätigen Sie die Richtigkeit der obigen Umformung (27.13) aus (27.12).

Aufgabe 27.7

Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Zuwachsraten b_t von der Populationsgröße B_t unter Berücksichtigung des zeitlichen Ablaufes (Bewegungsrichtung des Kurvenpunktes (B_t, b_t) im Verlaufe der Zeit).

Aufgabe 27.8

Diskutieren Sie in Analogie zum logistischen Wachstum mit Schwellenwert das hyperexponentielle Wachstum mit Schwellenwert, vgl. Aufgabe 26.5. Vervollständigen Sie Abbildung 27.2 durch die entsprechende Kurve der Zuwachsrate im (B_t, b_t)-Phasendiagramm.

Abbildung 27.2 zeigt deutlich die nichtlineare Abhängigkeit der Zuwachsrate b_k von der Populationsgröße B_k im Falle des Sättigungswachstums mit Schwellenwert oder des Wachstums bei Selbstvergiftung. Die algebraische Behandlung derartiger nichtlinearer Abhängigkeiten ist häufig sehr aufwendig oder überhaupt nicht möglich. Um das Verhalten des Wachstumsprozesses in der Nähe eines festen Punktes (B, b)

diskutieren zu können, ersetzen wir die von den Punkten (B_k, b_k) gebildete Phasenkurve in der Nähe von (B, b) durch eine "möglichst gut passende" gerade Linie, eine Tangente; siehe Abbildung 27.3.

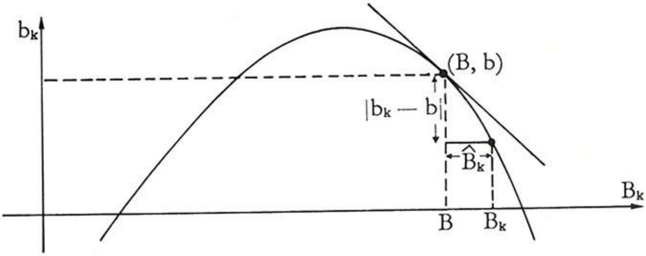


Abb. 27.3

Die Abweichung der Populationsgröße B_k vom Wert B sei mit $\hat{B}_k$ bezeichnet:

$$\hat{B}_k = B_k - B \tag{27.15}$$

Das Ersetzen der Phasenkurve durch ihre Tangente hat zur Folge, daß in der Nähe des Punktes (B, b) näherungsweise Proportionalität zwischen den Größen $b_k - b$ und $\hat{B}_k$ besteht. Es sei

$$b_k - b = \beta \cdot \hat{B}_k . \tag{27.16}$$

Die Proportionalitätskonstante β ist gerade die Tangentensteigung.

Es sei nun B_k ein Wert in der Nähe von B. Für B_{k+1} gilt dann näherungsweise

$$B_{k+1} = (1 + b_k) \cdot B_k = (1 + b + \beta \cdot \hat{B}_k) \cdot B_k .$$

Daraus folgt mit (27.15):

$$B_{k+1} = B + b \cdot B + \beta \cdot B \cdot \hat{B}_k + \hat{B}_k + b \cdot \hat{B}_k + \beta \cdot \hat{B}_k \cdot \hat{B}_k \tag{27.17}$$

Da B_k in der Nähe von B liegt, ist die Abweichung $\hat{B}_k$ klein, und wir vernachlässigen den gegenüber den linearen Termen dann verschwindend kleinen quadratischen Term $\beta \cdot \hat{B}_k \cdot \hat{B}_k$. Es folgt:

$$B_{k+1} = B + b \cdot B + (1 + b + \beta \cdot B) \cdot \hat{B}_k \tag{27.18}$$

Diese Linearisierung ist besonders in der Nähe von Gleichgewichtszuständen, also für $b = 0$, von Interesse. Aus (27.18) wird dann:

$$\hat{B}_{k+1} = (1 + \beta \cdot B) \cdot \hat{B}_k \tag{27.19}$$

Aufgabe 27.9

Beschreiben Sie das qualitative Verhalten der Abweichungs-Folge $\hat{B}_k$ in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes (B, b) in Abhängigkeit von der in (27.16) definierten Proportionalitätskonstanten β.

Aufgabe 27.10

a) Zeigen Sie: Der Gleichgewichtspunkt mit $B = \frac{g}{m}$ im logistischen Wachstum ist genau dann stabil, wenn $0 \leq g < 2$ ist.

b) Überprüfen Sie dieses Ergebnis anhand einiger Computerläufe.

Aufgabe 27.11

Diskutieren Sie die Art des Gleichgewichts an den Stellen T (untere Schwelle) und K (Kapazitätsgrenze) beim Sättigungswachstum mit Schwellenwert.

Mit der in diesem Abschnitt dargestellten "Linearisierungsmethode" wollen wir abschließend noch den Sachverhalt untersuchen, daß die Zuwachsrate b_k von B_{k-1} und nicht, wie in Abbildung 27.3 dargestellt, von B_k abhängt.
Es sei also

$$b_k = f(B_{k-1}). \tag{27.20}$$

In der Nähe eines Gleichgewichtspunktes B der Population B_k ersetzen wir wieder den Funktionsgraphen von f durch seine Tangente und erhalten mit der Proportionalitätskonstanten (= Tangentensteigung) β:

$$b_k = \beta \cdot \hat{B}_{k-1} \qquad \text{mit} \qquad \hat{B}_{k-1} = B_{k-1} - B$$

Hier ist zu beachten: Im Gleichgewicht ist $b = f(B) = 0$.
Für B_{k+1} ergibt sich dann näherungsweise:

$$B_{k+1} = (1 + b_k) \cdot B_k = (1 + \beta \cdot \hat{B}_{k-1}) \cdot (\hat{B}_k + B)$$

Daraus folgt nach Streichung des in der Nähe von B verschwindend kleinen Terms $\beta \cdot \hat{B}_{k-1} \cdot \hat{B}_k$:

$$\hat{B}_{k+1} = \hat{B}_k + \beta \cdot B \cdot \hat{B}_{k-1},$$

beziehungsweise:

$$\hat{B}_{k+2} - \hat{B}_{k+1} - (\beta \cdot B) \cdot \hat{B}_k = 0 \tag{27.21}$$

Ein typisches Anwendungsfeld für die oben postulierte Abhängigkeit der Zuwachsrate b_k vom Populationsbestand B_{k-1} der Vorperiode stellt in den Wirtschaftswissenschaften die Theorie der induzierten Investitionen dar, auf die wir im Kapitel VII (§§ 34 - 36) näher eingehen werden.

Aufgabe 27.12

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der linearen homogenen Differenzengleichung (27.21).

§ 28 Zwei interagierende Populationen

Häufig beeinflussen sich die Wachstumsprozesse zweier oder mehrerer Populationen gegenseitig. Im folgenden betrachten wir zwei Populationen, deren Bestandsgrößen mit B_k und R_k bezeichnet seien. Im Hinblick auf mögliche Wechselwirkungen zwischen diesen Populationen sind rein kombinatorisch die folgenden Fälle denkbar:

a) Jede Population beeinträchtigt das Wachstum der anderen Population (Konkurrenz). Dies ist etwa dann möglich, wenn zwei Tierarten von derselben Nahrungsquelle leben.

b) Jede Population begünstigt das Wachstum der anderen Population (Symbiose).

c) Die eine Population (B_k) begünstigt das Wachstum der anderen (R_k); andererseits behindert R_k das Wachstum von B_k. Letzteres ist als Räuber-Beute-Verhältnis deutbar mit:

B_k = Bestand an Beute

R_k = Bestand an Räubern

Der Fall, daß eine der Populationen überhaupt nicht durch die andere beeinflußt wird, läßt sich im Rahmen der Diskussion isolierter Populationen behandeln.

[28.1] Räuber-Beute-Systeme (Modellbeschreibung)

Wir wollen annehmen, daß das individuelle Wachstumsverhalten der Beutepopulation in Abwesenheit der Räuber vom logistischen Typ sei:

$$b_k = \frac{\Delta B_k}{B_k} = g - m \cdot B_k \qquad \text{(mit } g,\ m > 0) \tag{28.1}$$

Während sich die Beutepopulation sehr gut ohne die Räuber entwickeln könnte, seien die Räuber jedoch auf die Beutepopulation als Nahrungsquelle angewiesen. In Abwesenheit der Beute sei die Zuwachsrate der Räuber also negativ. Die innerspezifische Konkurrenz wirke sich wie folgt auf die Zuwachsrate aus:

$$r_k = \frac{\Delta R_k}{R_k} = -h - q \cdot R_k \qquad \text{(mit } h,\ q > 0) \tag{28.2}$$

Das reale Wachstum der Beutepopulation wird nun um so stärker beschnitten, je mehr Räuber vorhanden sind. Die Verminderung der individuellen Zuwachsrate b_k der Beute (28.1) sei proportional zur Anzahl der vorhandenen Räuber. Diesen Modellannahmen wird durch die folgende Beschreibung der Zuwachsrate b_k Rechnung getragen:

$$b_k = \frac{\Delta B_k}{B_k} = g - m \cdot B_k - u \cdot R_k \tag{28.3}$$

Hier ist $u > 0$ eine feste, reelle Proportionalitätskonstante.

Je mehr Beute vorhanden ist, desto besser sind die Vermehrungschancen für die Räuber. Ihre Zuwachsrate wird durch einen positiven Summanden erhöht, der proportional zur Größe der Beute ist:

$$r_k = \frac{\Delta R_k}{R_k} = -h - q \cdot R_k + v \cdot B_k \tag{28.4}$$

Auch $v > 0$ ist eine feste, reelle Proportionalitätskonstante.

Durch naheliegende Umformungen erhalten wir die Grundgleichungen:

$$B_{k+1} = (1 + b_k) \cdot B_k = (1 + g) \cdot B_k - m \cdot B_k^2 - u \cdot B_k \cdot R_k \tag{28.5}$$

$$R_{k+1} = (1 + r_k) \cdot R_k = (1 - h) \cdot R_k - q \cdot R_k^2 + v \cdot B_k \cdot R_k \tag{28.6}$$

Bemerkung

Rein arithmetisch betrachtet, können B_{k+1} und R_{k+1} auf Grund von (28.5) und (28.6) auch negative Werte annehmen. Dies wäre im Rahmen einer biologischen Interpretation jedoch nicht sinnvoll. Genaugenommen nehmen B_{k+1} und R_{k+1} also im Rahmen obiger Modellvorstellungen jeweils das Maximum aus den sich durch (28.5) bzw. (28.6) ergebenden Werten und der Zahl Null an.

Die Gleichungen (28.5) und (28.6) lassen die folgende Interpretation zu: Je größer B_k bzw. R_k ist, desto wahrscheinlicher ist, bei fest vorgegebenem Areal, eine Begegnung zwischen einem Räuber und einem Beutetier. Die Anzahl der gefressenen Beutetiere ist nach (28.5) proportional zur Anzahl $B_k \cdot R_k$ der "Begegnungsmöglichkeiten" zwischen Räuber- und Beutetieren. Noch anders ausgedrückt: Die Anzahl $u \cdot B_k \cdot R_k$ der gerissenen Beutetiere ist sowohl zum Bestand der Beute als auch zur Zahl der Räuber proportional.

Aufgabe 28.1

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur iterativen Berechnung der Werte B_k und R_k, ausgehend von festen Anfangswerten B_0 und R_0. Die konstanten Parameter g, m, u, h, q, v und die Anfangswerte sollten bei jedem Programmablauf frei wählbar sein.

b) Stellen Sie die rekursiv ermittelten Werte in einem gemeinsamen Schaubild graphisch dar (B_k-Achse = R_k-Achse).

c) Vergleichen Sie den qualitativen Verlauf des Schaubilds aus b) mit dem auf empirisch gewonnenen Daten beruhenden Diagramm in Abbildung 28.1.

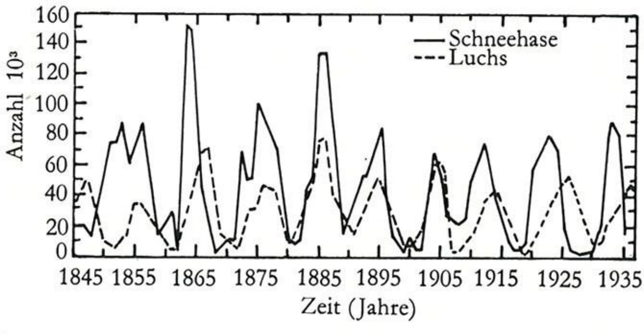


Abb. 28.1
Populationszyklen des Luchses und seiner Hauptbeute, des Schneehasen, in Kanada. Die Ordinate gibt die Zahl von Fellen an, die an die Hudson Bay Gesellschaft verkauft wurden (nach MacLulich, D. A., 1937, University of Toronto Studies, Biology Series, Nr. 43)

d) Stellen Sie die rekursiv ermittelten Werte in einem (B_k, R_k)-Koordinatensystem graphisch dar.

Im folgenden wollen wir untersuchen, wann die Zuwachsraten der Beute bzw. der Räuber positiv, negativ oder gleich Null sind. Aus (28.3) und (28.4) folgt:

$$b_k > 0 \iff R_k < \frac{1}{u} \cdot (g - m \cdot B_k) \tag{28.7}$$

$$r_k > 0 \iff R_k < \frac{1}{q} \cdot (-h + v \cdot B_k) \tag{28.8}$$

Die Darstellung dieses Sachverhalts im (B_k, R_k)-Koordinatensystem ist besonders aufschlußreich (Abb. 28.2)

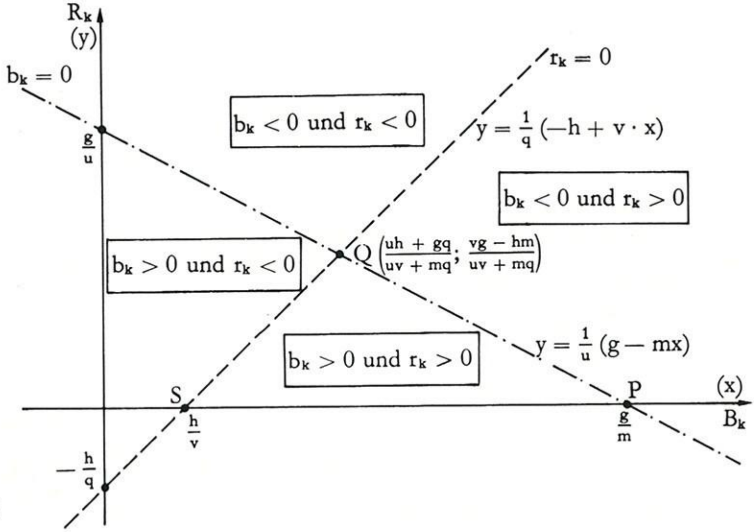


Abb. 28.2

[28.2] Gleichgewichtszustände in Räuber-Beute-Systemen

Aus Abbildung 28.2 lassen sich bereits wichtige Informationen über Gleichgewichtszustände entnehmen. Wir unterscheiden die Fälle:

$B_{k+1} = B_k$ (für $k = k_0$): temporäres Gleichgewicht

$B_k = B_{k_0}$ (für $k \geq k_0$): stationäres Gleichgewicht

Entsprechendes sei für die Räuberpopulation vereinbart.

1. Temporäres Gleichgewicht der Beutepopulation

   Die Bedingung $B_{k+1} = B_k$ (für $k = k_0$) hat im Zusammenhang mit (28.5) und (28.3) zur Folge:

   $B_k = 0$ (Punkte auf der R_k-Achse in Abbildung 28.2) oder

   $b_k = 0$ (Punkte auf der strichpunktierten Geraden)

1.1 Es sei $B_k = 0$. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ auch $B_{k+i} = 0$, und die Räuberpopulation genügt der Gleichung

$$R_{k+1} = R_k - h \cdot R_k - q \cdot R_k^2 \tag{28.9}$$

Für $R_k > 0$ ist $R_{k+1} < R_k$. Solange die Werte von R_k also positiv sind, fällt die Folge (R_k) streng monoton. Da negative Werte von R_k auf Grund der biologischen Interpretation ausgeschlossen sind, erhebt sich nur die Frage, ob die Folge (R_k) einem Grenzwert L oberhalb von Null zustrebt oder ob sie gegen Null konvergiert. Falls die Folge (R_k) gegen einen Wert $L > 0$ konvergieren würde, müßte nach (28.9) gelten:

$$L = \lim R_k = \lim R_{k+1} = L - h \cdot L - q \cdot L^2,$$

das heißt,

$$L \cdot (h + q \cdot L) = 0.$$

Dies ist für $L > 0$ jedoch nicht möglich. Die Folgerungen aus den Modellgleichungen bestätigen also die intuitiv plausible Tatsache, daß für $B_k = 0$ $(k \geq k_0)$ die Räuberpopulation ausstirbt.

Derartige Betrachtungen, die an sich keine neue Erkenntnis in bezug auf den Wachstumsprozeß selbst vermitteln, sind dennoch nicht überflüssig, da sie den Plausibilitätsgrad der Modellannahmen erhöhen.

1.2 Für $k = k_0$ sei $B_k \neq 0$ und somit $b_k = 0$. Aus (28.3) und (28.6) folgt dann

$$R_k = \frac{1}{u} \cdot (g - m \cdot B_k) \tag{28.10}$$

und

$$R_{k+1} = ((1 - h) - q \cdot \frac{1}{u} (g - m \cdot B_k) + v \cdot B_k) \cdot \frac{1}{u} \cdot (g - m \cdot B_k). \tag{28.11}$$

Im allgemeinen wird sich R_{k+1} also von R_k und somit nach (28.5) auch B_{k+2} von B_{k+1} unterscheiden. Ist jedoch $R_{k+1} = R_k$, so folgt durch Indexerhöhung aus (28.5) und (28.6):

$$B_{k+2} = B_{k+1} = B_k$$

und

$$R_{k+2} = R_{k+1} = R_k.$$

Mit vollständiger Induktion folgt in diesem Fall für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$B_{k+i} = B_k =: B \quad \text{(konstant)}$$

$$R_{k+i} = R_k =: R \quad \text{(konstant)}$$

Das zunächst als temporär angenommene Gleichgewicht ist nun stationär. Weiterhin ist dann für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$b_{k+i} = 0$$

Aus (28.3) folgt somit

$$R = \frac{1}{u} \cdot (g - m \cdot B). \tag{28.12}$$

Für die Konstante R gibt es die Möglichkeiten:

1.2.1 $R = 0$. Dann ist entsprechend dem im isolierten Fall als logistisch angenommenen Wachstumsverhalten der Beute

$$B = \frac{g}{m} \quad (= \text{Kapazitätsgrenze der Beute}) \tag{28.13}$$

(Schnittpunkt P der durch $b_k = 0$ und $R_k = 0$ gegebenen Geraden in Abbildung 28.2).

1.2.2 $R \neq 0$. Dann ist r_{k+i} für $i \in \mathbb{N}$ definiert und gleich Null. Aus (28.4) folgt

$$B = \frac{1}{v} \cdot (h + q \cdot R).$$

Mit (28.12) folgt

$$B = \frac{uh + gq}{uv + mq} \quad \text{und} \quad R = \frac{vg - hm}{uv + mq} \tag{28.14}$$

(Schnittpunkt Q der durch $b_k = 0$ und $r_k = 0$ gegebenen Geraden in Abbildung 28.2).

2. Temporäres Gleichgewicht der Räuberpopulation

Aus $R_{k+1} = R_k$ (für $k = k_0$) folgt im Zusammenhang mit (28.6) und (28.4):

$R_k = 0$ (Punkte auf der B_k-Achse in Abbildung 28.2)

oder

$r_k = 0$ (Punkte auf der gestrichelten Geraden)

2.1 Es sei $R_k = 0$. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ auch $R_{k+i} = 0$, und die Beutepopulation entwickelt sich logistisch entsprechend der Gleichung

$$B_{k+1} = (1 + g) \cdot B_k - m \cdot B_k^2. \tag{28.15}$$

Im allgemeinen ist B_{k+1} von B_k verschieden. Im Falle $B_{k+1} = B_k$ folgt jedoch durch Indexerhöhung aus (28.15) für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$B_{k+i} = B_k =: B \quad (\text{konstant}).$$

Der Wert von B berechnet sich nach (28.15) zu

$B = 0$ (triviales Gleichgewicht) oder

$B = \frac{g}{m}$ (= Kapazitätsgrenze).

Letzteres entspricht dem Punkt P in Abbildung 28.2: Schnitt der durch $R_k = 0$ und $b_k = 0$ gegebenen Geraden.

2.2 Für $k = k_0$ sei $R_k \neq 0$ und somit $r_k = 0$. Der sich aus (28.4) und (28.5) daraus ergebende Wert für B_{k+1} wird im allgemeinen von B_k verschieden sein. Ist jedoch $B_{k+1} = B_k$, so folgt aus (28.6) und (28.5) durch Indexerhöhung für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$R_{k+i} = R_k =: R \quad (\text{konstant})$$

$$B_{k+i} = B_k =: B \quad (\text{konstant}).$$

Es liegt dann also wieder ein stationäres Gleichgewicht vor.

Weiterhin ist r_{k+i} für alle $i \in \mathbb{N}$ wegen $R_{k+i} \neq 0$ definiert und gleich Null. Aus (28.4) folgt:

$$B = \frac{1}{v} \cdot (h + q \cdot R) \tag{28.16}$$

Für die Konstante B gibt es die Möglichkeiten:

2.2.1 $B = 0$. Dann wäre

$$R = -\frac{h}{q} \quad (<0) \tag{28.17}$$

Diese "Lösung" entspricht dem Schnitt der durch $B_k = 0$ und $r_k = 0$ gegebenen Geraden in Abbildung 28.2. Sie besitzt jedoch auf Grund der biologischen Deutung des Räuber-Beute-Systems keine sinnvolle Interpretation.

2.2.2 $B \neq 0$. Dann ist auch b_{k+i} (für alle $i \in \mathbb{N}$) definiert und gleich Null. Es liegt somit dieselbe Sachlage wie in 1.2.2 vor.

Wir fassen zusammen:

Satz 28.1

Im Räuber-Beute-System sind die stationären Gleichgewichtszustände beider Populationen gegeben durch:

a) $B_k = R_k = 0$ für alle $k \geq k_0$ (triviales Gleichgewicht)

b) $R_k = 0$; $B_k = \frac{g}{m}$ für alle $k \geq k_0$ (logistisches Gleichgewicht der isolierten Beutepopulation);

c) im Falle von $vg - hm > 0$:

$$B_k = \frac{uh + gq}{uv + mq}; \quad R_k = \frac{vg - hm}{uv + mq} \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Wir wollen den Fall c) von Satz 28.1 etwas genauer betrachten. Es ist

$$vg - hm > 0 \iff \frac{g}{m} > \frac{h}{v}. \tag{28.18}$$

Die Bedingung (28.18) besagt offenbar, daß der Schnittpunkt Q der durch $b_k = 0$ und $r_k = 0$ gegebenen Geraden in Abbildung 28.2 im ersten Quadranten liegt. Der durch $r_k = 0$ und $R_k = 0$ gegebene Punkt $S = (\frac{h}{v}, 0)$ muß also links von $P = (\frac{g}{m}, 0)$ liegen; das heißt, die Kapazitätsgrenze $\frac{g}{m}$ des logistischen isolierten Wachstums der Beutepopulation muß über dem durch $\frac{h}{v}$ gegebenen Wert liegen.

Aufgabe 28.2

a) Deuten Sie an den Stellen X, Y, U, V in Abbildung 28.3 durch Pfeile an, in welcher Richtung sich der Wachstumsprozeß jeweils weiterentwickelt.

b) Zeichnen Sie ein entsprechendes Diagramm für $\frac{g}{m} < \frac{h}{v}$, das heißt, mit Punkt Q im vierten Quadranten. Führen Sie die in a) gegebene Aufgabe sinngemäß in dem veränderten Diagramm durch.

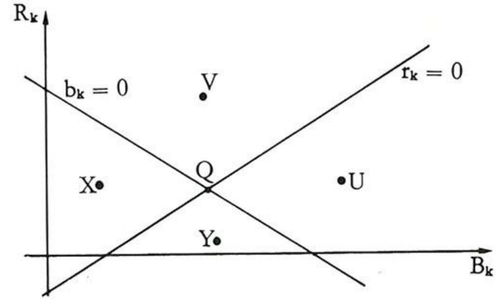


Abb. 28.3

c) Ziehen Sie aus b) Schlüsse über den qualitativen Verlauf des Wachstumsprozesses.

[28.3] Konkurrenz

Im folgenden betrachten wir zwei Populationen, die von einer gemeinsamen (dritten) Nahrungsquelle leben. Die Populationsgrößen seien mit B_k und F_k bezeichnet. In Abwesenheit des jeweiligen Konkurrenten sei das isolierte Wachstum jeder der beiden Populationen vom logistischen Typ. Für die Zuwachsraten gelte also:

$$b_k = g - m \cdot B_k \qquad (g,\ m > 0) \tag{28.19}$$

$$f_k = h - q \cdot F_k \qquad (h,\ q > 0) \tag{28.20}$$

Die Beeinträchtigung jeder dieser Zuwachsraten durch die Konkurrenzpopulation sei jeweils proportional zur Anzahl der vorhandenen Konkurrenten. Wir erhalten somit die folgenden Zuwachsraten für das Wachstum konkurrierender Populationen:

$$b_k = g - m \cdot B_k - u \cdot F_k \qquad (u > 0) \tag{28.21}$$

$$f_k = h - q \cdot F_k - v \cdot B_k \qquad (v > 0) \tag{28.22}$$

Hieraus folgen die für die iterative Auswertung nützlichen Gleichungen:

$$B_{k+1} = (1 + b_k) \cdot B_k = (1 + g) \cdot B_k - m \cdot B_k^2 - u \cdot F_k \cdot B_k \tag{28.23}$$

$$F_{k+1} = (1 + f_k) \cdot F_k = (1 + h) \cdot F_k - q \cdot F_k^2 - v \cdot B_k \cdot F_k \tag{28.24}$$

Die Möglichkeiten zur Interpretation der Wechselwirkungsterme $B_k \cdot F_k$ entsprechen genau denen in Räuber-Beute-Systemen.

Aufgabe 28.3

Bauen Sie das in Aufgabe 28.1 erstellte Computerprogramm zur iterativen Berechnung der Populationsgrößen B_k bzw. R_k des Räuber-Beute-Systems so aus, daß es auch Modelle für Konkurrenz bewältigt.

Die Diskussion möglicher Gleichgewichtszustände läuft im Prinzip ähnlich wie in Räuber-Beute-Systemen. Die in Abbildung 28.2 entscheidenden Geraden $b_k = 0$ bzw. $r_k = 0$ des temporären Nullwachstums haben jedoch in Konkurrenz-Modellen auf Grund der veränderten Koeffizienten beide eine negative Steigung:

$$b_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_k = \frac{1}{u}\cdot(g - m\cdot B_k) \tag{28.25}$$

$$f_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_k = \frac{1}{q}\cdot(h - v\cdot B_k) \tag{28.26}$$

In Abbildung 28.4 ist eine dieser Möglichkeiten dargestellt:

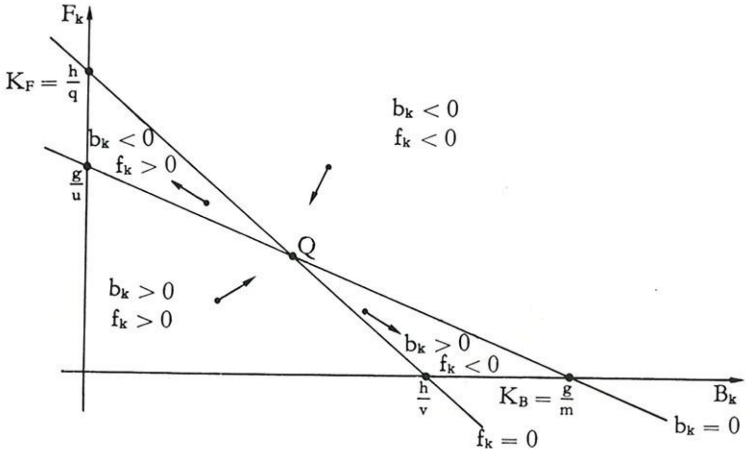


Abb. 28.4

Hierbei sind

$$K_B := \frac{g}{m} \qquad \text{bzw.} \qquad K_F := \frac{h}{q} \tag{28.27}$$

die individuellen Kapazitätsgrenzen der isoliert wachsenden Populationen.

Eine entsprechend dem Muster in Abschnitt [28.2] durchgeführte Diskussion der möglichen temporären und stationären Gleichgewichtszustände ergibt:

Satz 28.2

Im Konkurrenz-Modell sind die stationären Gleichgewichtszustände beider Populationen gegeben durch:

a) $B_k = F_k = 0$ für alle $k \geq k_0$ (triviales Gleichgewicht);

b) $F_k = 0$; $B_k = \frac{g}{m}$ für alle $k \geq k_0$ ("logistisches" Gleichgewicht der isolierten B-Population);

c) $B_k = 0$; $F_k = \frac{h}{q}$ für alle $k \geq k_0$ ("logistisches" Gleichgewicht der isolierten F-Population);

d) im Falle, daß der Schnittpunkt Q der durch $b_k = 0$ und $f_k = 0$ gegebenen Geraden im ersten Quadranten liegt:

$$B_k = \frac{gq - uh}{mq - uv}; \quad F_k = \frac{hm - vg}{mq - uv} \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Aufgabe 28.4

Beweisen Sie Satz 28.2. (Mögliches Muster: Abschnitt [28.2].)

Aufgabe 28.5

Deuten Sie in den folgenden Diagrammen an den markierten Punkten durch Pfeile an, in welcher Richtung sich der Wachstumsprozeß weiterentwickelt.

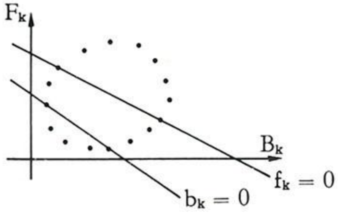


Abb. 28.5

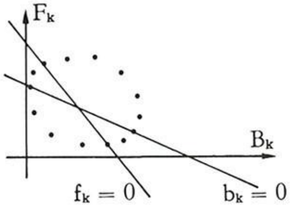


Abb. 28.6

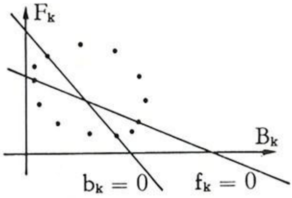


Abb. 28.7

Ziehen Sie daraus Schlüsse über den qualitativen Verlauf des Wachstums.

§ 29 Modelle mit drei Populationen

[29.1] Wachstum und Absterben einer Bakterienkultur

Im Laborversuch werde einer Bakterienkultur eine bestimmte, feste Nahrungsmenge (Nährlösung) zugeführt. Die Vermehrungsrate ("Geburtenrate") der Kultur sei proportional zur vorhandenen Nahrung, während die Sterberate konstant sei. Die Zuwachsrate der Bakterienkultur lautet somit:

$$b_k = v \cdot N_k - h \tag{29.1}$$

Dabei seien v und h feste, positive Koeffizienten und N_k die zum Zeitpunkt k vorhandene Nahrungsmenge. Da keine neue Nahrung hinzukommt, ist ihre Vermehrungsrate gleich Null. Die Abnahmerate der Nährlösung sei proportional zur Größe der Bakterienkultur:

$$n_k = \frac{\Delta N_k}{N_k} = -u \cdot B_k \tag{29.2}$$

Wegen des im Laufe der Zeit eintretenden Nahrungsmangels sterben die Zellen der Bakterienkultur ab. Da die Sterberate der Bakterien nach (29.1) gleich h ist, ist der Zuwachs ΔA_k an abgestorbenen Zellen gleich

$$\Delta A_k = h \cdot B_k . \tag{29.3}$$

Das Wachstum von Bakterienkultur, Nahrungsmenge und abgestorbenen Zellen läßt sich somit rekursiv wie folgt beschreiben:

$$B_{k+1} = (1-h) \cdot B_k + v \cdot N_k \cdot B_k \tag{29.4}$$

$$N_{k+1} = N_k - u \cdot B_k \cdot N_k \tag{29.5}$$

$$A_{k+1} = A_k + h \cdot B_k \tag{29.6}$$

Das Schaubild dieses wachsenden Systems sieht ungefähr aus wie in Abbildung 29.1.

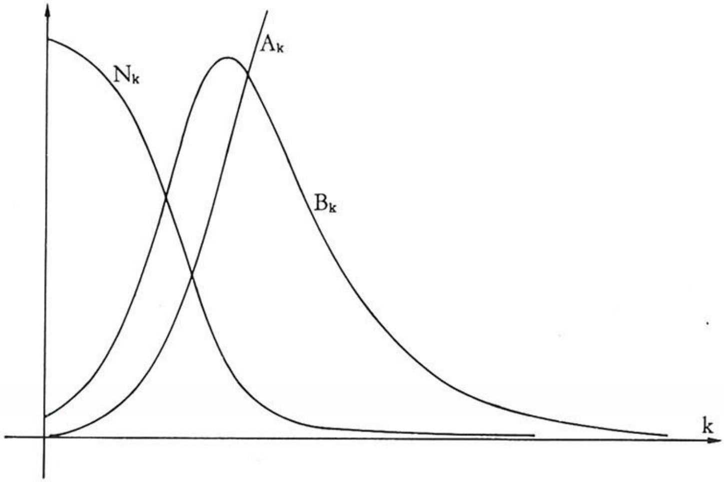


Abb. 29.1

Aufgabe 29.1

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur iterativen Berechnung der Werte B_k, N_k, A_k, ausgehend von festen Anfangswerten.

b) Stellen Sie die ermittelten Werte in einem gemeinsamen Schaubild graphisch dar (B_k-Achse = N_k-Achse = A_k-Achse) und überprüfen Sie die Korrektheit der Abbildung 29.1.

Ein Vergleich von (29.4) und (29.5) mit (28.6) und (28.5) zeigt, daß man die Entwicklung der B_k- und N_k-Populationen des Bakterienwachstums auch als Extremfall ($q = g = m = 0$) eines Räuber-Beute-Systems deuten kann. Die Bakterien sind dann die "Räuber" und die Nahrung die "Beute".

Aufgabe 29.2

Zeichnen Sie die Geraden $b_k = 0$ und $n_k = 0$ sowie die Gebiete $b_k < 0$ und $b_k > 0$ im (N_k, B_k)-Diagramm entsprechend Abbildung 28.2 ein und diskutieren Sie mögliche Gleichgewichtszustände. Wählen Sie einige Punkte im Schaubild aus und deuten Sie den weiteren Verlauf des Bakterienwachstums qualitativ durch Pfeile an.

[29.2] Stoffmengenänderungen bei chemischen Reaktionen

Bei chemischen Reaktionen geht eine Substanz eventuell über Zwischenverbindungen in Folgeprodukte über. Es gibt viele mögliche Reaktionsschemata, wie z. B.:

Ausgangssubstanz Produkte

$A \longrightarrow B$ (einfache Reaktion)

$A \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$ (Parallelreaktion)

$$A \rightleftarrows B \qquad \text{(reversible Reaktion)}$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \qquad \text{(Folgereaktion)}$$

Bei einer *Folgereaktion* nimmt die Menge A der vorgegebenen Ausgangssubstanz kontinuierlich ab; die Menge B des Zwischenprodukts wächst zunächst an und fällt dann wieder ab, während die Menge D des Endproduktes monoton wächst.

Im Hinblick auf eine rekursive Beschreibung dieses Systems nehmen wir an, daß die Abnahme ΔA_k der Ausgangssubstanz proportional zu A_k sei. (Bei Verwendung der Zeitvariablen Δt und t hieße das: Die Abnahmegeschwindigkeit $\frac{\Delta A_t}{\Delta t}$ ist proportional zum Bestand A_t.)

Die Zunahmefunktion, d. h. nach der eingangs entwickelten Terminologie die "Geburtenfunktion" der Zwischensubstanz sei dementsprechend ebenfalls proportional zu A_k, ihre Abnahmefunktion proportional zu B_k. Schließlich sei der Zuwachs ΔD_k des Endproduktes proportional zu B_k. Mit den in dieser Beschreibung implizit enthaltenen positiven Koeffizienten (Proportionalitätskonstanten) r, s, u, v lautet die rekursive Beschreibung dieses Modells für chemische Folgereaktionen:

$$A_{k+1} = A_k - r \cdot A_k \qquad \text{(sinnvoll: } r < 1\text{)} \tag{29.7}$$

$$B_{k+1} = B_k + s \cdot A_k - u \cdot B_k \tag{29.8}$$

$$D_{k+1} = D_k + v \cdot B_k \tag{29.9}$$

Die Substanzmengen werden meist durch geeignete Konzentrationsmaße gemessen: Masse der Substanz pro Volumen.

Aufgabe 29.3

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur iterativen Berechnung der Werte A_k, B_k, D_k, ausgehend von festen Anfangswerten.

b) Stellen Sie die ermittelten Werte in einem gemeinsamen Schaubild graphisch dar.

Unsere bisher entwickelten Methoden zur Lösung von Differenzengleichungen ermöglichen die explizite Beschreibung der Substanzmengen. Für die Ausgangssubstanz gilt in Abhängigkeit vom Anfangswert A_0:

$$A_k = A_0 \cdot (1 - r)^k \tag{29.10}$$

Die Menge des Zwischenproduktes wird also nach (29.8) durch die folgende inhomogene Differenzengleichung beschrieben:

$$B_{k+1} + (u - 1) \cdot B_k = s \cdot A_0 \cdot (1 - r)^k \tag{29.11}$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet mit der reellen Konstanten C:

$$B_k = C \cdot (1 - u)^k \tag{29.12}$$

Entsprechend der Tabelle 18.1 suchen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form

$$B_k^* = C' \cdot (1-r)^k \,. \tag{29.13}$$

Einsetzen in (29.11) führt zu

$$C' \cdot (u-r) = s \cdot A_0 \,. \tag{29.14}$$

Im Falle $u \neq r$ lautet der unbestimmte Koeffizient also

$$C' = \frac{s \cdot A_0}{u-r} \,. \tag{29.15}$$

Aufgabe 29.4

Überprüfen Sie durch direktes Einsetzen, daß

$$B_k^* = \frac{s \cdot A_0}{u-r} \cdot (1-r)^k \tag{29.16}$$

eine spezielle Lösung von (29.11) ist.

Die allgemeine Lösung von Gleichung (29.11) lautet also:

$$B_k = C \cdot (1-u)^k + \frac{s \cdot A_0}{u-r} \cdot (1-r)^k \tag{29.17}$$

Am Anfang ist keine Zwischensubstanz vorhanden. Aus $B_0 = 0$ folgt für die Konstante C:

$$C = -\frac{s \cdot A_0}{u-r}$$

Die Lösungsfolge mit Anfangswert $B_0 = 0$ ist somit gegeben durch:

$$B_k = \frac{s \cdot A_0}{u-r} \left((1-r)^k - (1-u)^k\right) \tag{29.18}$$

Die Menge des Endproduktes erfüllt nach (29.9) und (29.18) die Gleichung:

$$D_{k+1} - D_k = \frac{v \cdot s \cdot A_0}{u-r} (1-r)^k - \frac{v \cdot s \cdot A_0}{u-r} (1-u)^k \tag{29.19}$$

Die zugehörige homogene Gleichung hat die konstante Lösung:

$$D_k = C \tag{29.20}$$

In Verbindung mit der Tabelle 18.1 liefert der Superpositionssatz 18.5 die spezielle Lösung:

$$D_k^* = -\frac{v \cdot s \cdot A_0}{u-r} \left(\frac{1}{r} \cdot (1-r)^k - \frac{1}{u} \cdot (1-u)^k\right) \tag{29.21}$$

Aufgabe 29.5

Leiten Sie die spezielle Lösung (29.21) nach dem Superpositionsprinzip her.

Mit dem Anfangswert $D_0 = 0$ erhalten wir schließlich die Lösung:

$$D_k = \frac{v \cdot s \cdot A_0}{u \cdot r} - \frac{v \cdot s \cdot A_0}{u-r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (1-r)^k - \frac{1}{u} \cdot (1-u)^k\right) \tag{29.22}$$

Die expliziten Darstellungen (29.10), (29.18) und (29.22) bestätigen den intuitiv einsichtigen Sachverhalt, daß für $k \longrightarrow \infty$ die Substanzen A und B verschwinden, während D einem festen Endwert zustrebt.

Von Interesse ist noch die Frage, wann die Substanz B ihr Maximum erreicht. Eine Bedingung für das Erreichen dieses Maximums ist:

$$\Delta B_k = 0 \tag{29.23}$$

Wegen der diskretisierenden Beschreibung des kontinuierlich ablaufenden Reaktionsprozesses kann diese Bedingung im allgemeinen jedoch nur näherungsweise erfüllt werden. Aus (29.23) folgt mit (29.18):

$$\left(\frac{1-u}{1-r}\right)^k = \frac{r}{u}$$

$$k = \frac{\ln r - \ln u}{\ln(1-u) - \ln(1-r)} \tag{29.24}$$

In Verbindung mit (29.18) kann man hieraus auch leicht den Wert dieses Maximums ermitteln.

Aufgabe 29.6

Stellen Sie das durch die Gleichungen (29.7) bis (29.9) gegebene mathematische Modell für Folgereaktionen anhand der Zeitvariablen Δt und t dar (vgl. Abb. 25.1). Zeigen Sie unter Verwendung des Gesetzes

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{a\cdot t}{k}\right)^k = e^{-a\cdot t} \tag{29.25}$$

(t ist beliebig, fest, e ist die Eulersche Zahl), daß (29.18) beim Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ in

$$B_t = \frac{s\cdot A_0}{u-r}\cdot\left(e^{-r\cdot t} - e^{-u\cdot t}\right) \tag{29.26}$$

übergeht.

Wenn wir an dieser Stelle einmal ausnahmsweise die Operation des Differenzierens heranziehen, erhalten wir als Zeitpunkt t_{max}, an dem die Zwischensubstanz ihr Maximum erreicht, den in anderer Form bereits aus (29.24) bekannten Wert:

$$t_{max} = \frac{1}{r-u}\cdot\ln\frac{r}{u} \tag{29.27}$$

Aufgabe 29.7

Zeigen Sie, daß sich für $\Delta t \longrightarrow 0$ das Maximum der Substanz B auf

$$B_{max} = \frac{s}{r}\cdot A_0\cdot\left(\frac{r}{u}\right)^{\frac{u}{u-r}} \tag{29.28}$$

beläuft.

Bei der Ableitung der speziellen Lösung (29.16) von Gleichung (29.11) mußten wir die Voraussetzung $u \neq r$ machen. Von Interesse ist noch der

Spezialfall: $r = u$

Dann kann (29.13) keine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung sein, denn diese Lösung stimmt nun in der Form mit (29.12), der Lösung der homogenen Gleichung, überein. Entsprechend der Vorgehensweise bei Mehrfachwurzeln versuchen wir, eine spezielle Lösung der Form

$$B_k^* = C' \cdot k \cdot (1-r)^k \tag{29.29}$$

zu finden. Falls es eine solche gibt, muß für sie gelten:

$$\begin{aligned} B_{k+1}^* - B_k^* &= C' \cdot (k+1) \cdot (1-r)^{k+1} + (r-1) \cdot C' \cdot k \cdot (1-r)^k = \\ &= s \cdot A_0 \cdot (1-r)^k \end{aligned} \tag{29.30}$$

Diese Forderung wird durch

$$C' = \frac{s \cdot A_0}{1-r}$$

erfüllt. Eine spezielle Lösung von (29.11) ist nun also

$$B_k^* = s \cdot A_0 \cdot k \cdot (1-r)^{k-1}. \tag{29.31}$$

Die allgemeine Lösung von (29.11) ist somit

$$B_k = C \cdot (1-r)^{k-1} + s \cdot A_0 \cdot k \cdot (1-r)^{k-1}. \tag{29.32}$$

(29.31) stellt also zugleich die Lösung von (29.11) mit Anfangswert $B_0 = 0$ dar.

Zur approximativen Bestimmung des Zeitpunktes k, an dem die Menge B_k der Substanz B ihr Maximum erreicht, untersuchen wir wieder die Bedingung $\Delta B_k = 0$. Hieraus folgt mit (29.31) für $r \neq 1$:

$$k = \frac{1-r}{r} \tag{29.33}$$

Der maximale Wert von B_k ist also

$$B_{max} = s \cdot A_0 \cdot \frac{1-r}{r} \cdot (1-r)^{\frac{1-r}{r} - 1} = \frac{s}{r} \cdot A_0 \cdot (1-r)^{\frac{1-r}{r}} \tag{29.34}$$

Aufgabe 29.8

Überprüfen Sie (29.33) und (29.34) anhand einiger Computerläufe.

Aufgabe 29.9

Diskutieren Sie den Spezialfall $r = u$ unter Verwendung der Zeitvariablen Δt und t entsprechend Aufgabe 29.6.

Die Fülle der chemischen Reaktionstypen und der entsprechenden Modelle ist sehr groß. Wir wollen es an dieser Stelle bei der Beschreibung der obigen Modelle für Folgereaktionen bewenden lassen.

Ein den Folgereaktionen entsprechendes Phänomen liegt beim radioaktiven Zerfall vor, auf den wir in Kapitel VIII zurückkommen werden.

Ein weiteres physikalisches Analogon zum eingangs beschriebenen Bakterienwachstum oder zu den chemischen Folgereaktionen stellen Vorgänge dar, bei denen Flüssigkeiten aus hintereinandergeschalteten Behältern auslaufen ("Kaskadenmodell", siehe Abb. 29.2). Für

Details sei auf die Veröffentlichung von U. Beck, D. Büttner, W. Kuntzsch: "Differenzengleichungen als Modelle analoger Phänomene in Realwissenschaften", Chim. did., 1977, Seite 233 - 263 verwiesen.

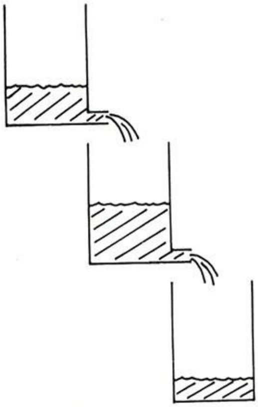


Abb. 29.2

VII ANWENDUNGEN WIRTSCHAFTLICHER NATUR

§ 30 Beschreibung, Gliederung und Abgrenzung der behandelten Problemkreise

Bei der Entwicklung der Theorie der Differenzengleichungen sind wir in den Kapiteln I bis IV bereits verschiedenen Anwendungen aus dem Wirtschaftsleben begegnet (Einkommensteuer in § 5, Tilgung von Darlehen in § 7, Rentenrechnung in § 7, Angebot-Nachfrage-Zyklen in § 9, Zuwachs-Sparbuch in § 10, dynamische Prämiensteigerung bei Lebensversicherungen in § 11). Als weitere wirtschaftlich orientierte Themenkreise kamen hinzu die gleitenden Durchschnitte in § 23 und die Diskussion exogen erklärter Wachstumsmodelle in § 27 (Sättigungswachstum mit und ohne Schwellenwert).

Die bisher behandelten wirtschaftlichen Themen entsprangen somit im wesentlichen dem Bereich der *Mikroökonomie*, also dem Zweig der Wirtschaftswissenschaften, der die Untersuchung einzelwirtschaftlicher Phänomene zum Ziel hat (Theorie der Haushalte und Unternehmen, Preisbildung, Kosten, Erlöse, Angebote usw.). Im hierzu komplementären Bereich der *Makroökonomie* steht dagegen die gesamtwirtschaftliche Betrachtungsweise im Vordergrund (Binnen- und Außenwirtschaftstheorie, Theorie des Volkseinkommens, Beschäftigungs-, Geld-, Konjunktur- und Wachstumstheorie von Volkswirtschaften). Zwischen beiden Zweigen der Wirtschaftstheorie gibt es jedoch Überlappungsbereiche. So werden wir im folgenden insbesondere erkennen, daß mathematische Modelle zur Beschreibung der Lagerhaltung in Einzelbetrieben und zur Beschreibung des Einkommens ganzer Volkswirtschaften praktisch identisch sein können. Im einzelnen zitieren wir in Tabelle 30.1 die Aufgabenstellungen und Themenkreise von Mikroökonomie und Makroökonomie nach A. Woll, Allgemeine Volkswirtschaftslehre, München, 1974.

Im folgenden werden wir zunächst ein Beispiel finanzmathematischer Natur (Saldensummenberechnung bei Bausparverträgen), ein weiteres mikroökonomisches Beispiel (Lagerhaltungsmodell) und danach makroökonomische Modelle betrachten.

§ 31 Die Zuteilung von Bausparverträgen anhand des Saldensummenkriteriums

Die Ermittlung der Zuteilungsfrist von Bausparverträgen stellt ein typisches Summierungsproblem dar.

Während der Ansparphase sammelt der Bausparer durch wiederholte Einzahlungen ein Bausparguthaben an. Dieses Guthaben wird mit einem jährlichen Zinssatz von p % verzinst. Die Kontostände des jeweiligen Guthabens werden immer halbjährlich an bestimmten Stichtagen zur sogenannten *Saldensumme* aufaddiert. Wenn die Saldensumme eine bestimmte Höhe (Punktzahl) erreicht hat, ist der Bausparvertrag zuteilungsreif. Ab diesem Zeitpunkt kann das Bauspardarlehen ausgezahlt werden. Wir wollen im folgenden annehmen, daß die Einzahlungen E des Bausparers periodisch in gleichbleibender Höhe erfolgen. Als Periode nehmen wir $\frac{1}{2}$ Jahr an; die Zahlungen mögen unmittelbar vor der jeweiligen Berechnung der Saldensumme erfolgen. Weiterhin wollen wir annehmen, daß der Halbjahreszinssatz $\frac{p}{2}$ % betrage. (Der Leser begründe, warum diese der Bequemlichkeit halber häufig praktizierte Regelung bei kleinen Prozentsätzen von ca. 2 % bis 5 % zu keinen großen Ungenauigkeiten führt.) Mit diesen dem normalen Ansparvorgang insgesamt recht gut entsprechenden Annahmen lautet das Guthaben G_{k+1} nach der

Fragestellungen	Theoriegebiete
Mikroökonomie	
1. Warum und in welcher Menge werden bestimmte Güter nachgefragt?	Haushalts- oder Nachfragetheorie
2. Nach welchen Kriterien werden Güter erzeugt, und wovon hängt die Wahl des Produktionsverfahrens ab?	Unternehmens- oder Angebotstheorie
3. In welchen Mengen werden Güter verkauft, und wovon hängt die Zusammensetzung der gesamtwirtschaftlichen Produktion ab?	(Produkt-) Preis- und Allokationstheorie
4. Was bestimmt die Verteilung des Produktionsergebnisses auf die Anbieter produktiver Leistungen (Arbeit, Kapital, Boden)?	(Faktor-) Preis- oder Verteilungstheorie
Makroökonomie	
5. Wodurch ist die Beschäftigung der Anbieter produktiver Leistungen bestimmt?	Beschäftigungstheorie
6. Welches sind die Gründe und Bedingungen für das Wachstum reicher und die Entwicklung armer Volkswirtschaften?	Wachstums- und Entwicklungstheorie
7. Welche Aufgaben kann das Geld übernehmen, und welche Wirkungen gehen von ihm aus?	Geldtheorie
8. Welche Größen beeinflussen die gesamtwirtschaftlichen Aktivitäten?	Konjunkturtheorie
9. Zu welchen Besonderheiten führt die Existenz autonomer Wirtschaftsräume und Währungseinheiten, und was bestimmt die Verteilung der Produktivkräfte und Produkte im Raum?	Außenhandels- und Raumwirtschaftstheorie

Tab. 30.1

(k + 1)-ten Einzahlung vom Betrage E:

$$G_{k+1} = G_k \cdot (1 + \frac{p}{2 \cdot 100}) + E \tag{31.1}$$

Mit der Einführung des Wachstumsfaktors

$$q = 1 + \frac{p}{2 \cdot 100}$$

vereinfacht sich diese Differenzengleichung formal zu

$$G_{k+1} = q \cdot G_k + E. \tag{31.2}$$

Die Saldensumme nach der (k + 1)-ten Periode ist gegeben durch

$$S_{k+1} = S_k + G_{k+1}. \tag{31.3}$$

Aufgabe 31.1

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur rekursiven Ermittlung von G_k und S_k bei variabler Eingabe von p und E, entsprechend dem oben beschriebenen halbjährlichen Einzahlungsrhythmus.

b) Schreiben Sie ein modifiziertes Programm zur Saldensummenberechnung, entsprechend den folgenden Vorgaben:

Einzahlung: monatlicher Betrag $\frac{E}{6}$
Berechnung der Guthaben-Zinsen: monatlich
zum Zinssatz: $\frac{p}{12}$ %
Berechnung der Saldensumme: nach wie vor halbjährlich

c) Vergleichen Sie anhand einiger Computerläufe die Ansparvorgänge nach a) und b).

Im Hinblick auf die geschlossene Lösung des Saldensummenproblems bemerken wir zunächst, daß die Gleichung für das Guthaben vom Typ der Tilgungsgleichung (7.4) ist und für $q \neq 1$ - was wir im folgenden stets annehmen werden - bei Zugrundelegung des Anfangswertes $G_0 = 0$ die Lösung

$$G_k = \frac{1 - q^k}{1 - q} \cdot E = \frac{E}{1 - q} - q^k \cdot \frac{E}{1 - q} \tag{31.4}$$

besitzt. Gleichung (31.3) besitzt also eine Inhomogenität, die sich aus dem konstanten Bestandteil $\frac{E}{1 - q}$ und dem exponentiellen Teil $-q^{k+1} \cdot \frac{E}{1 - q}$ additiv zusammensetzt. Nach dem in Abschnitt [18.4] geschilderten Superpositionsverfahren und der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhält man eine spezielle Lösung der Gleichung (31.3) durch Addition je einer speziellen Lösung S_k^* bzw. S_k^{**} der Gleichungen

$$S_{k+1} - S_k = \frac{E}{1 - q} \tag{31.5}$$

und

$$S_{k+1} - S_k = - \frac{E}{1 - q} \cdot q^{k+1} \tag{31.6}$$

Die erste der beiden Gleichungen besitzt die spezielle Lösung

$$S_k^* = k \cdot \frac{E}{1 - q}. \tag{31.7}$$

Entsprechend Tabelle 18.1 besitzt Gleichung (31.6) eine Lösung der Form

$$S_k^{**} = C \cdot q^{k+1}. \tag{31.8}$$

Wir haben zunächst den noch unbekannten Koeffizienten C zu ermitteln. Durch Einsetzen in (31.6) erhalten wir

$$S_{k+1}^{**} - S_k^{**} = C \cdot q^{k+2} - C \cdot q^{k+1} = -\frac{E}{1-q} \cdot q^{k+1};$$

also ist

$$C = \frac{E}{(1-q)^2} \tag{31.9}$$

Aufgabe 31.2

Überprüfen Sie durch Einsetzen, daß

$$S_k^{***} = S_k^{*} + S_k^{**} = k \cdot \frac{E}{1-q} + \frac{E}{(1-q)^2} \cdot q^{k+1} \tag{31.10}$$

eine spezielle Lösung der Gleichung (31.3) darstellt.

Das charakteristische Polynom $p(m) = m - 1$ von Gleichung (31.3) besitzt die Nullstelle $m_1 = 1$. Nach (18.21) ist die allgemeine Lösung von (31.3) gegeben durch

$$S_k = C_1 + S_k^{***} = C_1 + k \cdot \frac{E}{1-q} + \frac{E}{(1-q)^2} \cdot q^{k+1} \tag{31.11}$$

Für $k = 0$ ist der Anfangswert $S_k = 0$. Daraus folgt:

$$C_1 = -\frac{E}{(1-q)^2} \cdot q \tag{31.12}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte $G_0 = S_0 = 0$ erhalten wir das Ergebnis:

$$S_k = k \cdot \frac{E}{1-q} + \frac{E \cdot q}{(1-q)^2} \cdot (q^k - 1) \tag{31.13}$$

Aufgabe 31.3

Erweitern Sie das Computerprogramm aus Aufgabe 31.1 derart, daß die Werte für G_k und S_k jeweils parallel sowohl rekursiv - auf den Gleichungen (31.2) und (31.3) basierend - als auch anhand der geschlossenen Darstellungen (31.4) und (31.13) ermittelt werden. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Erklären Sie mögliche Unterschiede.

Mit konkreten Zahlenwerten stellt sich der Sachverhalt in etwa wie folgt dar:

Die für die Zuteilung notwendige Saldensumme liegt zur Zeit bei etwa 2400 Punkten pro 1000 DM Bausparsumme. Die vom Computer erstellte Tabelle 31.1 zeigt uns, daß dies bei einem Guthabenzinssatz von 3 % jährlich und einer halbjährlichen Einzahlung von 15 DM (entspricht mit den oben gemachten Einschränkungen der Regel-Ansparsumme von 2,50 DM pro Monat und pro 1000 DM Bausparsumme) zwischen der 16. und 17. Zahlungsperiode erreicht ist. Die Zuteilung erfolgt also $7\frac{1}{2}$ bis 8 Jahre nach der ersten Einzahlung.

Saldensummen-Berechnung		
Bausparsumme:	B =	1000,00
Einzahlungsbetrag:	E =	15,00
Jahreszinssatz (%)	P =	3,00
Periode	**Bausparsumme**	**Saldensumme**
1	15,00	15,00
2	30,22	45,23
3	45,68	90,90
4	61,36	152,27
5	77,28	229,55
6	93,44	322,99
7	109,84	432,84
8	126,49	559,33
9	143,39	702,72
10	160,54	863,26
11	177,95	1041,21
12	195,62	1236,83
13	213,55	1450,38
14	231,76	1682,14
15	250,23	1932,37
16	268,99	2201,36
17	288,02	2489,38
18	307,34	2796,72

Tab. 31.1

Aufgabe 31.4

Ein Bausparer schließt einen Bausparvertrag über 30 000,- DM ab. Die Regel-Ansparsumme beträgt in diesem Fall 450,- DM (= 2,5·30·6 DM) halbjährlich. Er zahlt statt dessen jedoch die höhere Ansparrate von 800,- DM halbjährlich. Wann wird sein Vertrag zugeteilt? (Guthabenzinsen: 3 % jährlich.)

Aufgabe 31.5

Ein Bausparer möchte einen Bausparvertrag über 50 000,- DM in $3\frac{1}{2}$ Jahren nach Abschluß (nullte Periode) zugeteilt haben. Wieviel muß er halbjährlich (monatlich) einzahlen, um dies zu erreichen? (Jahreszinssatz: 3 %.)

Hinweis: $3\frac{1}{2}$ Jahre (7. Periode) nach Abschluß bedeutet also 3 Jahre nach der ersten Einzahlung.

a) Berechnen Sie die notwendige Einzahlung E allgemein aus Gleichung (31.13).

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch einen Testlauf (Simulation) mit dem Computerprogramm aus Aufgabe 31.1.

§ 32 Ein Lagerhaltungsmodell

[32.1] Die allgemeine Modellbeschreibung

Das folgende Beispiel ist orientiert an dem von L. A. Metzler entwickelten Modell zur Beschreibung von Lagerzyklen (Metzler, The Nature and Stability of Inventory Cycles; Review of Economics and Statistics, 23, 1941). Wir werden im folgenden jedoch auf formale Begriffe aus der Wirtschaftstheorie verzichten und die jeweiligen Sachverhalte in einer naiven, untechnischen Sprache beschreiben.

Ein Unternehmen stelle Konsumgüter her. Die Produktion gehe entweder direkt in den Verkauf oder auf Lager. Die Produktionsentwicklung soll insbesondere zu Prognose- und Planungszwecken durch ein mathematisches Modell beschrieben werden. Bei der Entwicklung derartiger Modelle beschränkt man sich im ersten Anlauf meist auf eine recht grobe Beschreibung, die dann im Laufe der Zeit verfeinert wird.

Der Wert der in der Periode $[k, k+1)$ für den Verkauf hergestellten Güter sei mit V_k bezeichnet, der Wert der für die Belieferung des eigenen Lagers hergestellten Güter mit L_k bezeichnet. Diese Produktion stellt eine Wertschöpfung dar. Eine weitere Wertschöpfung des Unternehmens geschieht in Form von (Netto-)Investitionen des Wertes I_k, die wir im folgenden als konstant (pro Periode) annehmen wollen ($I_k = I$). Die Wertschöpfung W_k des Unternehmens in der Periode $[k, k+1)$ ist also gegeben durch

$$W_k = V_k + L_k + I. \qquad (32.1)$$

Die Planung der Produktionsmengen V_{k+1} und L_{k+1} für die jeweils neue Periode orientiert sich an den wirtschaftlichen Daten der vorangegangenen Zeit. Einer entsprechenden Zielsetzung der Unternehmenspolitik zufolge habe sich ein konstantes Verhältnis von tatsächlichem Verlauf T_k (aus der laufenden Produktion und aus Lagerbeständen) und Wertschöpfung W_k in den vorangegangenen Perioden eingependelt:

$$T_k = a \cdot W_k \quad \text{(ökonomisch sinnvoll: } 0 < a < 1) \qquad (32.2)$$

Die Produktionsmenge V_{k+1} einer neuen Periode wird nun so geplant, daß sie mit dem tatsächlichen Verkauf in der vorangegangenen Periode übereinstimmt:

$$V_{k+1} = T_k = a \cdot W_k \qquad (32.3)$$

An dieser Stelle bieten sich Möglichkeiten zur späteren Verfeinerung des Modells an, indem etwa der Verkaufstrend über mehrere Perioden hinweg beobachtet und mit einbezogen wird. Ein geeignetes mathematisches Hilfsmittel hierfür bilden z. B. die gewogenen gleitenden Durchschnitte aus § 23.

Die Lagerproduktion L_{k+1} werde so geplant, daß der geplante Lagerbestand $\hat{B}_{k+1}$ am Ende der Periode $[k+1, k+2)$ zur geplanten Verkaufsmenge V_{k+1} in einem festen Verhältnis steht:

$$\frac{\hat{B}_{k+1}}{V_{k+1}} = b \qquad (b > 0)$$

$$\hat{B}_{k+1} = b \cdot V_{k+1} \tag{32.4}$$

Die zu planende Lagerproduktion L_{k+1} ergibt sich dann als Differenz von $\hat{B}_{k+1}$ und dem tatsächlichen Lagerbestand B_k am Ende der Periode $[k, k+1)$:

$$L_{k+1} = \hat{B}_{k+1} - B_k \tag{32.5}$$

Der tatsächliche Lagerbestand B_k wird vom geplanten Lagerbestand $\hat{B}_k$ abweichen, weil die geplante Verkaufsmenge V_k im allgemeinen nicht genau mit der tatsächlichen Verkaufsmenge T_k übereinstimmt. Ist $T_k > V_k$, so wird der zusätzliche Bedarf dem Lagerbestand entnommen; im Falle $T_k < B_k$ wird die nicht verkaufte Menge dem Lager zugeschlagen. Wir erhalten:

$$B_k = \hat{B}_k + (V_k - T_k) \tag{32.6}$$

Mit (32.4), (32.2) und (32.5) folgt

$$B_k = (1 + b) \cdot V_k - T_k = (1 + b) \cdot a \cdot W_{k-1} - a \cdot W_k \tag{32.7}$$

$$L_{k+1} = (1 + b) \cdot a \cdot W_k - (1 + b) \cdot a \cdot W_{k-1} \tag{32.8}$$

In (32.1) (an der Stelle $k + 2$) eingesetzt, ergibt dies schließlich die inhomogene lineare Differenzengleichung:

$$W_{k+2} - a \cdot (2 + b) \cdot W_{k+1} + a \cdot (1 + b) \cdot W_k = I \tag{32.9}$$

Aufgabe 32.1

Führen Sie für wirtschaftlich sinnvolle Werte von a, b und I einige Computerläufe mit Hilfe des in Aufgabe 16.1 geschriebenen Programms oder mit Hilfe des Universalprogramms aus Aufgabe 18.7 durch.

Aufgabe 32.2

Zeigen Sie, daß die Gleichung (32.9) im folgenden Sinne "fast allgemein" ist:

Für beliebige reelle Zahlen a_1 und a_0 (mit $a_1 \neq -a_0$) gibt es stets Zahlen a und b mit:

$$a_1 = -a \cdot (2 + b)$$

$$a_0 = a \cdot (1 + b)$$

Das heißt: Die Gleichung

$$W_{k+2} + a_1 \cdot W_{k+1} + a_0 \cdot W_k = I \tag{32.10}$$

stimmt mit (32.9) überein.

Im Hinblick auf die explizite Lösung der gefundenen Differenzengleichung (32.9) haben wir entsprechend den Darlegungen in Kapitel III zunächst die Wurzeln des charakteristischen Polynoms p(m) der zugehörigen homogenen Gleichung zu ermitteln:

$$p(m) = m^2 - a\cdot(2+b)\cdot m + a\cdot(1+b) = 0 \tag{32.11}$$

Diese sind:

$$m_1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot(2+b) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2\cdot(2+b)^2 - 4\,a\cdot(1+b)}\quad;\ \text{bzw.:}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot(2+b) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - 4\,a\cdot(1-a)\cdot(1+b)} \\ m_2 &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot(2+b) - \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - 4\,a\cdot(1-a)\cdot(1+b)} \end{aligned}\right\} \tag{32.12}$$

Für die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung benötigen wir nach Satz 16.1 nur noch eine spezielle Lösung von (32.9).

Nach Abschnitt [16.2] gilt einer der ersten Versuche in derartigen Fällen der Frage, ob eine konstante Lösung existiert. Dies ist nach Satz 16.3 der Fall; wir erhalten für $a \neq 1$:

$$W_k^* = \frac{I}{1-a} \tag{32.13}$$

Aufgabe 32.3

> Bestätigen Sie die Plausibilität der in (32.13) dargestellten konstanten Lösung anhand der folgenden Überlegung:
>
> Konstanz liegt vor, falls $T_k = V_k$ und $L_k = 0$ (für alle k).

Die endgültige Form der allgemeinen Lösung der Gleichung (32.9) hängt noch von der Art der Wurzeln m_1 und m_2 und somit von der Diskriminante

$$D = a^2b^2 - 4\,a\cdot(1-a)\cdot(1+b) \tag{32.14}$$

ab. Es ergeben sich die folgenden Fallunterscheidungen:

Fall 1: $D > 0$

Für (wirtschaftlich sinnvolle Werte) $a > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $a > \frac{4\cdot(1+b)}{(2+b)^2}$. In diesem Fall sind die Wurzeln m_1 und m_2 reell und verschieden. Die allgemeine Lösung von (32.9) lautet dann:

$$W_k = C_1\cdot m_1^k + C_2\cdot m_2^k + \frac{I}{1-a} \tag{32.15}$$

C_1 und C_2 sind beliebige reelle Koeffizienten.

Fall 2: $D = 0$

Also ist $a = \frac{4\cdot(1+b)}{(2+b)^2}$. Dann ist $m_1 = m_2 = \tilde{m}$, und nach Satz 14.8 bzw. Aufgabe 14.8 lautet die allgemeine Lösung

$$W_k = C_1\cdot\tilde{m}^k + C_2\cdot k\cdot\tilde{m}^k + \frac{I}{1-a} \tag{32.16}$$

Fall 3: $D < 0$

Also ist $a < \frac{4 \cdot (1 + b)}{(2 + b)^2}$. Dann sind die Wurzeln m_1 und m_2 komplex und verschieden. Gleichung (32.15) stellt auch in diesem Fall die allgemeine Lösung dar. Wir werden im anschließenden konkreten Zahlenbeispiel in Abschnitt [32.2] noch den Übergang zu reellen Lösungsfolgen entsprechend der in Abschnitt [15.3] entwickelten Methode durchführen.

Zunächst jedoch noch einige Bemerkungen zur Stabilität der konstanten Lösung. Nach Abschnitt [18.5] liegt Stabilität genau dann vor, wenn für die Wurzeln gilt:

$$|m_1| < 1 \qquad \text{und} \qquad |m_2| < 1$$

Leichter zu überprüfen sind in diesem Falle jedoch die in Aufgabe 18.9 gegebenen drei Kriterien, von denen die ersten beiden unter der Voraussetzung von $a > 0$ und $b > 0$ trivialerweise erfüllt sind. Übrig bleibt somit nur die dritte Bedingung:

$$1 - a \cdot (1 + b) > 0, \text{ d. h. } a < \frac{1}{1 + b} \tag{32.17}$$

Unsere Überlegungen führen also zu dem

Ergebnis:

Die konstante Lösung (32.13) der Lagerhaltungsgleichung (32.9) ist bei der Vorgabe positiver Koeffizienten a und b genau dann stabil, wenn

$$a < \frac{1}{1 + b}.$$

Aufgabe 32.4

a) Stellen Sie die Funktionen

$$b \longmapsto f_1(b) := \frac{4 \cdot (1 + b)}{(2 + b)^2}$$

$$b \longmapsto f_2(b) := \frac{1}{1 + b}$$

in einem (b, a)-Koordinatensystem dar.

b) Schraffieren Sie in geeigneter Form die Gebiete mit reellen bzw. komplexen Wurzeln m_1 und m_2 sowie stabilem oder instabilem Gleichgewicht.

Aufgabe 32.5

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Lagerhaltungsgleichung (32.9) für $a = 1$ und $b \neq 0$. Zeigen Sie, daß es in diesem Fall keine konstante Lösung gibt. Begründen Sie, daß die Lösungsfolgen divergieren. Führen Sie einige Programmläufe mit $a = 1$ und verschiedenen Werten von b durch. Interpretieren Sie den Fall $a = 1$ im wirtschaftlichen Sinne.

Aufgabe 32.6

Behandeln Sie entsprechend der Aufgabenstellung in obiger Aufgabe den Fall

$$a = 1 \qquad \text{und} \qquad b = 0.$$

[32.2] Ein spezielles Zahlenbeispiel

Mit den Werten $a = 0{,}8$; $b = 0{,}125$ und $I = 110$ lautet Gleichung (32.9):

$$W_{k+2} - 1{,}7\,W_{k+1} + 0{,}9\,W_k = 110 \tag{32.18}$$

Die zugehörige homogene Gleichung

$$W_{k+2} - 1{,}7\,W_{k+1} + 0{,}9\,W_k = 0 \tag{32.19}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$p(m) = m^2 - 1{,}7\,m + 0{,}9. \tag{32.20}$$

Dessen Wurzeln lauten näherungsweise

$$m_1 = \frac{1}{2}(1{,}7 + \sqrt{1{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}9}\ )$$

$$m_1 = 0{,}85 + 0{,}5\sqrt{-0{,}71}$$

$$m_1 = 0{,}85 + 0{,}4213\,i$$

$$m_2 = 0{,}85 - 0{,}4213\,i$$

Die inhomogene Gleichung besitzt nach (32.13) die spezielle konstante Lösung

$$W_k^* = \frac{I}{1-a} = \frac{110}{1-0{,}8} = 550.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit näherungsweise:

$$W_k = C_1 \cdot (0{,}85 + 0{,}4213\,i)^k + C_2 \cdot (0{,}85 - 0{,}4213\,i)^k + 550 \tag{32.21}$$

In § 15 haben wir eine Methode kennengelernt, die mit Hilfe komplexer Zahlen beschriebene Lösung (32.21) in eine ausschließlich durch reelle Koeffizienten ausgedrückte Lösung überzuführen. In Polarkoordinaten dargestellt, lautet der Näherungswert für die Wurzel m_1:

$$m_1 = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$$

mit

$$r = \sqrt{0{,}85^2 + 0{,}4213^2} \cong \sqrt{0{,}9} \cong 0{,}94868$$

$$\cos\phi = \frac{0{,}85}{\sqrt{0{,}9}} \cong 0{,}89598$$

$$\sin\phi = \frac{0{,}4213}{\sqrt{0{,}9}} \cong 0{,}444.$$

Der Winkel ϕ lautet im Bogenmaß

$$\phi = 0{,}46$$

und im Gradmaß

$$\phi = 26{,}36°.$$

(Probe: $\sin^2\phi + \cos^2\phi \cong 0{,}9999 \cong 1.$)

Also ist in Polarkoordinaten näherungsweise

$$m_1 = 0{,}94868 \cdot (0{,}89598 + i \cdot 0{,}444)$$

$$m_2 = 0{,}94868 \cdot (0{,}89598 - i \cdot 0{,}444)$$

Unter Verwendung der Formel von Moivre (15.21) kann die allgemeine Lösung (32.21) also auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$W_k = C_1 \cdot 0{,}94868^k \cdot (\cos(0{,}46 \cdot k) + i \cdot \sin(0{,}46 \cdot k)) + \\ + C_2 \cdot 0{,}94868^k \cdot (\cos(0{,}46 \cdot k) - i \cdot \sin(0{,}46 \cdot k)) + 550 \qquad (32.22)$$

Nach § 15 sind die reellen Folgen

$$\left.\begin{aligned} W_k &= 0{,}94868^k \cdot \cos(0{,}46 \cdot k) \\ W_k &= 0{,}94868^k \cdot \sin(0{,}46 \cdot k) \end{aligned}\right\} \qquad (32.23)$$

ebenfalls Lösungen der homogenen Gleichung (32.19).

Aufgabe 32.7

Überprüfen Sie mit einem Computerprogramm für $k = 1$ bis $k = 1000$, daß die in (32.23) gegebenen reellen Folgen die homogene Gleichung näherungsweise lösen.

Nach Satz 15.4 bilden die Lösungen (32.23) sogar ein Fundamentalsystem; die allgemeine Lösung der Gleichung (32.18) lautet somit:

$$W_k = 0{,}94868^k \cdot (C_1' \cdot \cos(0{,}46 \cdot k) + C_2' \cdot \sin(0{,}46 \cdot k)) + 550 \qquad (32.24)$$

Aufgabe 32.8

a) Berechnen Sie die Koeffizienten C_1' und C_2' so, daß die durch (32.24) gegebene Lösungsfolge die Anfangswerte $W_0 = 1000$ und $W_1 = 1200$ besitzt.

b) Berechnen Sie W_k rekursiv nach (32.18) und explizit nach (32.24) und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Im (k, W_k)-Diagramm sieht die Lösung aus Aufgabe 32.8 folgendermaßen aus:

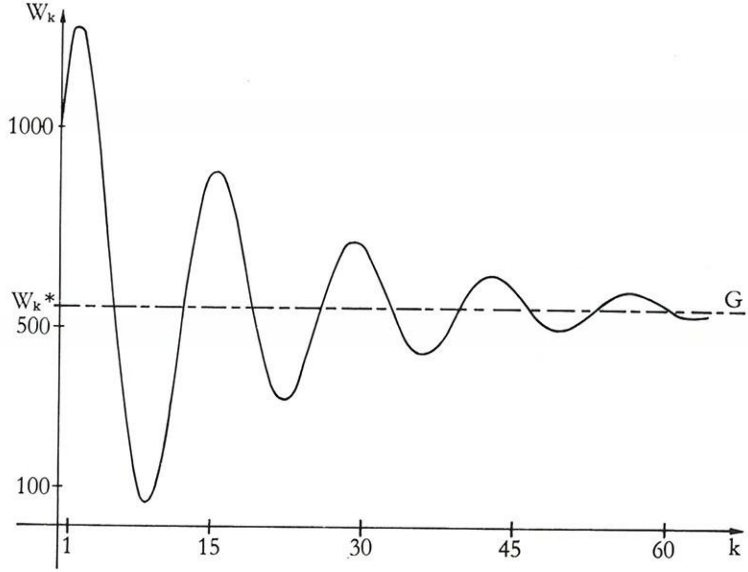


Abb. 32.1

Die Lösungskurve "oszilliert" um die durch $W_k^* = 550$ gegebene Gerade G. Eine empirische Überprüfung zeigt, daß die Schnittpunkte der Lösungskurve mit der Geraden G äquidistant liegen, wie es stets auch bei den trigonometrischen Funktionen, also z. B. bei der Cosinusfunktion der Fall ist.

Um die Lösungsfolge W_k als Funktion von k besser zu verstehen, untersuchen wir zunächst die in (32.24) auftretenden elementaren Bestandteile. Für C_1' und C_2' nehmen wir die festen Werte $C_1' = C_2' = 1$ an.

Wir setzen

$$f(k) := 0{,}94868^k \tag{32.25}$$

$$g(k) := \cos(0{,}46\cdot k) + \sin(0{,}46\cdot k) \tag{32.26}$$

Abbildung 32.2 erweckt den Eindruck, daß die Funktion g(k) als verschobene Cosinus- oder Sinusfunktion mit vergrößerter Amplitude gedeutet werden kann. Sie läuft, anschaulich gesprochen, hinter der Funktion

$$\hat{g}(k) = \cos(0{,}46\cdot k)$$

her.

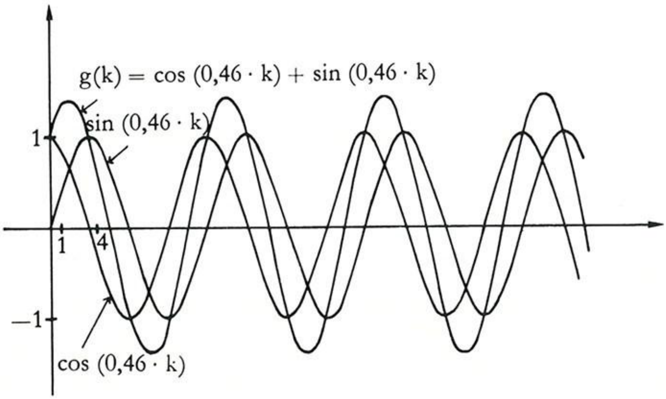


Abb. 32.2

Die Funktion g erreicht ihre Maxima, Achsendurchgänge und Minima jeweils erst an den Stellen $x+\beta$, wenn $\hat{g}$ diese Punkte jeweils an den Stellen x $(x = 0{,}46\cdot k)$ durchläuft. Außerdem ist offenbar die Amplitude von g größer als die von $\hat{g}$. Wir versuchen dementsprechend, die Funktion g folgendermaßen durch $\hat{g}$ auszudrücken:

$$g(k) = C\cdot\cos(0{,}46\cdot k - \beta) \tag{32.27}$$

Nach dem Additionstheorem (15.17) ist

$$\cos(x-\beta) = \cos x\cdot\cos\beta + \sin x\cdot\sin\beta .$$

Gleichung (32.27) geht somit über in

$$g(k) = C\cdot(\cos\beta\cdot\cos(0{,}46\cdot k) + \sin\beta\cdot\sin(0{,}46\cdot k)).$$

Falls sich C und β so wählen lassen , daß

$$\left.\begin{aligned} C\cdot\cos\beta &= 1 \\ C\cdot\sin\beta &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{32.28}$$

ist, könnten wir die Funktion g in der einfacheren Form (32.27) darstellen.

Aus (32.28) folgt durch Quadrieren:

$$C^2 \cdot \cos^2 \beta = 1$$

$$C^2 \cdot \sin^2 \beta = 1,$$

also

$$C^2 \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = 2.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} C = \sqrt{2} \\ \cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \text{ (im Bogenmaß)} \\ \beta = 45^\circ \text{ (im Gradmaß)} \end{array}\right\} \qquad (32.2$$

Wir erhalten also das

Ergebnis:

Die Funktionen

$$k \longmapsto \cos(0{,}46 \cdot k) + \sin(0{,}46 \cdot k)$$

und

$$k \longmapsto \sqrt{2} \cdot \cos(0{,}46 \cdot k - \tfrac{\pi}{4})$$

sind identisch. Die in (32.26) definierte Funktion g läßt sich also auch folgendermaßen darstellen:

$$g(k) = \sqrt{2} \cdot \cos(0{,}46 \cdot k - \tfrac{\pi}{4}) \qquad (32.30$$

Aufgabe 32.9

Überprüfen Sie anhand eines Computerprogrammes, daß die durch (32.26) und (32.30) gegebenen Funktionen übereinstimmen. Die Übereinstimmung kann wegen des beschränkten Zahlbereiches, der dem Computer zur Verfügung steht, nur näherungsweise zutreffen.

Durch die speziellen Werte $C_1' = 1$ und $C_2' = 1$ wird also eine Lösung der homogenen Gleichung (32.19) festgelegt, die auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$W_k = f(k) \cdot g(k)$$

$$W_k = 0{,}94868^k \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(0{,}46 \cdot k - \tfrac{\pi}{4}) \qquad (32.31$$

Der in (32.27) auftretende Faktor C ($C = \sqrt{2}$) ist offenbar für die Vergrößerung der *Amplitude* in Abbildung 32.2 verantwortlich. Die Verschiebung des Arguments um den Winkel $-\beta$ ($\beta = \frac{\pi}{4}$) wird auch *Phasenverschiebung* genannt.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (32.19) lautet nach (32.24):

$$W_k = 0{,}94868^k \cdot (C_1' \cdot \cos(0{,}46 \cdot k) + C_2' \cdot \sin(0{,}46 \cdot k)) \qquad (32.32)$$

Im obigen Verfahren haben wir gesehen, daß für eine spezielle Wahl der Konstanten C_1' und C_2' Werte für C und ß gefunden werden können, so daß gilt:

$$W_k = 0{,}94868^k \cdot C \cdot \cos(0{,}46 \cdot k - \beta) \tag{32.33}$$

Die Konstanten C_1' und C_2' wurden also durch die Konstanten C (Amplitude) und ß (Phasenverschiebung) ersetzt.

Die Vermutung liegt nahe, daß die Möglichkeit zur Darstellung der allgemeinen Lösung homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung durch Amplitude und Phasenverschiebung nicht auf die obige spezielle Wahl der Zahlenwerte von C_1 und C_2 beschränkt ist. Um die Frage nach der allgemeinen Anwendbarkeit des oben aufgezeigten Verfahrens werden wir uns im folgenden Paragraphen bemühen.

§ 33 Die Darstellung periodischer Lösungen durch Amplitude und Phasenverschiebung

Entsprechend dem in Abschnitt [32.2] skizzierten Programm betrachten wir die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0 \tag{33.1}$$

und nehmen an, daß ihr charakteristisches Polynom

$$p(m) = m^2 + a_1 \cdot m + a_0 \tag{33.2}$$

die beiden komplexen Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= r \cdot (\cos\phi - i \cdot \sin\phi) \\ m_2 &= r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) \end{aligned}\right\} \tag{33.3}$$

besitzt.

Die allgemeine Lösung von (33.1) lautet nach Satz 14.7 bzw. Satz 15.4:

$$y_k = C_1 \cdot m_1^k + C_2 \cdot m_2^k \tag{33.4}$$

$$y_k = r^k (C_1' \cdot \cos k\phi + C_2' \cdot \sin k\phi) \tag{33.5}$$

Hierbei sind C_1, C_2, C_1' und C_2' frei wählbare Konstanten.

Unser Ziel ist die Darstellung der allgemeinen Lösung in der Form

$$y_k = r^k \cdot C \cdot \cos(k \cdot \phi - \beta). \tag{33.6}$$

Nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen (15.17) ist

$$\begin{aligned} \cos(k\phi - \beta) &= \cos(k\phi) \cdot \cos(-\beta) - \sin(k\phi) \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos\beta \cdot \cos k\phi + \sin\beta \cdot \sin k\phi . \end{aligned}$$

Gleichung (33.6) ist also gleichbedeutend mit

$$y_k = r^k \cdot (C \cdot \cos\beta \cdot \cos k\phi + C \cdot \sin\beta \cdot \sin k\phi).$$

Ein Vergleich mit (33.5) zeigt, daß auch (33.6) die allgemeine Lösung von (33.1) darstellt, falls C und ß wie folgt gewählt werden können:

$$\left.\begin{array}{l} C\cdot\cos\beta = C_1' \\ C\cdot\sin\beta = C_2' \end{array}\right\} \tag{33.7}$$

Eine derartige Wahl ist stets möglich, denn durch Quadrieren folgt:

$$C^2\cdot(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = C^2 = C_1'^2 + C_2'^2,$$

also

$$C = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}\ .$$

Falls $C_1' = C_2' = 0$ wäre, erhielte man aus (33.6) mit $C = 0$ und beliebigem β die entsprechende (triviale) Lösung.

Wir brauchen also nur noch den Fall

$$C_1'^2 + C_2'^2 \neq 0$$

zu untersuchen. Dann ist offenbar $C \neq 0$ und

$$0 \leq \left|\frac{C_1'}{C}\right| \leq 1.$$

Es gibt also stets ein β mit

$$\cos\beta = \frac{C_1'}{C}.$$

Weiterhin gilt

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{C_1'^2}{C^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{C_2'}{C}$$

Die zweite Gleichung in (33.7) ist durch die obige Wahl von C und β also ebenfalls erfüllt.

Satz 33.1

Besitzt das charakteristische Polynom

$$p(m) = m^2 + a_1\cdot m + a_0$$

der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung

$$y_{k+2} + a_1\cdot y_{k+1} + a_0\cdot y_k = 0 \tag{33.8}$$

die komplexen Wurzeln

$$m_1 = r\cdot(\cos\phi - i\cdot\sin\phi)$$

$$m_2 = r\cdot(\cos\phi + i\cdot\sin\phi),$$

so lautet die allgemeine Lösung von (33.8) in der Darstellung durch Amplitude und Phasenverschiebung:

$$y_k = C\cdot r^k\cdot\cos(k\cdot\phi - \beta) \qquad (C,\ \beta\in\mathbb{R}) \tag{33.9}$$

§ 34 Grundbegriffe aus der Theorie des Wirtschaftskreislaufs und des Volkseinkommens

Das Volkseinkommen Y einer geschlossenen Volkswirtschaft ist einerseits die Summe aus Konsum C und Sparen S, andererseits die Summe aus Konsum C und Investitionen I; in Formeln

$$Y = C + S$$

$$Y = C + I.$$

Daraus folgt insbesondere:

$$S = I$$

Wenn Ihnen diese Begriffe bekannt sind und der genannte Sachverhalt einleuchtend oder selbstverständlich erscheint, können Sie den Rest dieses Paragraphen überblättern. Denn er dient nur dem Ziel, die angesprochenen volkswirtschaftlichen Grundbegriffe zu entwickeln und dabei zu motivieren und die obigen Gleichungen aufzustellen.

Die Detaillierung der Grundbegriffe und grundlegenden Techniken - wie beispielsweise die Aufstellung geeigneter Konten - wird dabei nur so weit vorangetrieben, wie es zur Erreichung des genannten Zieles notwendig ist. Dieser Paragraph ist insbesondere nicht als eine grundlegende Einführung in diese Begriffswelt zum Zwecke einer wirtschaftswissenschaftlichen Grundbildung geplant; er kann eine solche keinesfalls ersetzen. Für eine volkswirtschaftlich angemessene detaillierte Darstellung siehe etwa A. Stobbe, A. Woll, F. Müller.

Die Individuen einer arbeitsteiligen Gesellschaft erschaffen einerseits gewisse *Güter* in Form von *Waren* oder *Dienstleistungen*, sie haben andererseits Bedarf an anderen Gütern. Das sich daraus ergebende, im Detail aus einer unübersehbaren Fülle von sich überlappenden Herstellungs-, Verteilungs- und Verbrauchsprozessen bestehende Aktionsnetz nennt man den *Wirtschaftsprozeß*.

Wir wollen im folgenden versuchen, einen groben Einblick in solche Wirtschaftsprozesse zu gewinnen, die im Rahmen von geschlossenen Volkswirtschaften ohne staatliche Aktivität ablaufen. Die von uns verwendete Methode besteht nun nicht darin, daß der Gesamtprozeß aus allen daran beteiligten Einzelprozessen aufgebaut und rekonstruiert wird (bottom-up-Methode), sondern darin, daß vom Endergebnis her die Hauptkonstituenten des Wirtschaftsprozesses aufgeschlüsselt werden (top-down-Methode).

Die wechselseitige Befriedigung der Bedürfnisse aller am Wirtschaftsprozeß beteiligten Subjekte geht prinzipiell in Form des Tausches vonstatten. Der Tausch vollzieht sich auf *Märkten*. Das *Geld* fungiert dabei als allgemeines Tauschmittel und stellt eine Art Anrecht, eine Forderung auf andere Waren bzw. Dienstleistungen dar. Die Gesamtheit aller am Wirtschaftsprozeß Beteiligten wird der Funktion nach in zwei große Gruppen (Sektoren) aufgeteilt: die *Unternehmen* und die *privaten Haushalte*. Im folgenden werden wir letztere auch kurz als Haushalte bezeichnen, weil wir keine anderen als die privaten Haushalte betrachten werden. Die Rolle des Staates wird also nicht berücksichtigt werden. Die privaten Haushalte stellen den Unternehmen ihre Arbeitskraft zur Produktion von Waren und Dienstleistungen zur Verfügung. Sie erhalten dafür ein Geldeinkommen, das sie in die Lage versetzt, die in den Unternehmen produzierten Güter zu konsumieren. Wir weisen an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, daß die Klassifikation in Unternehmen und Haushalte rein funktionsspezifischer, nicht etwa personenspezifischer Natur ist. So ist ein Arbeitnehmer, der sich ein Haus bzw. Eigenheim geschaffen hat, in der Rolle des Hausbauers als Unternehmer anzusehen.

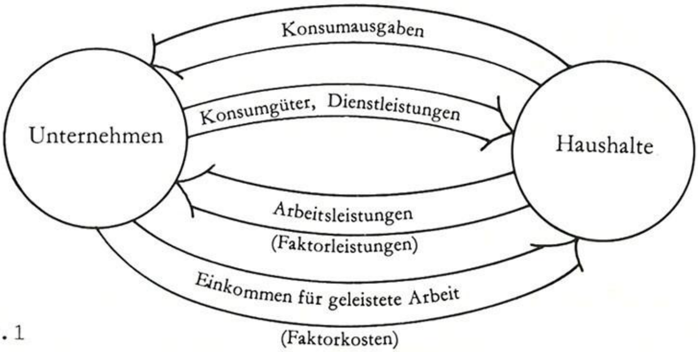


Abb. 34.1

Eine erste grobe Veranschaulichung dieses Wirtschaftsprozesses ist die in Abbildung 34.1 gegebene Kreislaufdarstellung.

Den durch die inneren Pfeile in der Abbildung dargestellten Kreislauf bezeichnet man als den *realen Strom*, im Gegensatz zum außen dargestellten *monetären Strom*. In dieser Darstellung steckt implizit die Grundannahme, daß die im Unternehmensbereich entstandenen Geldeinkommen (Faktorkosten) gerade durch den Wert der Güterproduktion gedeckt werden und daß die gesamten Einkommen der Haushalte für Konsumzwecke ausgegeben werden.

Häufig verwenden die Haushalte aber nicht ihr gesamtes Einkommen zu Konsumzwecken; sie sparen einen Teil des Einkommens und bilden dadurch Vermögen. Andererseits kann vorhandenes Vermögen durch Konsumausgaben, die das Einkommen überschreiten, also durch das sachliche Gegenteil von Sparen, geschmälert werden.

[34.1] Die Darstellung des Wirtschaftsprozesses im Kontensystem

Die für das folgende grundlegenden Aktivitäten des Wirtschaftsprozesses sind:

- Güter produzieren und verkaufen
- Einkommen erzielen und verwenden
- Vermögen aufbauen und abbauen

Es liegt nahe, zum Zwecke des Überblicks jede wirtschaftliche Transaktion wertmäßig in einer Liste unter der einschlägigen Rubrik zu notieren. Wirtschaftstechnisch gesprochen bedeutet das die Führung der folgenden drei Konten:

- (gesamtwirtschaftliches) Produktionskonto
- (gesamtwirtschaftliches) Einkommenskonto
- (gesamtwirtschaftliches) Vermögensänderungskonto

Jede wirtschaftliche Transaktion betrifft genau zwei dieser Konten; grob gesprochen einmal auf der Entstehungs-(Ertrags-, Einnahmen-)-Seite und einmal auf der Verwendungs-(Aufwands-, Ausgaben-)Seite.

a) Das gesamtwirtschaftliche Produktionskonto

Auf der Ertragsseite des Produktionskontos steht die Gesamtheit der durch den Verkauf der produzierten Güter erzielten Einnahmen. Ein

Teil der Güter wird an private Haushalte zum Zwecke des Konsums verkauft. Aber auch Unternehmen kaufen einen Teil der produzierten Güter zu Investitionszwecken. Unter diese Investitionsgüter fallen die Anlageinvestitionen (dauerhafte Produktionsmittel) und die Lagerinvestitionen. Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig zu verlangen, daß in jeder Periode stets die gesamte Produktion verkauft wird. Buchungstechnisch ist das dadurch zu erreichen, daß die nicht außerhalb des Unternehmens abgesetzten Güter an das eigene Lager verkauft werden. Sie stellen also eine Lagerinvestition dar. Es liegt bei kommerzieller Betrachtungsweise nahe, den Wert der Produktion als Summe aller durch die Produktion erzielten Einnahmen anzusehen. Produktion ist in diesem Sinne eine Wertschöpfung; das Maß dieser Wertschöpfung ist definiert als Summe der durch Verkauf erzielten Einnahmen. - Im folgenden werden wir zwischen der Wertschöpfung als Akt und dem Maß bzw. der Höhe der Wertschöpfung verbal keinen expliziten Unterschied machen.

Ein großer Teil der im Produktionsprozeß erzielten Einnahmen wird zur Entlohnung der an diesem Prozeß beteiligten privaten Haushalte verwendet und stellt deren Einkommen aus unselbständiger Arbeit dar. Der bei den Unternehmern bleibende Rest ist das Einkommen aus Unternehmertätigkeit und wird in unserem vereinfachten Modell auch als Gewinn der Unternehmen bezeichnet. Die Summe des Einkommens aus unselbständiger Tätigkeit (Lohneinkommen) und aus Unternehmertätigkeit heißt das *Volkseinkommen*. Im Hinblick auf die Verträglichkeit dieser Begriffsbildung mit der volkswirtschaftlichen Literatur sei erwähnt, daß das Volkseinkommen in diesem Grobmodell wegen der Abwesenheit von Steuern wertmäßig mit dem *Nettosozialprodukt* zu Marktpreisen und dieses wegen der Abwesenheit von Abschreibungen mit dem *Bruttosozialprodukt* übereinstimmt.

In Abbildung 34.2 ist das gesamtwirtschaftliche Produktionskonto in schematischer Form dargestellt.

Gesamtwirtschaftliches Produktionskonto	
Ausgabenseite	Einnahmenseite
Y = Volkseinkommen (insbesondere Löhne, Gehälter, Gewinne)	C = Verkäufe von Konsumgütern I = Verkäufe von Investitionsgütern

Wertschöpfung

Abb. 34.2

Das Grundprinzip für unsere definitorische Beschreibung des Produktionskontos - wie auch später für die anderen Konten - ist, daß alles, was an Einnahmen auf der einen Seite des Kontos erzielt wird, auf der anderen Seite (hier als das Einkommen der Haushalte) wieder verteilt wird; in Kurzform:

$$\text{Einnahmen} = \text{Ausgaben}$$

oder allgemeiner:

$$\text{Zufluß} = \text{Abfluß} \tag{34.1}$$

Für das Produktionskonto folgt also unmittelbar die Gleichheit der Wertschöpfung (= Summe aus Konsumeinnahmen C und Einnahmen aus Verkauf von Investitionsgütern I) und Auszahlungen des Volkseinkommens Y:

$$Y = C + I \qquad (34.2)$$

b) Das gesamtwirtschaftliche Einkommenskonto

Die Ertragsseite des Einkommenskontos ist der Gegenposten zur Verwendungsseite des Produktionskontos. Das Volkseinkommen Y wird also voll auf dieser Seite verbucht. Das Einkommen kann zunächst einmal zum Zwecke des Konsums verwendet werden. Den nicht konsumierten Teil des Einkommens nennt man Ersparnis. Der Vorgang des Sparens ist also terminologisch identisch mit Konsumverzicht. (Entgegen einer nicht selten anzutreffenden Meinung ist jedoch das alleinige Anlegen von Bargeld - etwa in Form von Wertpapieren - kein Sparen, sondern stellt nur einen gegenseitigen Austausch von Forderungen dar.)

In Abbildung 34.3 ist das gesamtwirtschaftliche Einkommenskonto schematisch dargestellt.

Gesamtwirtschaftliches Einkommenskonto	
Ausgabenseite	Einnahmenseite
C = Konsumausgaben	Y = Volkseinkommen
S = Ersparnis	

Abb. 34.3

Auch bei der Beschreibung dieses Kontos wurden die Begriffe - insbesondere der des Sparens - so festgelegt, daß das Gesetz "Zufluß = = Abfluß" gültig ist. In Kurzform lautet die Gleichheit des Volkseinkommens Y und der Summe aus Konsum C und Ersparnis S:

$$Y = C + S \qquad (34.3)$$

Aus (34.2) und (34.3) folgt nun insbesondere

$$I = S \quad \text{(Keynes-Identität)} \qquad (34.4)$$

Investitionen und Ersparnis stimmen also für geschlossene Volkswirtschaften in jeder Periode wertmäßig überein.

c) Das gesamtwirtschaftliche Vermögensänderungskonto

Sparen bewirkt eine Vermögenserhöhung. Auf der Ertragsseite des Vermögensänderungskontos steht also die Ersparnis S von privaten Haushalten und Unternehmen. Es kann aber auch vorkommen, daß das Einkommen Y in einer bestimmten Periode unter den Konsumausgaben C liegt. Dies ist etwa beim verstärkten Konsumieren von Lagerbeständen aus den Vorjahren der Fall. Dann ist die "Ersparnis" S = Y - C in dieser Periode negativ und stellt somit eine Vermögensminderung dar. Auf der Verwendungsseite des Vermögensänderungskontos stehen die Ausgaben, die zum Kauf von Investitionsgütern notwendig sind. Die mit dem Kauf von Investitionsgütern gekoppelte Verschiebung im Bereich der individuellen Sachvermögen - etwa, wenn Anlagen den Besitzer wechseln - heben sich bei der gesamtwirtschaftlichen Betrachtungsweise auf. Die Anlage, die der eine Unternehmer abgibt, erhält der andere; insgesamt fallen aber diese dasselbe Konto betreffenden Buchungen heraus.

In vereinfachter Sicht der Dinge läßt sich die Wechselbeziehung zwischen Ersparnis und Investition so darstellen, daß die Güter, die auf Grund der Ersparnis nicht konsumiert werden, im Unternehmenssektor bleiben und dort eine Investition darstellen. Je nachdem, ob dieser Effekt von den Unternehmen geplant war oder nicht, spricht man von geplanten oder ungeplanten Investitionen; Entsprechendes gilt auch im Hinblick auf die Ersparnis für die Haushalte.

Diese Überlegungen geben der zunächst rein formal abgeleiteten Wertgleichheit von Investitionen und Ersparnis - der Keynes-Identität (34.4) - nachträglich einen inhaltlichen Sinn. Wenn also auf der Ertragsseite des Vermögensänderungskontos nur die Ersparnis verzeichnet ist, kann auf der Verwendungsseite nur die Investition auftreten. Schematisch ist das gesamtwirtschaftliche Vermögensänderungskonto in Abbildung 34.4 dargestellt.

Gesamtwirtschaftliches Vermögensänderungskonto	
Ausgabenseite	Einnahmenseite
I = Ausgaben für den Kauf von Investitionsgütern (= Warenwert der produzierten, aber nicht für den Konsum verkauften Güter)	S = Ersparnis (= nicht für Konsumzwecke verwendetes Einkommen)

Abb. 34.4

Um keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen, weisen wir abschließend ausdrücklich darauf hin, daß das Vermögensänderungskonto die *Stromgrößen* "Ersparnis in der Periode ..." bzw. "Investitionen in der Periode ..." enthält. Es ist insbesondere nicht zu verwechseln mit einem denkbaren "Vermögenskonto", auf dem die Vermögens*bestände* verzeichnet sind.

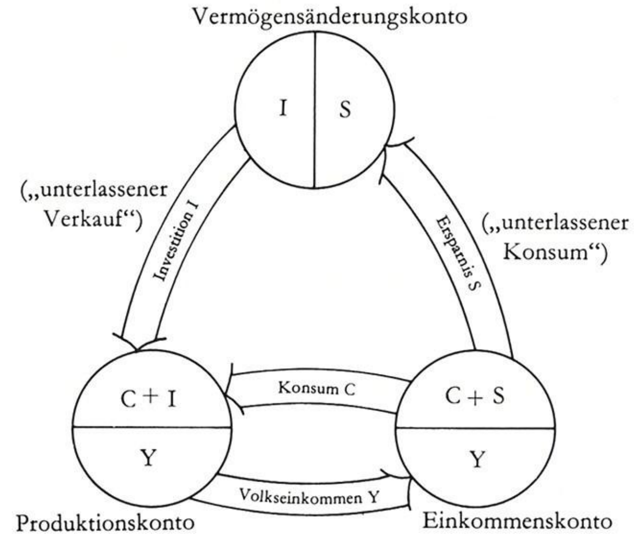


Abb. 34.5

Die graphische Darstellung dieses einfachen Kontensystems in Form eines Kreislaufs in Abbildung 34.5 bringt den dynamischen Charakter dieses Wirtschaftsprozesses besonders deutlich zum Ausdruck.

[34.2] Der Begriff der autonomen und der induzierten Investitionen

Bei vielen wirtschaftlichen Modellen erweist es sich zum Zwecke der besseren Analysemöglichkeit als angebracht, die Investitionen in zwei sachlogisch getrennte Bestandteile zu zerlegen:

a) Die autonomen Investitionen A

Damit sind Investitionen gemeint, die nicht durch die Größe und das Wachstum des Volkseinkommens beeinflußt sind. Häufig ist dies näherungsweise bei Staatsinvestitionen der Fall. Mathematisch ausgedrückt, sind die autonomen Investitionen keine Funktion des Volkseinkommens Y.

b) Die induzierten Investitionen J

Dieser Teil der Investitionen sei eine Funktion f des Volkseinkommens Y:

$$J = f(Y)$$

Im Rahmen der volkswirtschaftlichen Modellbildung wird diese Abhängigkeit meist in der einfachst möglichen noch sinnvollen Weise, nämlich als Proportionalität postuliert:

$$J = a \cdot Y \tag{34.5}$$

Der Koeffizient a ist eine reelle Konstante. Es gilt also für die Gesamtinvestition I:

$$I = A + J \tag{34.6}$$

Dem zeitlichen Verlauf des Wirtschaftsprozesses wurde bisher noch nicht in expliziter Weise Rechnung getragen. Die Ermittlung der volkswirtschaftlichen Aggregatgrößen C, I, S, A, J bezieht sich in der Praxis immer auf feste Zeitperioden (Berichtsperioden), wobei man meist von Jahresperioden ausgeht. Die Tatsache, daß die in Rede stehenden Größen für die Periode $[k, k+1)$ ermittelt worden sind, sei durch ihre Indizierung mit dem Index k angedeutet. Die Grundgleichungen des Volkseinkommens lauten somit, von der Warenverwendung her gesehen (siehe Produktionskonto)

$$Y_k = C_k + I_k \qquad \text{(für alle } k\text{)} \tag{34.7}$$

und von der Einkommensverwendung (siehe Einkommenskonto) aus gesehen:

$$Y_k = C_k + S_k \qquad \text{(für alle } k\text{)} \tag{34.8}$$

In jeder Periode sind insbesondere Ersparnisse und Investitionen gleich:

$$I_k = S_k$$

Bei Aufteilung der Investitionen in autonome und induzierte Investitionen geht (34.7) in die Gleichung

$$Y_k = C_k + A_k + J_k \tag{34.9}$$

über.

[34.3] Bemerkungen zur "ex-post"-Gleichheit von Investition und Ersparnis und zu den Beschränkungen des begrifflichen Rahmens

Die Gleichheit von Investitionen und Ersparnis im Wirtschaftsprozeß stellt zweifellos eine gewisse Erkenntnis dar. Allerdings ist es eine prinzipiell andere Art der Erkenntnis, als sie beispielsweise in der Physik in dem von Galilei formulierten Fallgesetz zutage tritt. Letzteres ist eine aus der Beobachtung der Natur auf empirischer Basis durch unvollständige Induktion gewonnene Erkenntnis. Dagegen beruht die obige Ableitung der Gleichung "I = S" überhaupt nicht auf der Beobachtung wirtschaftlicher Prozesse; sie ergibt sich allein daraus, wie wir die Begriffe definiert haben. Nur weil wir das Volkseinkommen als Summe von Konsum und Investitionen bzw. die Ersparnis als Differenz aus Volkseinkommen und Konsum definiert haben, können wir auf die Gleichheit von Investition und Ersparnis schließen. Die Gleichheit von Investition und Ersparnis ergibt sich also insbesondere nicht aus den einer Berichtsperiode zugrundeliegenden Planungen, sondern erst nachträglich durch geeignetes "Einsortieren" der wirtschaftlichen Vorgänge in die hier gewählten begrifflichen Kategorien. Man bezeichnet demgemäß (34.4) im wirtschaftlichen Bereich auch als eine "ex-post"-Gleichheit. Erkenntnistheoretisch gesehen ist die Gleichheit von Investition und Ersparnis also von derselben Art wie die Aussage, daß alle Kinder von Junggesellinnen unehelich sind. Sie ergibt sich rein aus dem begrifflichen Rahmen und den logischen Schlußregeln. Wen das beunruhigt, der sei darauf hingewiesen, daß schließlich die ganze Mathematik erkenntnistheoretisch von dieser Art ist. Allerdings sind ihre Aussagen und ihre logischen Ableitungen erheblich komplexer und begrifflich tiefschichtiger, als es in den obigen beiden Beispielen der Fall ist.

Die eingangs gegebenen Definitionen der volkswirtschaftlichen Grundbegriffe sind also absolut willkürlich, aber das sind Definitionen immer. Die Rechtfertigung eines die Realität beschreibenden Begriffssystems, das heißt eines Modells, ergibt sich letztlich nur aus der "Brauchbarkeit" dieses Modells im weitesten Sinne. Daß die hier verwendeten Begriffe eine gewisse Berechtigung besitzen, ergibt sich u. E. daraus, daß sie - sei es in dieser, sei es in einer unschwer zu bewerkstelligenden ausdifferenzierten Form - in den Wirtschaftswissenschaften durchaus üblich und gängig sind und auch im wirtschaftsstatistischen Bereich Anwendung finden.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu den Grenzen und Beschränkungen der eingangs gegebenen Beschreibung des Wirtschaftsprozesses. Die in diesem Paragraphen erarbeitete Beschreibung des Wirtschaftskreislaufs ist sehr grober Natur und enthält eine Fülle von vereinfachenden Annahmen. Im Hinblick auf reale Verhältnisse dürfte wohl die Ignorierung des Staates bzw. der öffentlichen Haushalte am gravierendsten sein. Damit entfallen alle Modellkomponenten, die das Steuerwesen (direkte und indirekte Steuern), die Subventionsthematik und den staatlichen Verbrauch betreffen. Der Staat übt sowohl Unternehmens- als auch Haushaltsfunktionen aus und muß in dieser Eigenschaft im oben beschriebenen Grobmodell je nach seiner Tätigkeit einer dieser beiden Sektionen zugeordnet werden.

Die radikale Funktionstrennung (produziert wird nur in den Unternehmen, konsumiert nur in den Haushalten) birgt die Gefahr in sich, daß die Begriffe Unternehmen und Haushalt ihrer alltagssprachlichen Bedeutung entkleidet werden. Tatsächlich ist bei der Entwicklung einer systematischen Terminologie gelegentlich eine gewisse präzisierende Modifizierung des alltagssprachlichen Wortgebrauchs notwendig, weil die Alltagssprache häufig nicht eindeutig und im notwendigen Maße konsequent ist.

Die Annahme, daß es sich um eine geschlossene Volkswirtschaft handle, ist für Staaten mit hohem Außenhandelsanteil natürlich gravierender als für Staaten, bei denen der Umfang des Binnenhandels den des Außenhandels weit übersteigt.

Der Begriff der geschlossenen Volkswirtschaft ist übrigens nicht zu verwechseln mit dem des geschlossenen Wirtschaftskreislaufs, der besagt, daß jedes einzelne der betrachteten Konten ausgeglichen sein soll, daß also für jedes einzelne der Konten die Bedingung "Zufluß = = Abfluß" erfüllt sein muß.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß das in der realen Wirtschaftspraxis auftretende Phänomen der Preisveränderungen für die Definition und Vergleichbarkeit von wirtschaftlichen Aggregatgrößen erhebliche Probleme aufwirft, deren Diskussion den hier gesteckten Rahmen jedoch sprengen würde.

§ 35 Modelle ohne induzierte Investitionen

Die nationalökonomische Grundgleichung (34.7) lautet in Abwesenheit induzierter Investitionen:

$$Y_k = C_k + A_k \tag{35.1}$$

Den Modellen dieses Paragraphen liegt stets die Hypothese zugrunde, daß der Konsum C_k in der Periode $[k, k+1)$ ein fester Bestandteil des Volkseinkommens Y_{k-1} der vorangegangenen Periode ist:

$$C_k = a \cdot Y_{k-1} \tag{35.2}$$

Wirtschaftlich sinnvoll ist für den Koeffizienten a der Bereich

$$0 < a < 1.$$

Gleichung (35.1) geht über in

$$Y_{k+1} - a \cdot Y_k = A_{k+1}. \tag{35.3}$$

Da die Investitionen A_{k+1} autonomer Natur sind, also durch Definition nicht von Y_k abhängen, stellt (35.3) eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit Inhomogenität $b_k := A_{k+1}$ dar. Die weitere Diskussion der hier behandelten Modelle vollzieht sich anhand unterschiedlicher Vorgaben für die Funktion A_k der autonomen Investitionen.

[35.1] Einmaliger Investitionsstoß

Zum Zeitpunkt $k = 0$ finde ein Investitionsstoß A_0 statt; für $k \geq 1$ sei $A_k = 0$. Dann ist

$$Y_0 = C_0 + A_0$$

$$Y_1 = C_1 = a \cdot Y_0$$

$$Y_{k+1} = C_{k+1} = a \cdot Y_k = a^k \cdot Y_0 \tag{35.4}$$

Die Werte des Volkseinkommens bilden dann also eine geometrische Folge.

Aufgabe 35.1

Stellen Sie das Volkseinkommen Y_k bei der folgenden Investitionssituation dar:

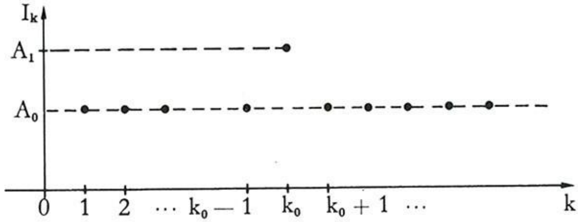


Abb. 35.1

Das heißt: $I_k = A_0$ = konstant für $k \neq k_0$,

$$I_{k_0} = A_1 > A_0.$$

[35.2] Arithmetisch steigende Investitionen

Die autonomen Investitionen werden in jeder Periode um einen festen Betrag B erhöht $(B \geq 0)$: Es sei also

$$A_{k+1} = A_k + B = A_0 + (k+1) \cdot B. \tag{35.5}$$

Die volkswirtschaftliche Grundgleichung

$$Y_{k+1} - a \cdot Y_k = A_0 + (k+1) \cdot B \tag{35.6}$$

ist dann eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit linearer, im Falle $B = 0$ mit konstanter Inhomogenität.

Die zugehörige homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$Y_k = r \cdot a^k. \tag{35.7}$$

Dabei ist r eine reelle Konstante. Eine spezielle Versuchslösung der inhomogenen Gleichung hat nach Tabelle 18.1 die Form

$$Y_k^* = u + v \cdot k. \tag{35.8}$$

Die unbestimmten Koeffizienten u und v sind dadurch festgelegt, daß Y_k^* die Gleichung (35.6) zu erfüllen hat. Dies ergibt:

$$u + v \cdot (k+1) - a \cdot u - a \cdot v \cdot k = A_0 + (k+1) \cdot B$$

Der Vergleich der Koeffizienten von k^1 und k^0 ergibt:

$$v - a \cdot v = B$$

$$u + v - a \cdot u = A_0 + B$$

Für $a \neq 1$ ist also

$$v = \frac{B}{1-a} \qquad u = \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2}$$

$$Y_k^* = \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2} + \frac{B}{1-a} \cdot k \tag{35.9}$$

Aufgabe 35.2

Überprüfen Sie durch direktes Einsetzen, daß (35.9) eine spezielle Lösung von (35.6) ist.

Die allgemeine Lösung von (35.6) lautet also:

$$Y_k = r \cdot a^k + \frac{B}{1-a} \cdot k + \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2} \qquad (35.10)$$

Bei Vorgabe des Anfangswertes Y_0 wird die Konstante r festgelegt auf

$$r = Y_0 - \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2} .$$

Die entsprechende Lösungsfolge lautet dann:

$$Y_k = \left(Y_0 - \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2}\right) \cdot a^k + \frac{B}{1-a} \cdot k + \frac{A_0(1-a) - a \cdot B}{(1-a)^2} \qquad (35.11)$$

Hierin ist insbesondere mit $B = 0$ der Fall konstanter Investitionen (pro Periode) enthalten, bei dem sich (35.11) folgendermaßen vereinfacht:

$$Y_k = \left(Y_0 - \frac{A_0}{1-a}\right) \cdot a^k + \frac{A_0}{1-a} \qquad (35.12)$$

Für $k \longrightarrow \infty$ strebt das Volkseinkommen in diesem Fall der konstanten Lösung

$$Y_k^* = \frac{A_0}{1-a}$$

zu.

35.3 Geometrisch wachsende Investitionen

Für die autonomen Investitionen gelte

$$A_{k+1} = w \cdot A_k . \qquad (35.13)$$

In expliziter Form lautet A_k demzufolge:

$$A_k = w^k \cdot A_0 \qquad (35.14)$$

Die Grundgleichung (35.3) nimmt jetzt die Form

$$Y_{k+1} - a \cdot Y_k = w^{k+1} \cdot A_0 \qquad (35.15)$$

an. Die zugehörige homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung:

$$Y_k = C \cdot a^k \qquad (35.16)$$

Nach Tabelle 18.1 ist es sinnvoll, eine Versuchslösung der Form

$$Y_k^* = C' \cdot w^k \qquad (35.17)$$

zu suchen. Dies kann natürlich nur im Falle $w \neq a$ zum Erfolg führen, weil (35.17) sonst eine Lösung der homogenen Gleichung darstellt. Es sei also $w \neq a$. Durch Einsetzen der Lösung (35.17) in die zu erfüllende Gleichung (35.15) erhalten wir für $w \neq 0$:

$$C' = \frac{w \cdot A_0}{w - a}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (35.15) lautet also:

$$Y_k = C \cdot a^k + \frac{A_0}{w - a} \cdot w^{k+1} \tag{35.18}$$

Die durch den Anfangswert Y_0 bestimmte Lösung ist:

$$Y_k = \left(Y_0 - \frac{w \cdot A_0}{w - a}\right) \cdot a^k + \frac{A_0}{w - a} \cdot w^{k+1} \tag{35.19}$$

Sonderfall: $w = a$

Dies bedeutet wegen $0 < a < 1$, daß die Investitionen geometrisch fallen. Entsprechend der Vorgehensweise bei Mehrfachwurzeln ersetzen wir (35.17) durch die Versuchslösung

$$Y_k^* = C' \cdot k \cdot a^k. \tag{35.20}$$

In (35.15) eingesetzt, ergibt das mit $a \neq 0$:

$$C' \cdot (k + 1) \cdot a^{k+1} - a \cdot C' \cdot k \cdot a^k = a^{k+1} \cdot A_0$$

$$C' = A_0$$

Die allgemeine Lösung von (35.15) lautet also im Falle $a = w$:

$$Y_k = C \cdot a^k + A_0 \cdot k \cdot a^k \tag{35.21}$$

Die durch den Anfangswert Y_0 bestimmte Lösung ist in diesem Fall:

$$Y_k = Y_0 \cdot a^k + A_0 \cdot k \cdot a^k \tag{35.22}$$

In den bisher behandelten Fällen mit fehlenden induzierten Investitionen stellt sich das Interaktionsgefüge von autonomen Investitionen A, Volkseinkommen Y und Konsum C schematisch wie folgt dar.

$$A \longrightarrow Y \rightleftarrows C$$

Abb. 35.2

Liegen induzierte Investitionen J vor, so ist dieses Schema folgendermaßen zu erweitern:

$$\begin{tikzcd} & & C \\ A \arrow[r] & Y \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ & & J \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}$$

Abb. 35.3

§ 36 Modelle mit induzierten Investitionen

[36.1] Die Grundannahmen der Modelle von Samuelson, Harrod und Hicks

Nach wie vor gelte im folgenden die Hypothese, daß der Konsum C_k in der Periode $[k, k+1)$ proportional zum Volkseinkommen der Vorperiode sei:

$$C_k = a \cdot Y_{k-1} \tag{36.1}$$

Die Differenzierung der Modellbildung vollzieht sich anhand von Annahmen über die autonomen Investitionen A_k, von denen wir einige Versionen in § 35 kennengelernt haben, und anhand von Hypothesen über die Natur der induzierten Investitionen J_k. Die folgenden Modelle unterscheiden sich hinsichtlich der Annahmen, ob die induzierten Investitionen J_k vom Volkseinkommen oder nur vom Konsum abhängen und welche Perioden dabei eine Rolle spielen. Die funktionale Form der Abhängigkeit wird dabei stets als Proportionalität postuliert. Da der Konsum C_k seinerseits proportional zum Volkseinkommen der Vorperiode ist, bedeutet die Abhängigkeit der induzierten Investitionen vom Konsum mathematisch dasselbe wie eine Zeitverschiebung um eine Periode

a) Modell von Samuelson

$$J_k = b \cdot \Delta C_{k-1} = b \cdot (C_k - C_{k-1}) \tag{36.2}$$

$$A_k = A_0 = \text{konstant} \tag{36.3}$$

Die Grundgleichung (34.7) lautet somit bei Samuelson:

$$Y_k = a \cdot Y_{k-1} + A_0 + b \cdot (C_k - C_{k-1})$$

oder

$$Y_{k+2} - a \cdot (1+b) \cdot Y_{k+1} + a \cdot b \cdot Y_k = A_0 \tag{36.4}$$

b) Modell von Harrod

$$J_k = c \cdot \Delta Y_{k-1} = c \cdot (Y_k - Y_{k-1}) \tag{36.5}$$

$$A_k = 0 \tag{36.6}$$

Bei den Annahmen von Harrod geht (34.7) über in

$$Y_k = a \cdot Y_{k-1} + c \cdot (Y_k - Y_{k-1})$$

oder

$$(1-c) \cdot Y_{k+1} + (c-a) \cdot Y_k = 0 \tag{36.7}$$

c) Modell von Hicks

$$J_k = d \cdot \Delta Y_{k-2} = d \cdot (Y_{k-1} - Y_{k-2}) \tag{36.8}$$

$$A_k = A_0 \cdot w^k \tag{36.9}$$

Bei Hicks lautet die Grundgleichung somit

$$Y_k = a \cdot Y_{k-1} + A_0 \cdot w^k + d \cdot (Y_{k-1} - Y_{k-2})$$

oder

$$Y_{k+2} - (a+d)\cdot Y_{k+1} + d\cdot Y_k = A_0\cdot w^{k+2} \tag{36.10}$$

Der Grundgleichung nach stellen die Werte des Volkseinkommens im Modell von Harrod eine geometrische Folge dar.

Die homogenen Gleichungen nach Samuelson bzw. Hicks unterscheiden sich von der mathematischen Form her praktisch nicht, denn mit $d := ab$ geht der homogene Teil von (36.10) in den von (36.4) über. Umgekehrt kann, abgesehen vom wirtschaftlich sinnlosen Fall $a = 0$, stets b durch $\frac{d}{a}$ ersetzt werden.

Die Modelle von Hicks und von Samuelson unterscheiden sich also nur durch die den inhomogenen Bestandteil der jeweiligen linearen Differenzengleichungen ausmachenden autonomen Investitionen.

[36.2] Das Modell von Samuelson

Ein Blick zurück zeigt, daß die Grundgleichung (36.4) nach Samuelson in der mathematischen Form voll mit der Lagerhaltungsgleichung (32.9) übereinstimmt. Dabei ist in (32.9) nur I durch A_0 und b durch $b-1$ zu ersetzen. Wir können die dort gefundenen Lösungen also unmittelbar auf das Modell von Samuelson übertragen und erhalten das Ergebnis:

Satz 36.1

Das charakteristische Polynom

$$p(m) = m^2 - a\cdot(1+b)\cdot m + ab$$

der zum Modell von Samuelson gehörenden Gleichung (36.4) hat die Wurzeln

$$m_1 = \frac{a\cdot(1+b)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1+b)^2 - 4\,ab}$$

$$m_2 = \frac{a\cdot(1+b)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1+b)^2 - 4\,ab}\ .$$

Für $a \neq 1$ existiert die konstante Lösung von (36.4)

$$Y_k^* = \frac{A_0}{1-a}\ .$$

Sie ist im Falle $a < \frac{1}{b}$ stabil.

Die allgemeine Lösung von (36.4) lautet also im Falle $m_1 \neq m_2$:

$$Y_k = C\cdot m_1^k + C'\cdot m_2^k + \frac{A_0}{1-a} \tag{36.11}$$

Im Falle $m_1 = m_2 =: \tilde{m}$ ist die allgemeine Lösung

$$Y_k = C\cdot \tilde{m}^k + C'\cdot k\cdot \tilde{m}^k + \frac{A_0}{1-a} \tag{36.12}$$

Letzteres ist, bei verschwindender Diskriminante, der Fall für

$a = 0$ (wirtschaftlich nicht sinnvoll)

$$a = \frac{4\,b}{(1+b)^2} \tag{36.13}$$

Der "funktionale" Typ der Lösungsfolgen ist wesentlich durch die Dichotomien konvergent und divergent bzw. oszillierend und nicht oszillierend bestimmt. Nach Satz 36.1 treten diese Lösungstypen in den folgenden Fällen auf:

Fall 1: $a^2(1+b)^2 - 4ab < 0$

Dies ist für $a > 0$ gleichwertig zu $a < \frac{4b}{(1+b)^2}$. In diesem Fall sind die Wurzeln m_1 und m_2 komplex; die Lösungen sind dann nach § 33 oszillierend.

Fall 1.1: $a < \frac{1}{b}$

Die Lösungen verlaufen gedämpft oszillierend.

Fall 1.2: $a > \frac{1}{b}$

Die Lösungen verlaufen divergent oszillierend.

Fall 2: $a > \frac{4b}{(1+b)^2}$

Die Wurzeln m_1 und m_2 sind reell.

Fall 2.1: $a < \frac{1}{b}$

Die Lösungsfolgen konvergieren nicht oszillierend.

Fall 2.2 $a > \frac{1}{b}$

Die Lösungsfolgen divergieren nicht oszillierend.

In Abbildung 36.1 sind diese Fallunterscheidungen in übersichtlicher Form zusammengefaßt.

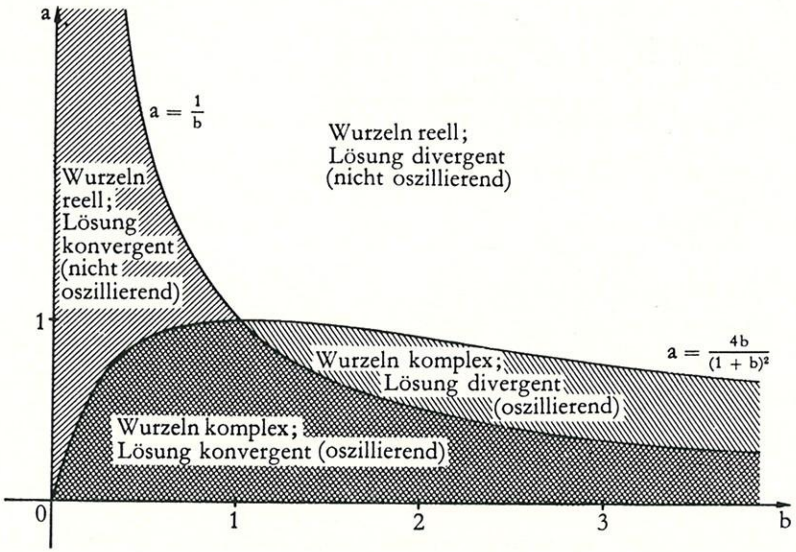


Abb. 36.1

Aufgabe 36.1

Zeigen Sie: Für $b > 1$ ist

$$\frac{4\,b}{(1+b)^2} > \frac{1}{b}\,.$$

Ziehen Sie daraus Folgerungen für Abbildung 36.1

Aufgabe 36.2

Suchen Sie eine spezielle Lösung Y_k^* der Gleichung (36.4) für den Fall, daß $a = 1$ ist (wenn also keine konstante Lösung existiert).

[36.3] Das Modell von Hicks

Der homogene Teil der Grundgleichung (36.10)

$$Y_{k+2} - (a+d)\cdot Y_{k+1} + d\cdot Y_k = A_0\cdot w^{k+2} \tag{36.14}$$

stimmt der Form nach mit dem des Modells von Samuelson überein und hat demnach die allgemeine Lösung:

a) Im Falle verschiedener Wurzeln des charakteristischen Polynoms:

$$Y_k = C\cdot m_1^k + C'\cdot m_2^k \tag{36.15}$$

mit

$$m_1 = \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4\,d}$$

$$m_2 = \frac{a+d}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4\,d}\,.$$

b) Im Falle $m_1 = m_2 = \tilde{m}$:

$$Y_k = C\cdot\tilde{m}^k + C'\cdot k\cdot\tilde{m}^k \tag{36.16}$$

Diese Lösungen der homogenen Gleichung konvergieren nach Satz 36.1 wegen $b = \frac{d}{a}$ gegen Null, wenn $d < 1$ ist.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist nach Tabelle 18.1 in der Form

$$Y_k^* = C^*\cdot w^k$$

zu suchen. Der unbestimmte Koeffizient C^* ergibt sich durch Einsetzen in (36.14)

$$C^*\cdot w^{k+2} - (a+d)\cdot C^*\cdot w^{k+1} + d\cdot C^*\cdot w^k = A_0\cdot w^{k+2}$$

im Falle $w^2 - (a+d)\cdot w + d \neq 0$ (d. h. $w \neq m_1$ und $w \neq m_2$) zu

$$C^* = \frac{A_0\cdot w^2}{w^2 - (a+d)\cdot w + d}\,.$$

Die spezielle Lösung

$$Y_k^* = \frac{A_0}{w^2 - (a+d)\cdot w + d}\cdot w^{k+2} \tag{36.17}$$

ergibt dann im Zusammenhang mit (36.15) bzw. (36.16) jeweils die allgemeine Lösung der Grundgleichung (36.14).

Der Typ der Lösungsfolgen (36.15) bzw. (36.16) ist in Abhängigkeit von den Koeffizienten a und d im folgenden Schema gekennzeichnet. Die Diskussion erfolgt wie im Abschnitt [36.2].

	$(a + d)^2 \geqq 4d$	$(a + d)^2 < 4d$
$d < 1$	Wurzeln reell; Lösung konvergent	Wurzeln komplex; Lösung oszillierend und konvergent
$d > 1$	Wurzeln reell; Lösung divergent	Wurzeln komplex; Lösung oszillierend und divergent

Tab. 36.1

Im (d, a)-Diagramm stellen sich die entsprechenden Bereiche wie folgt dar:

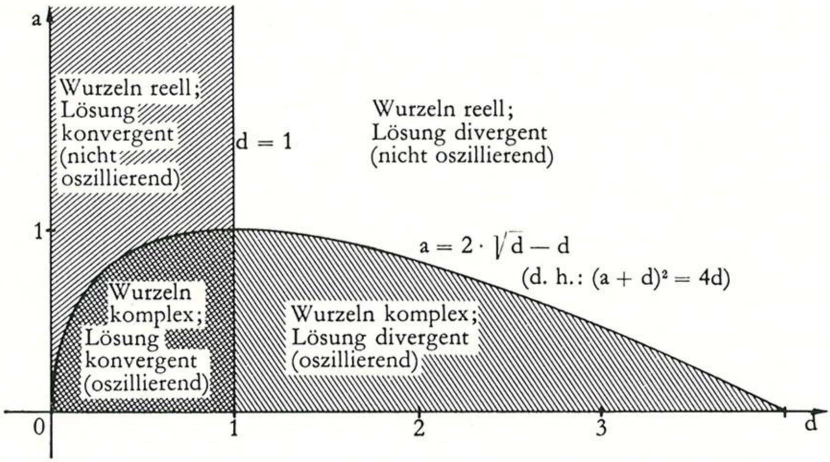


Abb. 36.2

Aufgabe 36.3

Beschreiben Sie den Typ der Lösungsfolgen für solche Parameterwerte a, b und d, für die (b, a) in Abbildung 36.1 bzw. (d, a) in Abbildung 36.2 auf einem der Kurvenstücke liegt.

Aufgabe 36.4

Führen Sie mit verschiedenen Koeffizienten Programmläufe anhand des Universalprogrammes aus Aufgabe 18.7 durch, bei denen Sie Anfangswerte Y_0 und Y_1 entsprechend den Modellen von Samuelson und Hicks "hochrechnen". Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 36.5

Modifizieren und verallgemeinern Sie die Modelle von Hicks und Samuelson durch

a) Betrachtung allgemeinerer Inhomogenitätsfunktionen (autonome Investitionen linear, polynomial, trigonometrisch, vom gemischten Typ);

b) Berücksichtigung mehrerer Vorperioden bei der Darstellung der induzierten Investitionen:

$$J_k = J_k(Y_k, Y_{k-1}, Y_{k-2}, \dots, Y_{k-r}).$$

Führen Sie die Diskussion auf empirischer Basis ("Hochrechnen" von festen Anfangswerten aus) und anhand geschlossener Lösungen durch.

VIII ANWENDUNGEN IN DER PHYSIK

Eine der wichtigsten Aufgaben der Physik besteht darin, physikalische Prozesse quantitativ zu beschreiben und ihren zeitlichen Verlauf aus der Kenntnis der äußeren Bedingungen, unter denen sie ablaufen, vorherzusagen. Typische Beispiele dafür sind die Bewegung eines Himmelskörpers unter dem Einfluß der Gravitationskräfte einer vorgegebenen Massenverteilung oder der zeitliche Verlauf von Spannung und Stromstärke in einem elektrischen Schwingkreis, dessen ohmscher Widerstand, Kapazität und Induktivität bekannt sind.

Solche Beschreibungen werden meistens mit Hilfe von Funktionen durchgeführt, die für jeden Zeitpunkt den Wert der interessierenden physikalischen Größen angeben. Diese Vorgehensweise unterstellt, daß physikalische Größen zu jedem beliebigen Zeitpunkt gemessen werden können, was in Wirklichkeit offensichtlich nicht zu realisieren ist. In der Praxis sind Messungen nur zu relativ wenigen, bestimmten Zeitpunkten möglich, so daß man aus den Messungen lediglich diskrete Folgen und keine kontinuierlichen Funktionen aufstellen kann. Die übliche Vorgehensweise ist dann, kontinuierliche Funktionen zu suchen, deren Einschränkungen auf diskrete Zeitpunkte möglichst gut mit den aufgenommenen Meßreihen übereinstimmen.

Häufig kennt man Zusammenhänge zwischen den Werten einer physikalischen Größe zu verschiedenen, meist aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. In diesem Fall eignen sich Differenzengleichungen zur Beschreibung des Problems. Die Lösung der Differenzengleichung ist eine Folge, die den zeitlichen Verlauf der betrachteten Größe beschreibt. Verkleinert man die Zeitspanne zwischen zwei Zeitpunkten immer weiter, so nähert sich die Folge im allgemeinen einer kontinuierlichen Funktion an.

Wie Folgen und Differenzengleichungen zur Beschreibung und Vorhersage von physikalischen Prozessen verwendet werden können, soll im folgenden an einigen wenigen ausgewählten Beispielen demonstriert werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Mechanik, der Lehre von Kraft und Bewegung.

§ 37 Beschreibung von Bewegungen

[37.1] Registrierung von Bewegungen

Für die Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes auf einer geraden Linie wählt man sich ein Bezugssystem (zeitlich und örtlich) sowie den Abstand Δt der Zeitpunkte, zu denen die Position des Massenpunktes registriert werden soll. Der Bewegungsablauf ist dann beschrieben, wenn man eine Folge (s_k) findet, bei der das Folgenglied $s_k = s_t$ die Position des betrachteten Punktes zum Zeitpunkt $t = k \cdot \Delta t$ angibt. Für die experimentelle Ermittlung von (s_k) - selbstverständlich erhält man nur endlich viele Folgenglieder - stehen im Schulunterricht zwei relativ einfache Methoden zur Verfügung: stroboskopische Aufnahmen und das Staubfigurenverfahren (von der Firma Kröncke entwickelt).

Bei der ersten Methode wird der Körper, dessen Bewegung registriert werden soll, in einem verdunkelten Raum durch ein Stroboskop - eine Art Blitzgerät - in regelmäßigen Abständen beleuchtet. Dabei sind 1000 Blitze pro Sekunde ohne weiteres möglich. Fotografiert man diesen Vorgang mit dauernd geöffnetem Kameraverschluß, so sind auf dem Bild die Positionen des Körpers zu den Zeitpunkten sichtbar, an denen ein Blitz erfolgte. Abbildung 37.1 zeigt die stroboskopische Aufnahme der Bewegung einer Kugel auf einer waagerechten Ebene, und Tabelle 37.1 bringt ihre Auswertung.

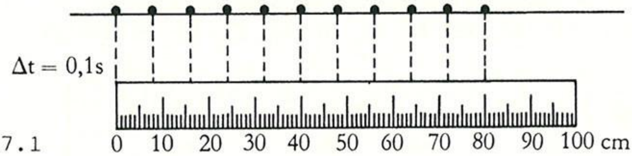


Abb. 37.1

k	$t = k \cdot \Delta t$ in s	s_k bzw. s_t in m
0	0	0
1	0,1	0,08
2	0,2	0,16
3	0,3	0,24
4	0,4	0,32
5	0,5	0,40
6	0,6	0,48
7	0,7	0,56
8	0,8	0,64
9	0,9	0,72
10	1	0,80

Tab. 37.1

Beim Staubfigurenverfahren wird die Bewegung eines Wagens auf einer Bahn registriert. Dazu werden ein mit Schwefelpulver bestreuter Isolierstreifen in der Mitte der Bahn und der Wagen über einen hohen Schutzwiderstand an die Netzspannung gelegt. Der Wagen hat über einen Schleifer Kontakt mit dem Isolierstreifen (vgl. Abbildung 37.2).

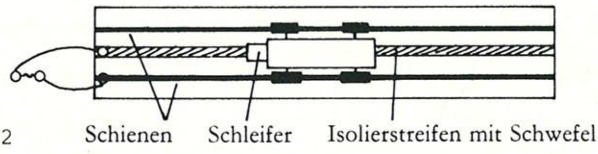


Abb. 37.2

Je nach Polarität der Spannung werden die Schwefelteilchen vom Schleifer angezogen oder abgestoßen. Da die Frequenz der Netzspannung 50 Hz beträgt, erhält man in jeweils $\frac{1}{50}$ Sekunde eine Verdichtung und eine Verdünnung des Schwefelpulvers. Die Position des Wagens läßt sich so in Zeitabständen von 0,02 s registrieren. Eine genauere Beschreibung mit ausführlichen Versuchsanleitungen findet man im Begleitheft zum Experimentiergerät der Firma Kröncke.

Abbildung 37.3 zeigt einen Ausschnitt der Aufnahme, Tabelle 37.2 bringt die Auswertung der Bewegung auf einer schiefen Ebene.

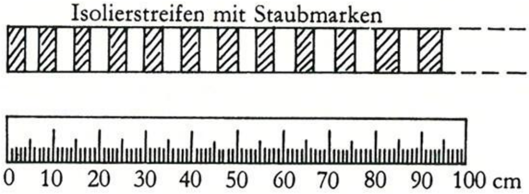


Abb. 37.3

k	$t = k \cdot \Delta t$ in s	s_k bzw. s_t in m
0	0	0
1	0,02	7,1
2	0,04	14,4
3	0,06	21,9
4	0,08	29,6
5	0,10	37,5
6	0,12	45,6
7	0,14	53,9
8	0,16	62,4
9	0,18	71,1
10	0,20	80,0
11	0,22	89,1

Tab. 37.2

[37.2] Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Der einfachste Typ von Bewegungen ist der, bei dem ein Körper in gleich langen Zeitabschnitten gleiche Strecken zurücklegt (vgl. Abb. 37.1 und Tab. 37.1). Für die diese Bewegung beschreibende Folge (s_k) gilt:

$$s_{k+1} - s_k = \Delta s_k = \text{konstant} \tag{37.1}$$

Beim Übergang zur Zeitvariablen t ist zu beachten, daß der absolute Zuwachs der zurückgelegten Strecke von der Dauer Δt eines Zeitintervalls abhängt. Gleichung (37.1) läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\Delta s_t = s_{t+\Delta t} - s_t = v \cdot \Delta t \tag{37.2}$$

Die Konstante v (engl.: velocity) nennt man die *Geschwindigkeit*, mit der sich der Körper bewegt. Für sie gilt:

$$v = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \frac{\Delta s_t}{\Delta t} \tag{37.3}$$

Legt der Körper in gleichen Zeitabschnitten verschieden große Strecken zurück, so nennt man den jetzt nicht mehr konstanten Quotienten

$$v_t = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \frac{\Delta s_t}{\Delta t} \qquad (37.4)$$

die *mittlere Geschwindigkeit* (Intervall-, Durchschnittsgeschwindigkeit) im Zeitintervall $[t, t+\Delta t)$ bzw. $[k\cdot\Delta t, (k+1)\cdot\Delta t)$. Hält man einen bestimmten Zeitpunkt t fest und verkleinert Δt immer weiter, so wird auch Δs_t beliebig klein, aber der Quotient $\frac{\Delta s_t}{\Delta t}$ nähert sich bei fast allen physikalischen Bewegungen einem festen Wert. Diesen Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta s_t}{\Delta t}$ bezeichnet man als die *Momentangeschwindigkeit* v(t) zum Zeitpunkt t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

Kennt man bei einer gleichförmigen Bewegung (v = konstant) die Geschwindigkeit v und die Anfangsposition s_0, so läßt sich daraus die Position des Körpers zum Zeitpunkt $t = k\cdot\Delta t$ berechnen. Wegen (37.2) ist (s_k) bzw. (s_t) eine arithmetische Folge, und nach Aufgabe 1.10 gilt:

$$s_k = s_0 + k\cdot v\cdot\Delta t$$

bzw.

$$s_t = s_0 + v\cdot t \qquad (37.5)$$

Die Vorhersage der Position des Körpers hängt nicht davon ab, wie groß die Zeitspanne Δt gewählt wird. Setzt man also die so erhaltene Folge zu einer kontinuierlichen Funktion fort, so erhält man

$$s(t) = s_0 + v\cdot t \qquad (\text{für } t\in\mathbb{R}). \qquad (37.6)$$

Aufgabe 37.1

a) Geben Sie eine Funktion an, die die in Abbildung 37.1 registrierte Bewegung beschreibt.

b) Wo würde sich die Kugel nach 2,5 Sekunden befinden?

c) Wie lange würde sie benötigen, um 1 Meter zurückzulegen?

[37.3] Bewegungen mit nichtkonstanter Geschwindigkeit

In Abbildung 37.3 und Tabelle 37.2 ist eine Bewegung aufgezeichnet, bei der die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Man findet jedoch sehr schnell, daß die Folge der Differenzen (Δs_t) eine arithmetische Folge bildet; (s_t) ist also eine Folge mit konstanten zweiten Differenzen. Dividiert man die Folge der ersten Differenzen durch Δt, so erhält man die Folge (v_t) der mittleren Geschwindigkeiten:

$$v_t = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

Die durch Δt dividierte Folge der Differenzen von (v_t) gibt die jeweilige Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit an. Man nennt sie die Folge der *mittleren Beschleunigungen* (a_t) (engl.: acceleration). Für sie gilt:

$$a_t = \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \frac{\frac{s_{t+2\Delta t} - s_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{s_{t+2\Delta t} - 2s_{t+\Delta t} + s_t}{(\Delta t)^2} \tag{37.7}$$

Die in Abbildung 37.3 und Tabelle 37.2 registrierte Bewegung ist also eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a, eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung. Kennt man die konstante Beschleunigung a, mit der sich ein Körper bewegt, sowie seine Anfangsposition und seine Anfangsgeschwindigkeit, so läßt sich die Geschwindigkeitsfolge (v_t) und die Folge (s_t) der Positionen berechnen. Nach (37.7) gilt:

$$a_k = a = \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$$

$$v_{k+1} - v_k = a \cdot \Delta t$$

Wegen Aufgabe 1.10 folgt:

$$v_k = v_0 + k \cdot a \cdot \Delta t$$

bzw.

$$v_t = v_0 + a \cdot t \tag{37.8}$$

Da die Folge der zweiten Differenzen von (s_k) den konstanten Wert $a \cdot (\Delta t)^2$ hat, erhält man aus Abschnitt [5.2] mit leichten Umrechnungen:

$$s_k = s_0 + k \cdot (s_1 - s_0) + \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$$

Einsetzen von $v_0 \cdot \Delta t$ für $s_1 - s_0$ ergibt:

$$s_k = s_0 + k \cdot v_0 \cdot \Delta t + \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$$

$$s_k = s_0 + v_0 \cdot k \cdot \Delta t + \frac{a}{2} k^2 (\Delta t)^2 - \frac{a}{2} \cdot k \cdot (\Delta t)^2 \tag{37.9}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch durch folgende Überlegungen:

$$s_{k+1} - s_k = v_k \cdot \Delta t$$

$$s_{k+1} - s_k = (v_0 + k \cdot a \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t + k \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \tag{37.10}$$

Die Gleichung (37.10) ist eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit polynomialer Inhomogenität. Nach Abschnitt [18.4] hat sie eine Lösung der Form

$$s_k = \alpha + \beta \cdot k + \gamma \cdot k^2 \tag{37.11}$$

Einsetzen in (37.10) und Koeffizientenvergleich liefert die Lösung (37.9).

Aufgabe 37.2

Setzen Sie (37.11) in (37.10) ein und führen Sie den Koeffizientenvergleich durch.

Ersetzt man in (37.9) $k\cdot\Delta t$ durch t, so erhält man:

$$s_t = s_0 + v_0\cdot t + \frac{a}{2}t^2 - \frac{a}{2}\,t\cdot\Delta t \tag{37.12}$$

Um die Bewegung exakt vorhersagen zu können, müssen die Anfangsposition s_0 und die mittlere Geschwindigkeit im ersten Zeitintervall v_0 bekannt sein. Wegen $v_0 = \frac{s_1 - s_0}{\Delta t}$ genügt auch die Kenntnis der beiden Anfangspositionen s_0 und s_1. Sowohl v_0 als auch s_1 sind bei kleinem Δt experimentell nur ungenau bestimmbare Größen. Häufig ist jedoch die Momentangeschwindigkeit $v(0)$ zu Beginn der Bewegung ($t = 0$) bekannt. Zum Beispiel ist bei Beschleunigung aus der Ruhe heraus $v(0) = 0$. Um zu einem Weg-Zeit-Gesetz anhand von Momentangeschwindigkeiten zu kommen, muß man den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ durchführen. Man erhält so aus (37.12) die kontinuierliche Ortsfunktion

$$s(t) = s(0) + v(0)\cdot t + \frac{a}{2}t^2 \tag{37.13}$$

Dabei ist $v(0)$ die Momentangeschwindigkeit, $s(0)$ die Position des Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$. Wir fassen zusammen:

Satz 37.1

> Für die Bewegung eines Körpers auf einer geraden Linie gelten die folgenden Gesetze:
>
> a) bei konstanter Geschwindigkeit v:
>
> Position: $s(t) = s(0) + v\cdot t$
>
> b) bei konstanter Beschleunigung a:
>
> Geschwindigkeit: $v(t) = v(0) + a\cdot t$
>
> Position: $s(t) = s(0) + v(0)\cdot t + \frac{a}{2}t^2$

Aufgabe 37.3

Zeigen Sie: Bei einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung a ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t gleich der mittleren Geschwindigkeit im Zeitintervall von $t - \Delta t$ bis $t + \Delta t$.

Aufgabe 37.4

Die in Abbildung 37.3 und Tabelle 37.2 ausschnittsweise registrierte Bewegung sei aus der Ruhe mit konstanter Beschleunigung erfolgt.

a) Bestimmen Sie die Beschleunigung a und die Geschwindigkeit $v(0)$ zu Beginn der Aufzeichnung. Beachten Sie dabei Aufgabe 37.3.

b) Geben Sie die Orts- und die Geschwindigkeitsfunktion der in Abbildung 37.3 aufgezeichneten Bewegung an.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt und den Ort, an dem die Bewegung aus der Ruhe heraus gestartet wurde.

d) Geben Sie eine Orts- und eine Geschwindigkeitsfunktion an, so daß $s(0) = 0$ und $v(0) = 0$ ist.

Ist eine beliebige Beschleunigungsfunktion (a_t) vorgegeben, so lassen sich aus den Gleichungen (37.7) und (37.4) bei Kenntnis der entsprechenden Anfangswerte die Folge der Durchschnittsgeschwindigkeiten (v_t) und die Folge der Positionen (s_t) berechnen. Je komplizierter (a_t) ist, desto aufwendiger wird die Berechnung von (v_t) und (s_t). Die Gleichungen

$$v_{t+\Delta t} - v_t = \Delta t \cdot a_t \quad \text{und}$$

$$s_{t+\Delta t} - s_t = \Delta t \cdot v_t \tag{37.14}$$

zeigen, daß diese Berechnungen jedoch völlig analog zur Behandlung von Summierungsproblemen verlaufen; vgl. Gleichung (20.1). Die Ergebnisse aus § 20 und § 21 lassen sich also unmittelbar auf die Ermittlung von (v_t) und (s_t) aus (a_t) übertragen. Satz 20.1 besagt beispielsweise in diesem Zusammenhang: Läßt sich die Folge der mittleren Beschleunigungen (a_t) als Polynom r-ten Grades darstellen, so ist die Folge der mittleren Geschwindigkeiten (v_t) ein Polynom vom Grade $r+1$ und die Folge der Positionen (s_t) ein Polynom $(r+2)$-ten Grades.

Aufgabe 37.5

Die Geschwindigkeit eines Körpers ändere sich periodisch:

$$v(t) = \sin \omega \cdot t; \qquad \omega \in \mathbb{R}^+$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ortsfunktion $s(t)$ mit $s(0) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus § 21, Beispiel 2.

Ist (a_t) eine empirisch gegebene Folge, die nicht durch einen Term darstellbar ist, wie z. B. bei einer Autofahrt, so können (v_t) und (s_t) nur rekursiv nach (37.14) berechnet werden.

Aufgabe 37.6

a) Schreiben Sie ein Programm zur rekursiven Berechnung von (v_t) und (s_t). Die Werte von (a_t) sollen dabei in Abständen von einer Sekunde eingegeben werden können. Für jede Sekunde sollen die jeweilige Geschwindigkeit und die Position ausgedruckt werden.

b) Verwenden Sie das Programm zu folgendem Spiel: Ein Auto startet aus der Ruhe im Punkt A und soll in einem 200 m entfernten Punkt B wieder zum Stillstand kommen. In jeder Sekunde kann die Beschleunigung zwischen $-6\,\frac{m}{s^2}$ und $5\,\frac{m}{s^2}$ frei gewählt werden. (Negative Beschleunigung bedeutet Bremsverzögerung.)

Versuchen Sie unter den angegebenen Bedingungen in möglichst kurzer Zeit von A nach B zu gelangen.

c) Mögliche Erweiterung des Spiels:

- Es steht nur ein begrenzter Treibstoffvorrat zur Verfügung. Um dem Auto eine bestimmte Beschleunigung zu erteilen, ist eine bestimmte Treibstoffmenge notwendig.
- Auf der Strecke sind verschiedene Geschwindigkeitsbeschränkungen vorgeschrieben.
- An bestimmten Stellen ist nur eine geringere Bremsverzögerung möglich, z. B. wegen Glatteis.

§ 38 Die Grundgleichung der Mechanik

38.1 Herleitung der Gleichung

Bei unseren bisherigen Überlegungen gingen wir meist davon aus, daß die Beschleunigung der betrachteten Bewegung bekannt ist. Die Ursache der Bewegung spielte dabei also keine Rolle. Aber erst die Kenntnis der Bewegungsursache und des quantitativen Zusammenhanges zwischen Ursache und Wirkung ermöglicht es, Bewegungsabläufe vorherzusagen.

Die Kraft als Ursache der Bewegung war schon seit dem Altertum bekannt. Es bestand jedoch der fundamentale Irrtum, daß zur Aufrechterhaltung einer Bewegung eine ständige Antriebskraft vorhanden sein müsse (Aristoteles; 384 - 322 v. Chr.). Erst Galilei (1564 - 1642) erkannte, daß sich ein Körper, auf den keine Kraft einwirkt, geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Newton (1643 - 1727) gelang es, den quantitativen Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung zu formulieren. Diese Newtonsche Bewegungsgleichung, die Grundgleichung der Mechanik, ist im Unterricht relativ leicht herleitbar.

Die Alltagserfahrung zeigt, daß eine Bewegung mit um so größerer Beschleunigung abläuft, je größer die einwirkende Kraft ist. Die Beschleunigung wird um so kleiner sein, je größer die Masse des beschleunigten Körpers ist. Den prinzipiellen Versuchsaufbau zur Ermittlung des quantitativen Zusammenhangs zwischen einwirkender Kraft F (engl.: force), Masse m des beschleunigten Körpers und Beschleunigung a zeigt die Abbildung 38.1.

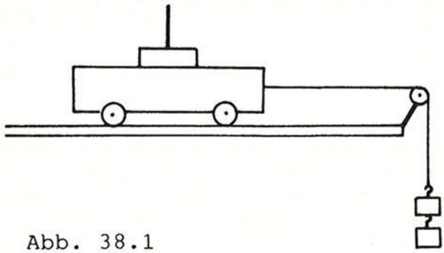


Abb. 38.1

Es sind zwei Versuchsreihen durchzuführen:

1. Die einwirkende Kraft wird durch Anhängen verschieden schwerer Zugkörperchen systematisch variiert; die beschleunigte Masse bleibt unverändert. Die jeweilige Bewegung wird zum Beispiel durch das in § 37 beschriebene Staubfigurenverfahren registriert.
   Meßergebnisse:
   - Die aufgenommenen Positionswerte s_k bilden eine Folge mit konstanten zweiten Differenzen, d. h., ein Körper führt unter dem Einfluß einer konstanten Kraft eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus.
   - Die Beschleunigung a ist proportional zur beschleunigenden Kraft F: $a \sim F$.
2. Die einwirkende Kraft bleibt konstant; variiert wird die Masse m des beschleunigten Wagens.
   Meßergebnis:
   - Die Beschleunigung a ist umgekehrt proportional zur Masse m: $a \sim \frac{1}{m}$.

Faßt man diese beiden Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$a \sim \frac{F}{m}$$

bzw.

$$F \sim m \cdot a \tag{38.1}$$

In Anbetracht der fundamentalen Bedeutung dieser Beziehung wurde die Einheit der Kraft so festgelegt, daß die Proportionalitätskonstante in (38.1) den Zahlenwert 1 annimmt. Daher wird im Bundesgesetz über Einheiten im Meßwesen vom 2. Juli 1969 die Kraft nicht mehr als Grundgröße, wie bisher mit der Einheit 1 kp, sondern als abgeleitete Größe definiert. Mit den Einheiten der Masse (1 kg) und der Beschleunigung ($1\ \frac{m}{s^2}$) lautet also die Einheit der Kraft: $1\ \frac{kgm}{s^2}$. Diese Einheit wird zu Ehren des Entdeckers der Beziehung (38.1) Newton genannt und 1 Newton = 1 N abgekürzt: $1\,N = 1\,\frac{kgm}{s^2}$. 1 Newton ist also gleich der Kraft, die einem Körper der Masse 1 kg die Beschleunigung $1\ \frac{m}{s^2}$ erteilt. Mit dieser Krafteinheit lautet die Grundgleichung der Mechanik:

$$F = m \cdot a \tag{38.2}$$

Mit dieser Gleichung und Satz 37.1 lassen sich alle Bewegungen, die unter dem Einfluß einer konstanten Kraft ablaufen, quantitativ beschreiben. Eine Fülle von Anwendungen dazu findet man in jedem Oberstufen-Lehrbuch zur Mechanik. Im folgenden wird je ein Beispiel mit konstanter und mit nicht konstanter Kraft beschrieben.

[38.2] Fallbewegungen

Läßt man einen Gegenstand aus einer bestimmten Höhe fallen und registriert diese Bewegung, z. B. durch stroboskopische Aufnahmen, so stellt man fest, daß sie mit konstanter Beschleunigung erfolgt. Nach der Grundgleichung der Mechanik (38.2) ist auch kein anderes Resultat zu erwarten, weil die beschleunigende Kraft, nämlich die Gewichtskraft G des Gegenstandes, konstant ist. Die Fallbeschleunigung g beträgt nach (38.2):

$$g = \frac{G}{m} \tag{38.3}$$

Die Proportionalität zwischen der Beschleunigung g und der Gewichtskraft G scheint die Alltagserfahrung, daß schwere Körper schneller fallen als leichte, zu bestätigen. Beachtet man jedoch, daß die Gewichtskraft G, die ein Körper erfährt, proportional zu seiner Masse m ist, so erhält man aus (38.3) das Resultat, daß alle Körper mit derselben Fallbeschleunigung g fallen, was durch Fallversuche in einer luftleer gepumpten Glasröhre leicht nachgewiesen werden kann.

Die Bewegungsgesetze des freien Falls sind also für alle Körper Spezialfälle der in Satz (37.1) angegebenen Gleichungen, die für $s(0) = 0$ und $v(0) = 0$ gelten:

$$\text{Fallhöhe:} \quad h(t) = \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$\text{Fallgeschwindigkeit:} \quad v(t) = g \cdot t \tag{38.4}$$

Erfolgt die Fallbewegung mit einer positiven oder negativen Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$, so spricht man von einem senkrechten Wurf nach unten bzw. nach oben.

Wesentlich komplizierter zu beschreiben sind Fallbewegungen im lufterfüllten Raum. Auf den Körper wirken jetzt zwei verschiedene Kräfte ein:
- weiterhin die Gewichtskraft G des Körpers, die sich wegen (38.3) in der Form

$$G = m \cdot g \tag{38.5}$$

  schreiben läßt, und
- zusätzlich der Luftwiderstand F_L, der mit zunehmender Geschwindigkeit stark anwächst.

  Aus empirischen Untersuchungen kennt man den folgenden näherungsweise gültigen Zusammenhang:

$$F_L = -c \cdot v^2 \tag{38.6}$$

  Die Proportionalitätskonstante c hängt stark von den äußeren Bedingungen des Fallversuchs ab. F_L ist negativ, da diese Kraft nach oben, also zur Gewichtskraft entgegengesetzt gerichtet ist.

Die gesamte angreifende Kraft $G + F_L$ ist nicht mehr konstant. Da die Geschwindigkeit v von der Beschleunigung a abhängt und umgekehrt, läßt sich die Beschleunigungsfunktion nicht unmittelbar angeben. Die Überlegungen aus § 37 sind somit nicht direkt anwendbar.

Um dennoch den Verlauf der Fallbewegung im lufterfüllten Raum näherungsweise beschreiben zu können, zerlegen wir die Fallzeit in kleine Teilintervalle der Länge Δt. Wählt man Δt genügend klein, so kann man die einwirkende Kraft in jedem Teilintervall annähernd als konstant betrachten. Für das Teilintervall $[k \cdot \Delta t, (k+1) \cdot \Delta t) = [t, t + \Delta t)$ erhält man dann aus (38.2) und (37.7) die diskretisierte Form der Grundgleichung:

$$F_k = m \cdot a_k = m \cdot \frac{s_{k+2} - 2s_{k+1} + s_k}{(\Delta t)^2}$$

$$s_{k+2} - 2\,s_{k+1} + s_k = \frac{(\Delta t)^2}{m} \cdot F_k \tag{38.7}$$

Schreibt man (38.6) mit Hilfe von (37.4) um und setzt in (38.7) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung des Falls im lufterfüllten Raum:

$$s_{k+2} - 2\,s_{k+1} + s_k = \frac{(\Delta t)^2}{m} \cdot \left(m \cdot g - c \cdot \left(\frac{s_{k+1} - s_k}{\Delta t}\right)^2\right)$$

$$s_{k+2} = 2\,s_{k+1} - \frac{c}{m}(s_{k+1} - s_k)^2 - s_k + g \cdot (\Delta t)^2 \tag{38.8}$$

Gleichung (38.8) ist eine nicht-lineare Differenzengleichung, bei der das Auffinden der expliziten Lösung einige Kunstgriffe und einen beachtlichen Rechenaufwand erfordert. Mit Hilfe eines Rechners läßt sich der Verlauf der Fallbewegung wesentlich bequemer hochrechnen.

Aufgabe 38.1

a) Schreiben Sie ein Programm zur iterativen Berechnung der Fallstrecke beim Fall im lufterfüllten Raum.

b) Führen Sie mit $\Delta t = 0{,}05$ s einige Computerläufe mit verschiedenen Werten für c durch.
Realistische Zahlenwerte für c liegen um 0,001.

Stellen Sie einige Lösungsfolgen graphisch dar.

Eine etwas einfachere Differenzengleichung erhält man für die Geschwindigkeit beim Fall im lufterfüllten Raum. Ersetzt man a_k durch $\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$, so lautet die diskretisierte Form der Grundgleichung:

$$F_k = m \cdot \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} \tag{38.9}$$

Für die Fallgeschwindigkeit gilt also:

$$m \cdot \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = G + F_L = m \cdot g - c \cdot v_k^2$$

$$v_{k+1} = v_k - \frac{c \cdot \Delta t}{m} v_k^2 + g \cdot \Delta t \tag{38.10}$$

Aufgabe 38.2

a) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das die durch (38.10) gegebene Folge für vorzugebendes c, ausgehend von $v_0 = 0$, iterativ ausdruckt.

b) Stellen Sie einige der Folgen graphisch dar und vergleichen Sie mit dem (v, t)-Diagramm beim freien Fall.

Auch (38.10) stellt eine nicht-lineare Differenzengleichung dar, die mit einfachen Mitteln nicht zu lösen ist. Eine qualitative Aussage über den Verlauf von (v_k) erhält man jedoch durch folgende Überlegung. Für die Änderung der Geschwindigkeit erhält man aus Gleichung (38.10):

$$\Delta v_k = v_{k+1} - v_k = g \cdot \Delta t - \frac{c \cdot \Delta t}{m} v_k^2 \tag{38.11}$$

Ist zu Beginn des Falles $v_k = 0$, so ist Δv_k positiv, und die Geschwindigkeit nimmt zu. Je größer v_k wird, desto kleiner wird Δv_k; das heißt, die Geschwindigkeit nimmt langsamer zu. Beginnt die Bewegung mit großer Anfangsgeschwindigkeit, so ist nach (38.11) Δv_k negativ, das heißt, die Geschwindigkeit wird kleiner. Damit wird auch Δv_k betragsmäßig kleiner, und die Geschwindigkeit nimmt langsamer ab.

In beiden Fällen ist zu erwarten, daß sich die Geschwindigkeit nach einiger Zeit auf einen konstanten Wert einstellt. Wir suchen also nach einer Lösung der Form $v_k = v =$ konstant. Durch Einsetzen in (38.10) erhält man:

$$v = v - \frac{c \cdot \Delta t}{m} v^2 + g \cdot \Delta t$$

$$v^2 = \frac{m \cdot g}{c}$$

$$v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}} \tag{38.12}$$

Wirft man also im lufterfüllten Raum einen Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}$ senkrecht nach unten, so wird er eine Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v ausführen. Beginnt die Bewegung mit größerer oder kleinerer Anfangsgeschwindigkeit, so wird sich nach einiger Zeit die konstante Geschwindigkeit v einstellen.

Aufgabe 38.3

Vergleichen Sie (38.12) mit den Ergebnissen der Computerläufe in Aufgabe 38.2.

§ 39 Harmonische Schwingungen

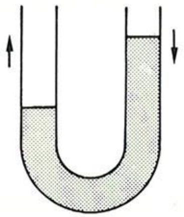
Eine weitere Anwendung der Grundgleichung der Mechanik stellt die Beschreibung von Schwingungsvorgängen dar. Schwingungen spielen in Natur und Technik eine große Rolle. Einige Beispiele schwingungsfähiger Systeme sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

Kugel in einer gekrümmten Rinne

Abb. 39.1

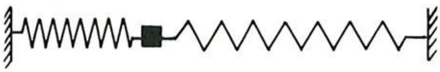
Fadenpendel

Abb. 39.3



Flüssigkeit in einem U-Rohr

Abb. 39.2



Federpendel
(ohne Berücksichtigung der Gravitation)

Abb. 39.4

Bei allen diesen Beispielen gibt es für den schwingenden Körper eine stabile Gleichgewichtslage. Wird der Körper aus dieser Lage herausgestoßen, so tritt eine Rückstellkraft auf, die ihn wieder in die Ausgangslage zurückkehren läßt. Infolge seiner Trägheit bewegt sich der Körper über diesen Punkt hinaus, die Rückstellkraft bremst ihn ab und beschleunigt ihn wieder in Richtung der Gleichgewichtslage. Bei fehlender Reibung würde sich diese Hinundherbewegung beliebig lange wiederholen.

Ist die Rückstellkraft proportional zur Entfernung von der Gleichgewichtslage, dann spricht man von einer *harmonischen Schwingung*. Beispiele dafür sind das Federpendel und die Flüssigkeit im U-Rohr. In Abbildung 39.1 liegt im allgemeinen keine, in Abbildung 39.3 (Fadenpendel) nur näherungsweise eine harmonische Schwingung vor.

Wirkt auf das schwingungsfähige System keine weitere (äußere) Kraft ein, so spricht man von einer freien, ungedämpften Schwingung. Ist zusätzlich eine Reibungskraft vorhanden, so führt das System eine gedämpfte Schwingung aus.

[39.1] Freie, ungedämpfte Schwingungen

Für einen gewissen Auslenkungsbereich einer Schraubenfeder stellt man fest, daß die rücktreibende Kraft F proportional zur Auslenkung s aus der Ruhelage ist (Hookesches Gesetz):

$$F = -D \cdot s \tag{39.1}$$

Die Größe D heißt *Federkonstante* oder *Federrichtgröße* und stellt ein Maß für die "Härte" der Feder dar. Das Minuszeichen berücksichtigt die Tatsache, daß Rückstellkraft und Auslenkung entgegengesetzte Richtungen haben.

Die Anordnung in Abbildung 39.4 führt also eine harmonische Schwingung aus. Um das Weg-Zeit-Gesetz zu bestimmen, setzen wir (39.1) in die Grundgleichung (38.2) ein:

$$m \cdot a = -D \cdot s \tag{39.2}$$

Da die Momentanbeschleunigung a von der Auslenkung s abhängt und umgekehrt, ist (39.2) nicht unmittelbar lösbar. Es liegt also eine ähnliche Situation wie beim Fall im lufterfüllten Raum vor (§ 38). Wir betrachten daher wieder kleine Zeitintervalle der Länge Δt, in denen wir die einwirkende Kraft als konstant ansehen:

$$F_t = -D \cdot s_t \tag{39.3}$$

Setzt man (39.3) in die diskretisierte Form der Grundgleichung (38.7) ein, so erhält man die Differenzengleichung der harmonischen Schwingung:

$$s_{t+2\Delta t} - 2\,s_{t+\Delta t} + s_t = -\frac{(\Delta t)^2}{m} \cdot D \cdot s_t$$

$$s_{t+2\Delta t} - 2\,s_{t+\Delta t} + \left(1 + (\Delta t)^2 \frac{D}{m}\right) \cdot s_t = 0$$

Bei Verwendung der Zeitvariablen k lautet die Gleichung:

$$s_{k+2} - 2\,s_{k+1} + \left(1 + (\Delta t)^2 \frac{D}{m}\right) \cdot s_k = 0 \tag{39.4}$$

Denn durch $t + 2\Delta t$ und $k + 2$ wird derselbe Zeitpunkt beschrieben, siehe Abbildung 25.1.

Aufgabe 39.1

a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von s_k nach (39.4). Die Konstanten m und D, die Länge Δt des Zeitintervalls sowie die Anfangswerte s_0 und v_0 ($v_0 = \frac{s_1 - s_0}{\Delta t}$) sollen zu Beginn jedes Programmlaufes eingegeben werden können.

b) Führen Sie einige Probeläufe mit verschiedenen Werten von Δt durch. Wie wird die Lösung durch die Länge des Zeitintervalles Δt beeinflußt?

c) Untersuchen Sie den Einfluß der Masse m und der Federrichtgröße D auf die Bewegung.

Gleichung (39.4) ist eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, also eine verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung, deren Lösung explizit angegeben werden kann. Die Schwingungsbewegung ist jedoch damit noch nicht exakt beschrieben, weil (39.4) von einer stückweise konstanten Kraft ausgeht. Führt man jedoch bei fest gehaltenem Zeitpunkt $t = t_0$ den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ durch, so erhält man die exakte kontinuierliche Weg-Zeit-Gleichung der harmonischen Schwingung.

Die charakteristische Gleichung von (39.4) lautet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + (\Delta t)^2 \frac{D}{m} = 0 \tag{39.5}$$

Setzt man

$$\omega^2 := \frac{D}{m}, \tag{39.6}$$

so erhält man die beiden Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + i\omega\Delta t \\ \lambda_2 &= 1 - i\omega\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{39.7}$$

Da $\frac{D}{m} \neq 0$ und $\Delta t \neq 0$ ist, besitzt (39.4) stets zwei linear unabhängige komplexe Lösungsfolgen. Nach Satz 15.4 läßt sich daraus eine reelle Lösungsbasis der Form

$$(r^k \cdot \sin k\phi)_{k \in \mathbb{N}}, \quad (r^k \cdot \cos k\phi)_{k \in \mathbb{N}}$$

gewinnen. Dabei ist

$$r = \sqrt{1 + \omega^2 (\Delta t)^2} \tag{39.8}$$

und

$$\sin\phi = \frac{\omega \cdot \Delta t}{\sqrt{1 + \omega^2(\Delta t)^2}}; \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2(\Delta t)^2}} \tag{39.9}$$

Bei kleinem Δt ist $\sin\phi$ relativ klein und kann daher durch ϕ ersetzt werden, vgl. Gleichung (21.22). Die allgemeine Lösung von (39.4) lautet damit

$$s_k = r^k \cdot (C_1 \cdot \sin k\phi + C_2 \cdot \cos k\phi) \tag{39.10}$$

mit

$$k\phi \approx k \cdot \sin\phi = \frac{k \cdot \omega \cdot \Delta t}{\sqrt{1 + \omega^2(\Delta t)^2}} = \frac{\omega \cdot t}{\sqrt{1 + \omega^2(\Delta t)^2}} \tag{39.11}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden wie üblich durch die Angabe der beiden Anfangswerte s_0 und s_1 festgelegt. Ist die mittlere Geschwindigkeit v_0 im Anfangsintervall bekannt, so läßt sich s_1 durch $s_0 + v_0 \cdot \Delta t$ ersetzen. Die Anfangsrichtung der Bewegung wird durch das Vorzeichen von v_0 bestimmt.

Setzt man die Anfangswerte in die allgemeine Lösung (39.10) ein, so erhält man:

$$s_0 = C_2 \tag{39.12}$$

$$s_0 + v_0 \cdot \Delta t = r \cdot (C_1 \cdot \sin\phi + C_2 \cdot \cos\phi) \tag{39.13}$$

Daraus läßt sich die Konstante C_1 berechnen:

$$C_1 = \frac{s_0 + v_0 \cdot \Delta t - r \cdot s_0 \cdot \cos\phi}{r \cdot \sin\phi} \tag{39.14}$$

Gleichung (39.14) kann mit Hilfe von (39.8) und (39.9) noch wie folgt umgeformt werden:

$$\sin\phi = \frac{\omega \cdot \Delta t}{r},$$

also ist

$$r \cdot \sin\phi = \omega \cdot \Delta t, \tag{39.15}$$

und

$$\cos\phi = \frac{1}{r},$$

also ist

$$r \cdot \cos\phi = 1. \tag{39.16}$$

Einsetzen von (39.15) und (39.16) in (39.14) ergibt für C_1 den einfachen Wert

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega} \tag{39.17}$$

Die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung einer Schraubenfeder (vgl. Abb. 39.4) mit der Anfangsposition s_0 und der Geschwindigkeit v_0 im Anfangsintervall lautet somit:

$$s_k = r^k \cdot \left(\frac{v_0}{\omega} \cdot \sin k\phi + s_0 \cdot \cos k\phi\right) \tag{39.18}$$

Die kontinuierliche Ortsfunktion $s(t)$ der harmonischen Schwingung erhält man aus (39.18) durch den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ bzw. $k \longrightarrow \infty$ bei fest gehaltenem Zeitpunkt t mit $k \cdot \Delta t = t$. Die mittlere Geschwindigkeit v_0 geht dabei in die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ über:

$$v_0 \longrightarrow v(0) \qquad \text{für} \quad \Delta t \longrightarrow 0 \tag{39.19}$$

Aus (39.11) folgt unmittelbar:

$$k\phi \longrightarrow \omega \cdot t \qquad \text{für} \quad \Delta t \longrightarrow 0 \tag{39.20}$$

Um das Verhalten des Faktors r^k in (39.18) zu bestimmen, betrachten wir zunächst $(r^k)^2 = r^{2k}$.

$$\begin{aligned} r^{2k} &= \left(\sqrt{1 + \omega^2 (\Delta t)^2}\right)^{2k} = \left(1 + \omega^2 (\Delta t)^2\right)^k = \\ &= \left[(1 + i\omega\Delta t)(1 - i\omega\Delta t)\right]^k = (1 + i\omega\Delta t)^k \cdot (1 - i\omega\Delta t)^k = \\ &= \left(1 + i\omega\frac{t}{k}\right)^k \cdot \left(1 - i\omega\frac{t}{k}\right)^k \end{aligned}$$

Nach (29.25) gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + i\omega\frac{t}{k}\right)^k = e^{i\omega t} \quad \text{und}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - i\omega\frac{t}{k}\right)^k = e^{-i\omega t}.$$

Wir erhalten also

$$\lim_{k\to\infty} (r^k)^2 = e^{i\omega t}\cdot e^{-i\omega t} = e^0 = 1$$

Da der Grenzwert von r^k wegen $r > 0$ nicht negativ sein kann, erhalten wir:

$$r^k \longrightarrow 1 \qquad \text{für } k \longrightarrow \infty \quad \text{bzw.} \quad \Delta t \longrightarrow 0 \tag{39.21}$$

Die Zusammenfassung der Ergebnisse aus (39.18) bis (39.21) liefert mit (39.6) den

Satz 39.1

> Ein Körper der Masse m, der an einer Schraubenfeder mit Richtgröße D befestigt ist, führt eine harmonische Schwingung aus. Ist s(0) die Anfangslage und v(0) die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, so gilt für seine Lage s(t) zum Zeitpunkt t:
>
> $$s(t) = \frac{v(0)}{\omega}\cdot\sin\omega t + s(0)\cdot\cos\omega t \tag{39.22}$$
>
> mit
>
> $$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Lenkt man den Körper um eine Strecke a aus der Ruhelage aus und läßt ihn anschließend los, so ist $s(0) = a$ und $v(0) = 0$. Seine Ortsfunktion lautet dann

$$s(t) = a\cdot\cos\omega t. \tag{39.23}$$

Der Körper führt also eine periodische Bewegung symmetrisch zur Ruhelage aus. Seine maximale Auslenkung a heißt *Amplitude* der Schwingung.

Da die Kosinusfunktion 2π-periodisch ist, gilt für die Zeit für eine volle Hinundherbewegung, für die *Periodendauer* T:

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{39.24}$$

Da auch die Sinusfunktion und damit alle Linearkombinationen aus Sinus- und Kosinusfunktion 2π-periodisch sind, hat die Periodendauer bei jeder Wahl der Anfangswerte s(0) und v(0) denselben Wert. Ist $s(0) \neq 0$ und $v(0) \neq 0$, so ist häufig eine Darstellung der Lösung in der Form

$$s(t) = C\cdot\cos(\omega t - \beta) \tag{39.25}$$

günstig. Insbesondere läßt sich daraus die Amplitude der Schwingung aus den Anfangswerten vorhersagen. Die Umrechnung der Darstellung in (39.22) auf die Form (39.25) ist mit den in § 33 entwickelten Hilfsmitteln ohne weiteres möglich.

Aufgabe 39.2

Bestimmen Sie die Amplitude einer harmonischen Schwingung mit den Anfangswerten s(0) und v(0).

[39.2] Gedämpfte Schwingungen

Bei fast allen harmonischen Schwingungen tritt neben der Rückstellkraft noch eine Reibungskraft auf, die näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit des schwingenden Körpers ist. Mit der Reibungskonstanten A erhält man als Gesamtkraft F_k, die auf den schwingenden Körper einwirkt:

$$F_k = -D\cdot s_k - A\cdot v_k = -(D\cdot s_k + A\cdot\frac{s_{k+1} - s_k}{\Delta t})$$

$$F_k = -(D - \frac{A}{\Delta t})\cdot s_k - \frac{A}{\Delta t}\cdot s_{k+1} \qquad (39.26)$$

Setzt man F_k in die Grundgleichung der Mechanik (38.7) ein, so lautet die Differenzengleichung der gedämpften Schwingung:

$$s_{k+2} + (\frac{A\cdot\Delta t}{m} - 2)\cdot s_{k+1} + (1 + \frac{D\cdot(\Delta t)^2}{m} - \frac{A\cdot\Delta t}{m})\cdot s_k = 0 \qquad (39.27)$$

Aufgabe 39.3

a) Erweitern Sie das Programm aus Aufgabe 39.1 zur Berechnung von s_k nach (39.27).

b) Untersuchen Sie den Einfluß von A auf die "Periodendauer" T der Schwingung.
T sei die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten von s_k.
Beachten Sie das Verhalten von s_k für $A \geqq 2\sqrt{m\cdot D}$.

Die Gleichung (39.27) ist wiederum eine lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung. Die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms sind:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \frac{A\cdot\Delta t}{2m} + \frac{\Delta t}{2m}\sqrt{A^2 - 4\,mD} \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{A\cdot\Delta t}{2m} - \frac{\Delta t}{2m}\sqrt{A^2 - 4\,mD} \end{aligned}\right\} \qquad (39.28)$$

Ist die Reibungskraft relativ klein, so ist $A^2 < 4\,mD$, und λ_1, λ_2 sind konjugiert komplex. Die allgemeine Lösung von (39.27) lautet dann (vgl. Abschnitt [15.3]):

$$s_k = r^k\cdot(C_1\cdot\sin k\phi + C_2\cdot\cos k\phi) \qquad (39.29)$$

mit

$$r = \sqrt{1 - \frac{A\cdot\Delta t}{m} + \frac{D\cdot(\Delta t)^2}{m}} \qquad (39.30)$$

$$\sin\phi = \frac{\Delta t\cdot\sqrt{mD - (\frac{A}{2})^2}}{\sqrt{m^2 - A\cdot m\cdot\Delta t + mD(\Delta t)^2}} \qquad (39.31)$$

Die kontinuierliche Ortsfunktion s(t) der gedämpften Schwingung erhält man wieder durch den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ bzw. $k \longrightarrow \infty$ bei fest gehaltenem Zeitpunkt t mit $t = k\cdot\Delta t$.

Aufgabe 39.4

a) Zeigen Sie:

$$r^k \longrightarrow e^{-\frac{A}{2m}\cdot t} \quad \text{für } k \longrightarrow \infty \text{ bzw. } \Delta t \longrightarrow 0.$$

Anleitung: Formen Sie zunächst r^{2k} so um, daß die Gleichung (29.25) angewandt werden kann.

b) Zeigen Sie analog zu (39.11) bzw. (39.20):

$$k\phi \longrightarrow t\cdot\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{A}{2m}\right)^2} \quad \text{für } k \longrightarrow \infty \quad \text{bzw. } \Delta t \longrightarrow 0.$$

Aus den Ergebnissen von Aufgabe 39.4 lassen sich zwei charakteristische Merkmale der gedämpften Schwingung herleiten.

a) Ihre Amplitude nimmt im Laufe der Zeit exponentiell ab. Der schwingende Körper kehrt nach einiger Zeit in seine Ruhelage zurück. (s_k) ist also eine Nullfolge.

b) Für die Periodendauer T gilt (vgl. Gleichung (39.24)):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{A}{2m}\right)^2}}$$

Vergleicht man diesen Wert mit der Periodendauer der ungedämpften Schwingung ($A = 0$), so sieht man, daß die Reibung stets eine Vergrößerung der Periodendauer verursacht.

Ist die Reibungskraft sehr groß, dann kann A^2 größer als $4\,mD$ werden. Dann sind λ_1 und λ_2 in (39.28) beide reell und verschieden, und es kommt keine Schwingung mehr zustande. Der Körper kehrt allmählich in seine Ruhelage zurück, ohne über sie hinauszuschwingen. Man sagt, die Bewegung sei *aperiodisch*.

39.3 Erzwungene Schwingungen; Resonanz

Wirkt auf ein schwingungsfähiges System eine periodische äußere Kraft ein, so führt das System erzwungene Schwingungen aus. Ein bekanntes Beispiel für diese Erscheinung ist die Hängebrücke, die durch die regelmäßigen Tritte einer marschierenden Kolonne zu Schwingungen angeregt wird. Einen Laborversuch zeigt Abbildung 39.5.

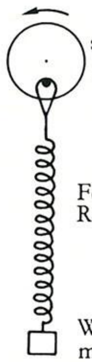


Abb. 39.5

Berücksichtigt man in (39.27) noch zusätzlich eine äußere periodische Kraft der Form $F_k = B\cdot\cos(\omega k\cdot\Delta t)$, so erhält man die Differenzengleichung der erzwungenen Schwingung

$$s_{k+2} + \left(\frac{A\cdot\Delta t}{m} - 2\right)s_{k+1} + \left(1 + \frac{D\cdot(\Delta t)^2}{m} - \frac{A\cdot\Delta t}{m}\right)s_k = B\cdot\cos(\omega\cdot k\cdot\Delta t) \qquad (39.32)$$

Aufgabe 39.5

a) Schreiben Sie ein Programm zur iterativen Berechnung von s_k nach (39.32).

b) Führen Sie einige Probeläufe für verschiedene Werte von ω im Bereich zwischen 1 und 20 durch. Geeignete Zahlenwerte für die anderen Größen sind z. B.:

m	D	A	B	Δt	s_0	v_0
1	9	2	0,01	0,01	0	0

Zeichnen Sie für ein Beispiel ein (t, s_t)-Diagramm.

c) Untersuchen Sie die Amplitude und die Periodendauer T der jeweiligen erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von ω.

Gleichung (39.32) ist eine lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung und hat die in (18.37) beschriebene Form. Ihre allgemeine Lösung ist also die Summe aus einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung (39.29) der zugehörigen homogenen Gleichung. Nach den Überlegungen in Abschnitt [18.3], Beispiel 3, besitzt (39.32) eine spezielle Lösung der Form

$$s_k^* = G \cdot \sin \omega \cdot k \cdot \Delta t + H \cdot \cos \omega \cdot k \cdot \Delta t \ . \tag{39.33}$$

Wie wir in Abschnitt [39.2] gesehen haben, bildet die allgemeine Lösung (39.29) eine Nullfolge. Nach einiger Zeit (Einschwingvorgang) wird also die erzwungene Schwingung näherungsweise durch (39.33) allein beschrieben. Sie ist wieder eine harmonische Schwingung, die dieselbe Periodendauer wie die einwirkende Kraft hat, gegenüber dieser jedoch phasenverschoben ist. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist proportional zum Betrag der äußeren periodischen Kraft und hängt außerdem von der Frequenz bzw. der Periodendauer dieser Kraft ab, wie in (18.38) bis (18.40) zu sehen ist.

Die Computerläufe in Aufgabe 39.5 c zeigen, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingung um so größer ist, je kleiner der Unterschied zwischen der Frequenz der einwirkenden Kraft und der Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems ist. Unter der Eigenfrequenz versteht man die Frequenz, mit der das System ohne Einwirkung äußerer Kräfte schwingen würde; vgl. (39.24). Stimmen Eigenfrequenz und Frequenz der erregenden Kraft überein, so spricht man von *Resonanz*. Ist die Dämpfung klein, so kann die Amplitude bei Schwingungen mit der Resonanzfrequenz als Frequenz der äußeren Kraft so groß werden, daß das System zerstört wird. So stürzte im November 1940 die Tacomabrücke in Ohio (USA) infolge von periodischen Windstößen ein.

Aufgabe 39.6

Versuchen Sie mit Hilfe des Programms aus Aufgabe 39.5 eine solche "Resonanzkatastrophe" zu simulieren.

§ 40 Himmelsmechanik

[40.1] Das Gravitationsgesetz

Bei der Beschreibung von Fallbewegungen in Abschnitt [38.2] gingen wir davon aus, daß die beschleunigende Kraft, die auf den fallenden Körper einwirkt - die Erdanziehungskraft - konstant ist. Dies ist jedoch nur annähernd richtig, wenn man sich nicht allzuweit von der Erdoberfläche entfernt. Es war wiederum Newton, dem es gelang, diese Kraft quantitativ zu beschreiben. Er erkannte, daß die Kraft, die einen Apfel zu Boden fallen läßt, gleichartig ist der Kraft, die den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält. Er fand, daß zwei beliebige Körper Anziehungskräfte, sogenannte Gravitationskräfte aufeinander ausüben. Auf Grund seiner Analyse der Keplerschen Gesetze konnte er zeigen: Besitzen zwei Körper die Massen m_1 und m_2 und ist r der Abstand ihrer Schwerpunkte, so gilt für den Betrag der Kraft F, mit der sich die beiden Körper anziehen, das Gravitationsgesetz

$$F = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \tag{40.1}$$

Diese Gleichung bringt den folgenden intuitiv plausiblen Sachverhalt zum Ausdruck:

- je größer die Massen, desto größer die Anziehungskraft;
- je größer der Abstand der beiden Körper, desto kleiner die Anziehungskraft.

Die Gravitationskonstante f ist eine Naturkonstante, die sich mit sehr feinen Meßmethoden im Labor bestimmen läßt: $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Dieser äußerst kleine Wert von f macht verständlich, daß Gravitationskräfte nur spürbar sind, wenn Körper mit sehr großen Massen beteiligt sind (Himmelskörper).

Mit Hilfe des Gravitationsgesetzes (40.1) und der Grundgleichung der Mechanik (38.2) lassen sich im Prinzip alle Bewegungen von Körpern berechnen, die nur dem Einfluß von Gravitationskräften unterliegen. Wie bei den bisher betrachteten Beispielen in den vorangehenden Abschnitten ist auch hier das Hauptproblem, daß die Position s(t) des betrachteten Körpers und die Beschleunigung a(t) voneinander abhängig sind. Wie in Abschnitt [38.2] dargestellt, erhält man durch Diskretisierung Differenzengleichungen, welche die Bewegungen der Körper näherungsweise beschreiben.

Ein relativ einfaches Anwendungsbeispiel für das Gravitationsgesetz ist die Berechnung der Bahn einer Rakete, die senkrecht zur Erdoberfläche abgeschossen wird und ohne eigenen Antrieb fliegt, wie Jules Verne in seinem Zukunftsroman "Von der Erde zum Mond" (1865) beschreibt. Man benötigt dazu folgende Größen:

Masse der Erde: $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg

Masse der Rakete: m_R (wählbar)

Erdradius: R = 6370 km

Höhe über der Erdoberfläche zum Zeitpunkt t: h_t

Einsetzen der Erdanziehungskraft (40.1) in die diskretisierte Form der Grundgleichung (38.7) führt auf eine nichtlineare Differenzengleichung, die nicht elementar lösbar ist. Wir sind also wieder auf die Hilfe des Rechners angewiesen und werden deshalb die Gleichungen in einer für die Programmierung günstigen Form notieren (vgl. z. B. Aufgabe 37.6):

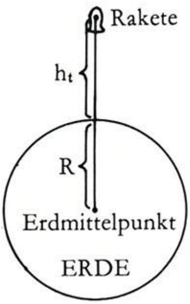


Abb. 40.1

a) Anfangswerte:

$h_0 = 0; \quad v_0$: variabel

b) Aus $F_t = m_R \cdot a_t$ und dem Gravitationsgesetz (40.1) folgt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Richtung der Beschleunigung zur Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist:

$$a_t = -\frac{f \cdot m_E}{(R + h_t)^2} \tag{40.2}$$

$$\left(f \cdot m_E = 3{,}982 \cdot 10^{14} \ \frac{m^3}{s^2}\right)$$

c) Höhe der Rakete:

$$h_{t+\Delta t} = h_t + v_t \cdot \Delta t \tag{40.3}$$

d) Geschwindigkeit:

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a_t \cdot \Delta t \tag{40.4}$$

Aufgabe 40.1

a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der jeweiligen Höhe h_t der Rakete.

b) Bestimmen Sie die Steighöhe und die Steigzeit bei verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten.

c) Bestimmen Sie näherungsweise die minimale Anfangsgeschwindigkeit, bei der die Rakete nicht mehr zur Erde zurückfällt (Fluchtgeschwindigkeit).

[40.2] Satelliten- und Planetenbahnen

Der in Abschnitt [40.1] beschriebene Start eines Raumflugkörpers stellt in mehrfacher Hinsicht einen Idealfall dar:

a) Reibungskräfte werden nicht berücksichtigt.

b) Die Gravitationskraft, die der Körper auf die Erde ausübt, wird vernachlässigt.

c) Die Bewegung erfolgt längs einer Geraden, sie ist also eindimensional.

Die Vernachlässigung der Reibung führt bei der Berechnung des Raketenstarts von der Erde aus zu großen Fehlern. Der Luftwiderstand ist sogar so groß, daß ein Verlassen des Anziehungsbereichs der Erde technisch nur für Flugkörper mit eigenem Antrieb möglich ist. Für die Flugbahnen von Satelliten im All und für die Planetenbewegung spielt jedoch die Reibung eine unwesentliche Rolle, weil das Weltall in guter Näherung als Vakuum anzusehen ist. Der Absturz des amerikanischen Himmelslabors "Skylab" zeigt aber, daß über längere

Zeiträume die Reibung für die Bahnen von Satelliten doch eine erhebliche Rolle spielt.

Die Rückwirkung eines Flugkörpers auf die Erde ist so lange vernachlässigbar, wie seine Masse klein ist gegen die Masse der Erde. Für die Bewegungen von Satelliten und des Mondes sowie für die Planetenbahnen um die Sonne können daher die Zentralkörper Erde bzw. Sonne als unbeeinflußt durch die umkreisenden Körper angesehen werden. Sind jedoch die Massen zweier Himmelskörper von gleicher Größenordnung, so sind die Bewegungen beider Sterne zu berechnen. Man spricht in diesem Fall von einem Doppelstern.

Für die Beschreibung von Satelliten- und Planetenbahnen reicht natürlich eine Dimension nicht mehr aus. Betrachtet man jeweils nur die Bahn eines Satelliten bzw. Planeten, so verläuft diese stets in einer Ebene, so daß in diesem Fall eine dreidimensionale Beschreibung nicht notwendig ist.

Als Beispiel soll im folgenden die Bahn eines Erdsatelliten berechnet werden. Wir wählen uns dazu ein (x, y)-Koordinatensystem mit dem Erdmittelpunkt als Ursprung.

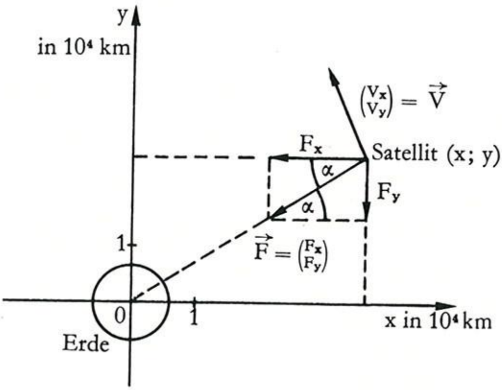


Abb. 40.2

Kräfte, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten sind nun Vektoren, deren Komponenten einzeln berechnet werden.

Für den Betrag F der Kraft auf den Satelliten gilt das Gravitationsgesetz (40.1):

$$F = f \cdot \frac{m_E \cdot m_s}{r^2} \qquad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2;$$

Hier ist m_E die Masse der Erde, m_s die des Satelliten.

Die Komponenten F_x und F_y erhält man mit Hilfe einfacher trigonometrischer Beziehungen, vgl. Abbildung 40.2:

$$F_x = -F \cdot \cos\alpha = -F \cdot \frac{x}{r} = -f \cdot m_E \cdot m_s \cdot \frac{x}{r^3} \qquad (40.5)$$

$$F_y = -F \cdot \sin\alpha = -F \cdot \frac{y}{r} = -f \cdot m_E \cdot m_s \cdot \frac{y}{r^3} \qquad (40.6)$$

Berücksichtigt man für jede Komponente die Grundgleichung der Mechanik ($F = m_s \cdot a$), so läßt sich die Beschleunigung, die der Satellit erfährt, berechnen:

$$a_x = -f \cdot m_E \cdot \frac{x}{r^3} = -C \cdot \frac{x}{r^3} \tag{40.7}$$

$$a_y = -f \cdot m_E \cdot \frac{y}{r^3} = -C \cdot \frac{y}{r^3} \tag{40.8}$$

mit $C = f \cdot m_E = 3{,}982 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$ wie in (40.2).

Diese beiden Gleichungen zeigen bereits, daß die Bewegung von Satelliten bzw. Planeten nicht von deren Masse abhängt, sondern nur von der Masse des Zentralkörpers, der Erde bzw. der Sonne. Drückt man in (40.7) und (40.8) die Beschleunigung mit Hilfe der Ortskoordinaten und der Länge Δt des Zeitintervalls aus, in dem die Kraftkomponenten konstant angenommen werden - vgl. (37.7) -, so erhält man zwei nichtlineare Differenzengleichungen:

$$x_{t+2\Delta t} - 2\,x_{t+\Delta t} + x_t = -C \cdot (\Delta t)^2 \cdot \frac{x_t}{(\sqrt{x_t^{\,2} + y_t^{\,2}})^3} \tag{40.9}$$

$$y_{t+2\Delta t} - 2\,y_{t+\Delta t} + y_t = -C \cdot (\Delta t)^2 \cdot \frac{y_t}{(\sqrt{x_t^{\,2} + y_t^{\,2}})^3} \tag{40.10}$$

Neben der Schwierigkeit, daß die beiden Gleichungen nicht linear sind, tritt hier auch noch das Problem auf, daß in beiden Differenzengleichungen jeweils zwei gesuchte Lösungsfolgen (x_t) und (y_t) auftreten. Man nennt (40.9) und (40.10) ein System von Differenzengleichungen. Seine explizite Lösung zu finden ist alles andere als einfach. Für den Computer bedeutet die schrittweise Lösung eines Systems lediglich einen größeren Rechenaufwand, aber keine neuen prinzipiellen Schwierigkeiten gegenüber der Lösung einer einzelnen Differenzengleichung. Für die Berechnung der Satellitenbahn mit Hilfe des Computers sind die Gleichungen (40.9) und (40.10) nicht sehr gut geeignet. Wir gehen daher wie in Abschnitt [40.1] vor.

a) Eingabe der Anfangsbedingungen:

Position $(x_0; y_0)$; Geschwindigkeit $\begin{pmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \end{pmatrix}$

b) Berechnung des Abstandes Erdmittelpunkt - Satellit:

$$r_t = \sqrt{x_t^{\,2} + y_t^{\,2}} \tag{40.11}$$

c) Berechnung der Beschleunigung nach (40.7) und (40.8):

$$a_{x,t} = -C \cdot \frac{x_t}{r_t^{\,3}}; \quad a_{y,t} = -C \cdot \frac{y_t}{r_t^{\,3}} \tag{40.12}$$

d) Berechnung der neuen Geschwindigkeit:

$$\left.\begin{aligned} v_{x,t+\Delta t} &= v_{x,t} + a_{x,t} \cdot \Delta t \\ v_{y,t+\Delta t} &= v_{y,t} + a_{y,t} \cdot \Delta t \end{aligned}\right\} \tag{40.13}$$

e) Berechnung der neuen Position:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + v_{x,t} \cdot \Delta t \qquad y_{t+\Delta t} = y_t + v_{y,t} \cdot \Delta t \tag{40.14}$$

Nachdem die Position notiert ist, wird der Algorithmus bei Punkt b) fortgesetzt.

Aufgabe 40.2

a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von Satellitenbahnen. Falls Ihnen ein (x, y)-Schreiber zur Verfügung steht, lassen Sie sich die Bahnen aufzeichnen. Andernfalls tragen Sie die durch den Computer berechneten Werte in ein Koordinatensystem ein.

b) Bestimmen Sie die Umlaufzeiten auf verschiedenen Bahnen.

Für einen Satelliten, der die Erde in 500 km Höhe "parallel" zur Erdoberfläche überfliegt, erhält man in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit Bahnkurven, wie sie in Abbildung 40.3 skizziert sind.

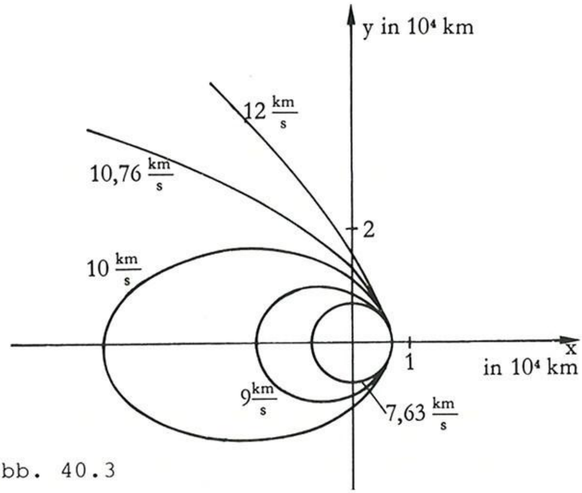


Abb. 40.3

Wie die Abbildung vermuten läßt und eine tiefere Analyse zeigt, können die nachstehenden Fälle auftreten.

Je nach Anfangsgeschwindigkeit stürzt der Satellit auf die Erdoberfläche, oder er durchläuft verschiedene Bahnformen: Ellipse (ein Brennpunkt ist der Erdmittelpunkt), Kreis um den Erdmittelpunkt, Parabel oder Hyperbel. Für jede Höhe gibt es genau eine Geschwindigkeit, bei der der Satellit eine Kreisbahn durchläuft, und eine Geschwindigkeit, bei der er den Anziehungsbereich der Erde gerade verlassen kann. Bei einer Starthöhe von 500 km beträgt die Kreisgeschwindigkeit 7,63 $\frac{km}{s}$, die Fluchtgeschwindigkeit 10,76 $\frac{km}{s}$. In völlig analoger Weise lassen sich die Bewegung des Mondes um die Erde, die Bahnen von Planeten und Kometen um die Sonne und andere Bewegungsabläufe im Weltall berechnen.

Aufgabe 40.3

Bestimmen Sie mit Hilfe des leicht abgewandelten Programmes aus Aufgabe 40.2 die Fluchtgeschwindigkeit von der Mondoberfläche.

Die Masse des Mondes beträgt $m_M = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg.

Aufgabe 40.4

a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Flugbahn eines Satelliten von der Erde zum Mond. Da der Mond annähernd eine Kreisbahn (Radius ca. 384 000 km) um die Erde beschreibt, ist die Wahl eines Koordinatensystems naheliegend, in dem Erde und Mond ruhen.

b) Versuchen Sie solche Startbedingungen aus einer "Parkbahn" um die Erde herauszufinden, wo der Satellit in einer "Achterbahn" (vgl. Abb. 40.4) um Erde und Mond fliegt. Die Flugbahnen der amerikanischen Apollomission waren alle von dieser Gestalt.

Abb. 40.4

Aufgabe 40.5

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Bahnen zweier Sterne mit gleichen Massen (Doppelstern). Bestimmen Sie die Bahnen bei verschiedenen Anfangsbedingungen.

§ 41 Radioaktivität

[41.1] Zerfallsprozesse

Unter den natürlich vorkommenden chemischen Elementen gibt es vor allem bei den schwereren solche, deren Atomkerne relativ instabil sind, so daß sie unter Aussendung von Strahlung nach einiger Zeit zerfallen. Man unterscheidet drei Arten radioaktiver Zerfallsprozesse, nämlich:

α-Zerfall

Die Strahlung besteht aus Heliumkernen (2 Neutronen und 2 Protonen). Ein α-Strahler wandelt sich in ein neues Element mit einer um 2 kleineren Ordnungszahl um.

β-Zerfall

Ein β-Strahler sendet Elektronen aus. Das Zerfallsprodukt ist ein Element mit einer um 1 höheren Ordnungszahl.

γ-Zerfall

Es handelt sich um elektromagnetische Strahlung hoher Energie. Die Ordnungszahl des strahlenden Elements bleibt erhalten, lediglich sein energetischer Zustand wird verändert.

Allen drei Zerfallsarten gemeinsam ist die Eigenschaft, daß von keinem Kern vorhergesagt werden kann, zu welchem Zeitpunkt er zerfällt. Es kann nur die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der sein Zerfall innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls erfolgt. Diese Zerfallswahrscheinlichkeit ist zeitlich konstant und läßt sich durch makroskopische Größen wie Temperatur oder Druck nicht beeinflussen.

Es sei N_k die Anzahl der Atomkerne einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt $t = k \cdot \Delta t$ und λ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Kern der betreffenden Substanz in der Zeiteinheit zerfällt. Die Anzahl der im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ zerfallenden Kerne $|\Delta N_k|$ ist proportional zur Anzahl der vorhandenen Kerne und zur Länge Δt des Intervalls (falls Δt klein ist):

$$\Delta N_k = -\lambda \cdot \Delta t \cdot N_k \tag{41.1}$$

Für N_k gilt also folgende Differenzengleichung:

$$N_{k+1} = N_k + \Delta N_k = N_k - \lambda \cdot \Delta t \cdot N_k$$

$$N_{k+1} = (1 - \lambda \cdot \Delta t) \cdot N_k \tag{41.2}$$

N_k bildet also eine geometrische Folge (vgl. § 3) und läßt sich daher folgendermaßen ausdrücken:

$$N_k = N_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t)^k \tag{41.3}$$

Unter der Aktivität A_k eines radioaktiven Stoffes versteht man die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit:

$$A_k = \frac{|\Delta N_k|}{\Delta t} \tag{41.4}$$

In der Terminologie von § 25 ist die Aktivität der Betrag der Zuwachsgeschwindigkeit der Substanz. Aus (41.1) und (41.4) folgt unmittelbar:

$$A_k = \lambda \cdot N_k \tag{41.5}$$

Aktivitätsmessungen, z. B. mit dem Geigerzähler, ermöglichen bei Kenntnis der Zerfallswahrscheinlichkeit also Rückschlüsse auf die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne.

Den zeitlichen Verlauf der Aktivität erhält man aus (41.3) und (41.5):

$$A_k = \lambda \cdot N_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t)^k \tag{41.6}$$

Sie klingt ebenso wie die Anzahl der instabilen Kerne exponentiell ab.

Für eine kontinuierliche Beschreibung ist wieder der Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ durchzuführen.

Setzt man in (41.3) die Beziehung $k \cdot \Delta t = t$ ein, so erhält man nach (29.25):

$$N_k = N_0 \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^k$$

$$N(t) = \lim_{k \to \infty} N_k = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \tag{41.7}$$

Die Zeit t_H, nach der die Hälfte der ursprünglichen Substanz zerfallen ist, nennt man ihre *Halbwertszeit*.

$$N(t_H) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda t_H}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_H}$$

$$t_H = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda} \tag{41.8}$$

Ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kern eines bestimmten Stoffes innerhalb einer Stunde zerfällt, gleich $\frac{1}{10}$, so ist nach ca. 6,93 Stunden die Hälfte der ursprünglichen Menge zerfallen.

Aufgabe 41.1

Prüfen Sie dieses Ergebnis durch ein kleines Rechenprogramm über die Gleichung (41.3) nach.

Anwendungen des Zerfallgesetzes wurden bereits in § 3, Aufgabe 3.14 besprochen.

[41.2] Produktion radioaktiver Substanzen

Radioaktive Stoffe sind in vielen Bereichen wie Technik, Medizin und Biologie nützlich. So kann z. B. die Aufnahme und Verteilung von Düngemitteln in Pflanzen ohne Schädigung der Pflanze verfolgt werden, wenn der Dünger einen geringen Anteil radioaktiver Substanzen enthält.

Solche Substanzen lassen sich künstlich erzeugen, indem man sie z. B. in einem Reaktor bestrahlt. Dabei wird pro Zeiteinheit stets dieselbe Menge produziert. Der Quotient P aus produzierter Menge und Zeit kann als Produktionsgeschwindigkeit bezeichnet werden. Konstante Produktionsgeschwindigkeit bedeutet im allgemeinen lineares Anwachsen der produzierten Menge. Dies ist jedoch hier nicht der Fall, weil die produzierte radioaktive Substanz sofort wieder mit der Zerfallswahrscheinlichkeit λ zerfällt. Betrachtet man wieder das Zeitintervall $[k\cdot\Delta t, (k+1)\cdot\Delta t)$, so gilt für die Anzahl N_k der produzierten radioaktiven Kerne:

$$N_{k+1} = N_k + P\cdot\Delta t - \lambda\cdot\Delta t\cdot N_k$$

$$N_{k+1} = (1 - \lambda\cdot\Delta t)\cdot N_k + P\cdot\Delta t \tag{41.9}$$

Die Gleichung (41.9) hat die Form der Tilgungsgleichung (7.4) und besitzt nach (7.6) wegen $N_0 = 0$ die Lösung

$$N_k = \frac{P}{\lambda}\cdot(1 - (1 - \lambda\cdot\Delta t)^k) \tag{41.10}$$

Für die Aktivität A_k der produzierten Substanz gilt dann wegen (41.5):

$$A_k = \lambda\cdot N_k = P\cdot(1 - (1 - \lambda\cdot\Delta t)^k) \tag{41.11}$$

Aufgabe 41.2

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Rechners den zeitlichen Verlauf der Aktivität der produzierten Substanz und tragen Sie die errechneten Werte in ein Schaubild ein. Wählen Sie als Zeitraum etwa das 10fache der Halbwertszeit.

Wie in Abschnitt [41.1] erhält man durch den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ die kontinuierliche Aktivitätsfunktion:

$$A(t) = P\cdot(1 - e^{-\lambda t})$$

Diese Gleichung zeigt, daß sich bei genügend langer Bestrahlung die Aktivität des produzierten Präparates der Produktionsgeschwindigkeit annähert. Nach einer Zeitspanne von der Länge der Halbwertszeit hat die Aktivität des Präparates bereits den halben Wert der maximalen Aktivität erreicht. Eine wesentlich längere Bestrahlung im Reaktor ist im allgemeinen nicht mehr lohnend.

Aufgabe 41.3

> Bestimmen Sie die Zeit (in Vielfachen der Halbwertszeit), in der 60 %, 70 %, 80 %, 90 %, 99 % der maximalen Aktivität erreicht werden.

[41.3] Zerfallsreihen

Das Produkt, das bei einem radioaktiven Zerfall entsteht, kann selbst wieder instabil sein, so daß unter Umständen eine lange Folge von verschiedenen radioaktiven Substanzen entsteht (Zerfallsreihe). So wandelt sich z. B. Uran 238 über 14 radioaktive Zwischenprodukte schließlich in das stabile Element Blei 206 um. Dabei besitzen die einzelnen Kernumwandlungen sehr verschiedene Zerfallswahrscheinlichkeiten bzw. Halbwertszeiten: zwischen $1{,}6\cdot10^{-4}$ Mikrosekunden und 4,5 Milliarden Jahren. Verzweigungen in Zerfallsreihen sind ebenfalls möglich. Sie sind damit von gleicher Struktur wie die in Abschnitt [29.2] beschriebenen Stoffmengenänderungen bei chemischen Reaktionen; lediglich reversible radioaktive Prozesse sind aus Energiegründen nicht möglich. Für die Berechnung des zeitlichen Verlaufs solcher Zerfallsreihen kann damit auf die Überlegungen und Resultate aus Abschnitt [29.2] zurückgegriffen werden.

Es sei $N_{i,k}$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne der i-ten Substanz der Zerfallsreihe zum Zeitpunkt $t = k\cdot\Delta t$ und λ_i die Zerfallswahrscheinlichkeit der i-ten Substanz ($1 \leq i \leq m$). Enthält die Zerfallsreihe keine Verzweigungen, so wird der zeitliche Verlauf der Substanzmengen durch folgendes System von Differenzengleichungen beschrieben:

$$N_{1,k+1} = (1 - \lambda_1 \Delta t)\cdot N_{1,k} \tag{41.12}$$

$$N_{i,k+1} = (1 - \lambda_i\,\Delta t)\cdot N_{i,k} + \lambda_{i-1}\cdot\Delta t\cdot N_{i-1,k} \qquad (2 \leq i \leq m-1) \tag{41.13}$$

$$N_{m,k+1} = N_{m,k} + \lambda_{m-1}\cdot\Delta t\cdot N_{m-1,k} \tag{41.14}$$

Die m-te Substanz ist als letztes Glied der Zerfallsreihe stabil, so daß ihre Menge stets zunimmt. Sind von einem Element aus verschiedene Zerfallsprozesse möglich, so ändert sich das Differenzengleichungssystem nur unwesentlich.

Für den Fall $m = 3$ (Muttersubstanz - Tochtersubstanz - Endprodukt) stimmen die Gleichungen (41.12) bis (41.14) mit den Gleichungen (29.7) bis (29.9) in ihrer Struktur überein. Die Lösung des Gleichungssystems lautet also im Falle $m = 3$:

$$N_{1,k} = N_{1;0}\cdot(1 - \lambda_1\cdot\Delta t)^k \tag{41.15}$$

$$N_{2,k} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_{1;0} \cdot ((1-\lambda_1\Delta t)^k - (1-\lambda_2\Delta t)^k) \tag{41.16}$$

$$N_{3,k} = N_{1;0} - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\frac{1}{\lambda_1} \cdot (1-\lambda_1\Delta t)^k - \frac{1}{\lambda_2} \cdot (1-\lambda_2\Delta t)^k) \tag{41.17}$$

Die entsprechenden kontinuierlichen Funktionen werden wieder durch den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ geliefert:

$$\left.\begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0) \cdot e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) &= N_1(0) - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned}\right\} \tag{41.18}$$

Die Gleichungen (41.15) bis (41.17) bzw. (41.18) bestätigen den erwarteten Sachverhalt, daß die Muttersubstanz exponentiell abnimmt und die Anzahl der Atomkerne des Endproduktes sich der Anzahl der ursprünglich vorhandenen Kerne des Ausgangsprodukts annähert. Die ursprünglich nicht vorhandene Tochtersubstanz wächst zunächst stark an und nähert sich schließlich wieder dem Wert Null. Für den Zeitpunkt k ihres Maximums gilt nach Gleichung (29.24):

$$k = \frac{\ln(\lambda_1\Delta t) - \ln(\lambda_2\Delta t)}{\ln(1-\lambda_2\Delta t) - \ln(1-\lambda_1\Delta t)}$$

Die Gesamtaktivität der Probe setzt sich aus der Aktivität der Muttersubstanz und der der Tochtersubstanz zusammen. Nach (41.5), (41.15) und (41.16) gilt:

$$A_{1,k} = \lambda_1 \cdot N_{1,k} = \lambda_1 \cdot N_{1;0} \cdot (1 - \lambda_1\Delta t)^k \tag{41.19}$$

$$A_{2,k} = \lambda_2 \cdot N_{2,k} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_{1;0} \cdot ((1-\lambda_1\Delta t)^k - (1-\lambda_2\Delta t)^k) \tag{41.20}$$

Vergleicht man die beiden Anteile, indem man den Quotienten aus $A_{2,k}$ und $A_{1,k}$ bildet, so erhält man:

$$\frac{A_{2,k}}{A_{1,k}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (1 - \left(\frac{1-\lambda_2\Delta t}{1-\lambda_1\Delta t}\right)^k) \tag{41.21}$$

Häufig hat die Tochtersubstanz eine wesentlich kürzere Halbwertszeit als die Muttersubstanz, das heißt, ihre Zerfallswahrscheinlichkeit λ_2 ist sehr groß gegen λ_1. Dann ist $\frac{1-\lambda_2\Delta t}{1-\lambda_1\Delta t}$ kleiner als 1, und der Summand $\left(\frac{1-\lambda_2\Delta t}{1-\lambda_1\Delta t}\right)^k$ strebt für große Zeiten ($k \longrightarrow \infty$ bei festem Δt) gegen Null. Das Verhältnis der Aktivitäten strebt daher gegen 1, und die Aktivitäten von Mutter- und Tochtersubstanz sind annähernd gleich. Auch bei längeren Zerfallsreihen können ähnliche Verhältnisse vorkommen, wenn ein Glied der Reihe eine sehr viel geringere Zerfallswahrscheinlichkeit besitzt als alle nachfolgenden. Die Aktivitäten der Folgeprodukte sind in diesem Fall fast gleich groß wie die der langlebigen Substanz. Man sagt dann, die Zerfallsreihe befinde sich im radioaktiven Gleichgewicht.

Aufgabe 41.4

Bestimmen Sie das Verhältnis der Anzahlen der vorhandenen Kerne von Substanzen einer Zerfallsreihe, die sich im radioaktiven Gleichgewicht befindet.

Aufgabe 41.5

Für die vier Substanzen A, B, C, D gelte folgendes Zerfallsschema:

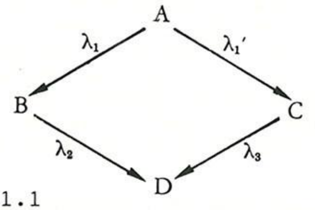


Abb. 41.1

A, B und C sind also radioaktiv mit den Zerfallswahrscheinlichkeiten λ_1, λ_1', λ_2 und λ_3, während D stabil ist.

a) Stellen Sie ein System von Differenzengleichungen auf für den zeitlichen Verlauf der vier Substanzmengen. Zu Beginn soll nur der Stoff A vorhanden sein.

b) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung dieses Differenzengleichungssystems und berechnen Sie die Lösungen für verschiedene Zerfallswahrscheinlichkeiten. Tragen Sie die Resultate in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

c) Bestimmen Sie die explizite Lösung des Differenzengleichungssystems.

IX SCHLUSSBEMERKUNGEN

§ 42 Methodologische Bemerkungen

Ein zentrales Thema in der Diskussion von Problemen des Mathematikunterrichts betraf in den letzten Jahren die Frage nach der Berechtigung und dem richtigen Maß für die Einbringung struktureller Aspekte in den Unterricht einerseits und die Lehrerbildung andererseits. Auf eine Woge der Befürwortung struktureller, axiomatischer, begrifflicher und systematischer Vorgehensweisen, die selbst in der breiteren Öffentlichkeit unter den Stichworten "Mengenlehre" bzw. "Neue Mathematik" eine vergleichsweise große Beachtung fand, folgte alsbald deren Verdammung und die Gegenempfehlung des anwendungsbezogenen und problemorientierten Vorgehens. Letzteres war gerade in der Blütezeit des strukturellen, begrifflichen Unterrichts als unsystematisch, gelegentlich sogar als "Aufgabendidaktik" verketzert worden.

Zeitlich parallel, aber sachlich im wesentlichen unabhängig von dieser Zickzackbewegung erfolgte eine atemberaubende Entwicklung im Bereiche der Computerindustrie, deren Geräte innerhalb kürzester Zeit um ganze Größenordnungen billiger, leistungsfähiger und bedienungsfreundlicher wurden. Es wurde dadurch möglich, einem jahrtausendealten Anliegen, nämlich der algorithmischen Denk- und Arbeitsweise, im Mathematikunterricht wieder verstärkt Aufmerksamkeit zu schenken. Einer der ersten mathematischen Algorithmen, der zugleich von paradigmatischer Qualität für den Algorithmusbegriff überhaupt ist, war das von Euklid vorgestellte Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen ("Euklidischer Algorithmus"). Jeder Algorithmus stellt ein grundsätzlich konstruktives Verfahren zur Erreichung eines bestimmten Zieles dar. Auf Grund dieser konstruktiven Qualität sind algorithmische Themenkreise für den Mathematikunterricht sogar von besonderer Bedeutung. Sie spielten im traditionellen Unterricht auch eine große, jedoch gelegentlich etwas zwielichtige Rolle. Die Behandlung von Algorithmen umfaßt nämlich die beiden folgenden Aspekte:

a) die Konstruktion, den Entwurf, die "Architektur" von (neuen) Algorithmen;

b) das Ausführen von (vorgegebenen) Algorithmen.

Algorithmen werden von "Prozessoren" ausgeführt. Computer sind außerordentlich schnelle und zuverlässige Prozessoren. Da man im traditionellen Mathematikunterricht, abgesehen von einigen Geräten mit sehr eingeschränkten Möglichkeiten, über keine Universalprozessoren (Computer) verfügte, war man gezwungen, die Algorithmen zum großen Teil manuell auszuführen. Einen der wichtigsten algorithmischen Grundbausteine stellt die Wiederholung, die Schleifenbildung dar. Die manuelle Ausführung von Algorithmen, insbesondere mit Wiederholungselementen, ist im allgemeinen äußerst zeitaufwendig.

Der Gefahr, daß man sich im Rahmen eines zeitlich beschränkten Mathematikunterrichts zu sehr auf die "Ausführung von Algorithmen" und zu wenig auf die "Konstruktion von Algorithmen" konzentrierte, wurde häufig nicht energisch genug entgegengewirkt. Dieser Aspekt des Algorithmierens erdrückte somit häufig den konstruktiven bzw. problemorientierten Unterricht und brachte den Begriff des Algorithmus insgesamt in einen gewissen Verruf.

Der Computer befreite seine Benutzer davon, sich zeitlich über Gebühr mit der Ausführung von Algorithmen beschäftigen zu müssen, und schuf dadurch insbesondere im Mathematikunterricht die Möglichkeit, der Konstruktion von Algorithmen den ihr gebührenden Stellenwert einzuräumen. Diese Ziele verfolgt insbesondere der computerorientierte Unterricht. Er darf nicht mit Entwicklungen verwechselt werden, in denen angestrebt wurde, Elemente der Lehrtätigkeit des Lehrers auf den Computer zu übertragen, und die unter den Bezeichnungen "programmierter Unterricht" bzw. "computerunterstützter Unterricht" (CUU) liefen.

Obwohl Algorithmen von sich aus nicht ohne weiteres einem der beiden Pole des eingangs beschriebenen Spannungsfeldes "strukturelle, axiomatische Mathematik" versus "anwendungsbezogene, problemorientierte Mathematik" zuzuordnen sind, geraten sie durch den Einsatz von Taschenrechnern und Computern bei der numerischen Auswertung anwendungsbezogener Probleme stark in die Nähe des Feldes der anwendungsorientierten Mathematik. Das Abebben der strukturorientierten und das Ansteigen der anwendungsorientierten Welle im Mathematikunterricht wurde so durch die neuen algorithmischen Möglichkeiten noch wesentlich verstärkt, vielleicht auch in diesem Ausmaß überhaupt erst ermöglicht. Die geschilderte Entwicklung birgt u. E. die Gefahr einer eskaladierenden Wellenbewegung zwischen scheinbar konträren mathematischen und unterrichtlichen Grundpositionen in sich. Schnell aufeinanderfolgende Modeströmungen sind vielleicht für die Textilindustrie nützlich, für den Mathematikunterricht sind sie u. E. jedoch von Übel, weil sie eine der Grundvoraussetzungen für langfristig erfolgreichen Unterricht, nämlich die Kontinuität des Lernprozesses, zerstören.

Wir halten den Anwendungsbezug des Mathematikunterrichts zweifellos für sehr bedeutsam, aber nicht für das Maß aller Dinge. Es gibt auch Themen, die sich einer schnellen Anwendbarkeit entziehen, jedoch von grundsätzlicher Bedeutung sind und gerade wegen ihrer Zweckfreiheit ein wesentliches Element der mathematischen Bildung ausmachen. Ein vorrangiges Ziel beim Verfassen dieses Buches bestand für uns darin, verschiedene komplementäre Komponenten des Spannungsfeldes, in dem sich der Mathematikunterricht befindet, zu integrieren und so zu einer relativ ausgewogenen Darstellung gewisser Bereiche des Mathematikunterichts und seines Hintergrundes beizutragen.

Die wesentlichen Ziele, die wir mit unserem Beitrag zum Thema "Differenzengleichungen" verfolgen und von denen viele als fundamentale Ideen des geschilderten Gebietes angesehen werden können, sind in summarischer Darstellung:

a) Integration, Kontinuität und Ausgewogenheit im Unterricht jeweils sowohl in inhaltlicher als auch in methodologischer Hinsicht, Beziehungshaltigkeit in den Unterrichtsthemen;

b) im heuristischen, methodologischen Bereich:
Elementarisierung und Vereinfachung, Einbringung empirischer, paradigmatischer Arbeitsweisen, operatives parametrisches Lernen und Arbeiten, Einbringung geometrischer Veranschaulichungen und Deutungen, konstruktiv/algorithmisches Vorgehen, Modularität des Problemlösens, Denken und Arbeiten in und mit Modellen; genetische Vorgehensweise;

c) zum Arbeiten mit Modellen:
Diskretisierung, Rekursivität, Interpretation, Simulation, "dynamisches Denken".

Diese Stichworte sollen im folgenden näher erläutert werden.

[42.1] Integration, Kontinuität, Ausgewogenheit

Auf inhaltliche Aspekte bezogen, wird dem Ziel der Integration in den vorangehenden Kapiteln auf den folgenden drei Ebenen Rechnung getragen:

a) Innermathematische Integration

In den dargestellten Themenkreisen gehen Inhalte und Methoden der computerorientierten Mathematik, der Algebra, insbesondere der linearen Algebra, der elementaren, teilweise naiv gehandhabten Analysis und auch der Geometrie fließend ineinander über; sie bedingen und motivieren sich gegenseitig. Das Thema bietet u. E. die Chance, einer bereits auch für die Schulmathematik drohenden Isolierung der einzelnen mathematischen Teilgebiete entgegenzuwirken.

b) Integration im Bereich des gesamten mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Auf Grund der diskretisierenden Betrachtungsweise werden viele Fragestellungen aus dem Bereich der Naturwissenschaften, zu deren Behandlung sonst meist Mittel aus der Integral- und Differentialrechnung oder aus der Theorie der Differentialgleichungen eingesetzt werden, bereits mit Mitteln des Mittelstufenunterrichts beschreibbar und lösbar. Hierdurch zeichnet sich einerseits die Chance der Motivation im Mathematikunterricht durch ansprechende und bedeutsame naturwissenschaftliche Fragestellungen und andererseits die Wiederbelebung mathematischer Methoden in den naturwissenschaftlichen Fächern ab. Es wird ja allgemein beklagt, daß die mathematische Darstellung dort häufig entweder ganz aufgegeben oder im Rahmen von "Spezialmathematiken" für die Naturwissenschaften an Schule und Hochschule durchgeführt wird. Etwaigen Erfolgen bei der Verfolgung dieser fachübergreifenden Integrationsziele kann allerdings auf schulorganisatorischer und schulpolitischer Basis in vielfältiger Weise wirksam vorgebeugt werden; etwa dadurch, daß man in bestimmten Bundesländern und Schularten z. B. den Physikunterricht in der Mittelstufe auf eine Wochenstunde reduziert, oder dadurch, daß man den verbindlichen Fächerkanon auf der Oberstufe so weit dezimiert, daß nichts mehr zu integrieren übrig bleibt.

c) Integration von Fragestellungen, die den mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich überschreiten

Das geschieht exemplarisch etwa durch Einbringung wirtschaftlicher Themenkreise. Globales Darstellungsmittel ist dabei meist das rekursiv beschriebene Modell. Nicht zuletzt hier bietet sich als Perspektive auch der Brückenschlag zur Thematik der Regelkreise und in die kybernetische Betrachtungsweise an.

Neben dieser inhaltlichen Integration im Bereich des Mittelstufen- und Oberstufenunterrichts enthält der beschriebene Themenkreis gute Möglichkeiten zur Wahrung der Kontinuität des Lernprozesses durch eine spiralförmig angelegte Behandlung, die bei richtiger Sicht der Dinge durchaus schon in der Primarstufe beginnt.
Die spiralförmig/kontinuierliche Anlage:

a) Primarstufe (erste Erfahrungen): ordinaler Aspekt des Zahlbegriffes (Zahl als Zählzahl) und seine wissenschaftliche Fundierung durch die Peano-Axiome (in der Lehrerbildung); einfache Iterierungs- und Reihungsverfahren (insbesondere bezüglich der arithmetischen Grundoperationen, z. B. Multiplikation als iterierte Addition, Division mit Rest als iterierte Subtraktion, Stellenwertsysteme); figurierte Zahlen und rekursive Zahlenmu-

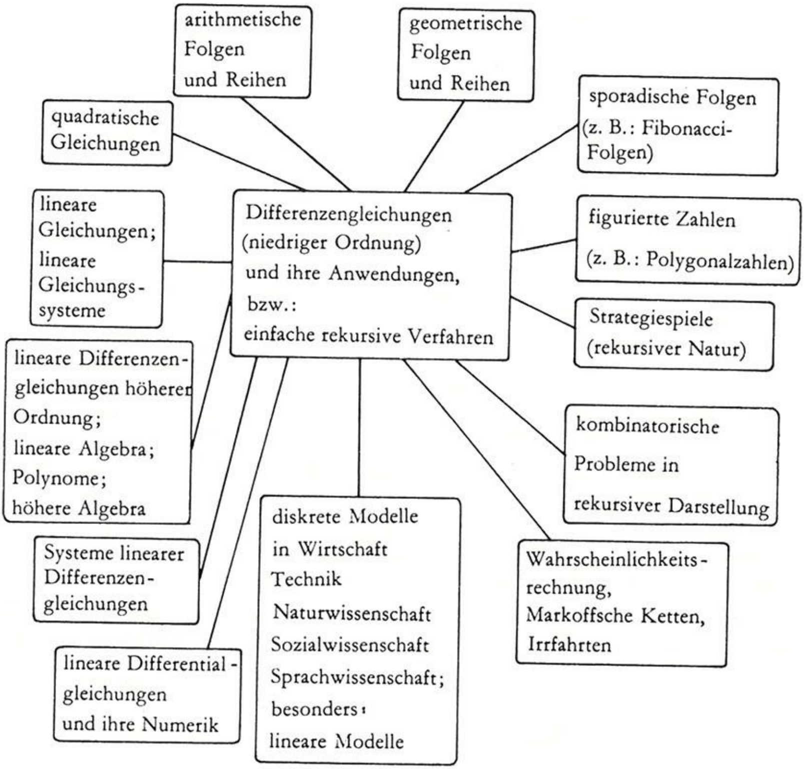


Abb. 42.1 Beziehungshaltigkeit im Thema "Differenzengleichungen und ihre Anwendungen"

ster; rekursive geometrische Konstruktionsverfahren (z.B. Polyominos); Spiele rekursiven Charakters; stochastische Grunderfahrungen.

b) Mittelstufe (Fundierung und Ausbau): Vertiefung der Primarstufen-Themen; einfache Probleme wirtschaftlicher Natur (Zins, Zinseszins, Tilgung von Darlehen, Renten); arithmetische und geometrische Folgen und deren Summierung; sporadische Folgen (z.B. Fibonacci-Zahlen); Wahrscheinlichkeitsrechnung, Stochastik (Irrfahrten, Mittelwertsregeln, Wahrscheinlichkeitsabakus, iterative Ermittlung statistischer Parameter, Simulation); erste Modellbildung ("Sachrechnen"); Wachstumsprozesse.

c) Oberstufe: Vertiefung und Analyse der bereits behandelten Themen; Entwicklung vollständiger (geschlossener) Lösungen; Stabilitätsbetrachtungen; lineare Algebra und Analysis als Hilfsmittel und in ihren Anwendungen, numerische Mathematik, Eigenwertprobleme, Stochastik (insbesondere: Markoffsche Ketten); diskrete Modelle und Verfahren in Wirtschaft, Technik, Naturwissenschaften, Sozialwissenschaften, Sprachwissenschaften.

d) Grundstudium im Hochschulbereich: Vertiefung und Weiterführung der angesprochenen Fragestellungen besonders in den Studienrichtungen der mathematisch-naturwissenschaftlich orientierten Lehrerbildung und der Wirtschaftswissenschaften.

So gesehen, enthält das Thema "Differenzengleichungen", auch wenn es im Unterricht nicht explizit unter diesem Namen angesprochen wird, einen hohen Grad an Beziehungshaltigkeit. Letztere ist der Übersichtlichkeit halber in Abbildung 42.1 noch einmal graphisch dargestellt. Zur sachgerechten Einbringung des Themas im Unterricht ist übrigens nicht die totale Änderung aller Lehrpläne notwendig, da es gut mit den zentralen klassischen Themen des Mathematikunterrichts verträglich ist.

Durch unüberlegte "Bereinigungen" bzw. Streichungen in den Lehrplänen wird allerdings solchen Integrationszielen häufig die Grundlage entzogen. So ist eine angemessene Behandlung der beschriebenen Themenkreise z. B. dort stark gefährdet, wo man meint, solche für den Mathematikunterricht "ungeeignete" Themen wie "Folgen und Reihen" dezimieren oder streichen zu müssen. Nachdem das Kind in den Brunnen gefallen ist, findet sich dann im allgemeinen niemand mehr, der für eine solche Entwicklung verantwortlich war; das Ganze hat sich dann im Rückblick im allgemeinen aus einer bedauernswerten Kette von unüberwindbaren Sachzwängen heraus ergeben.

Die fundamentalen Ideen des Themenkreises "Differenzengleichungen ..." sind in unserer Einschätzung:

a) algorithmisches Denken; insbesondere Iteration und Rekursion (im Unterricht propädeutisch durch Wiederholungs- und Seriierungsschemata zu behandeln und zu veranschaulichen).

b) Mathematisierung durch Modellbildung; insbesondere Diskretisierung, Linearität und Linearisierung, Simulation, Gleichgewicht und Stabilität.

[42.2] Heuristik und Methodologie

In diesem Bereich liegen zugleich Chancen und Gefahren des Themas "Differenzengleichungen ...". Eine der Hauptgefahren liegt in der übereilten Vorgabe von Lösungsansätzen. Gerade dieser Gefahr wird u. E. in der bestehenden Literatur zuwenig entgegengewirkt. Typische Formulierungen, die nach der Mathematisierung eines Sachproblems in Form einer Differenzengleichung anzutreffen sind, lauten etwa: "Wir machen nun den folgenden Lösungsansatz ...". Dem Lernenden bleibt nichts weiter übrig, als diesen für ihn vom Himmel gefallenen Ansatz auf seine Berechtigung bzw. Richtigkeit hin zu überprüfen. Vor den Lösungsansatz gehört jedoch die Motivation, wie man gerade zu diesem Ansatz kommt. Mit einiger Mühe läßt sich dieses motivationale Problem in den meisten Fällen auf akzeptable Weise lösen. So etwa bei der Lösung der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung $y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0$ durch die Idee des Aufspaltens in zwei lineare Gleichungen erster Ordnung und deren simultane Lösung mit klassischen Mitteln des Mittelstufenunterrichts (Lösung quadratischer Gleichungen; Wurzelsätze von Vieta). Dieser heuristische Zugang ist so tragfähig, daß er zu zentralen Begriffsbildungen führt (charakteristische Gleichung, charakteristisches Polynom) und im Kern die Lösung aller linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten enthält. Andere heuristische Zugänge zur Lösung von Differenzengleichungen stellen die in Abschnitt [11.3] geschilderten Verfahren, insbesondere die auf dem Prinzip der Hochrechnung basierende empirische Methode, die Homogenisierung und die modulare Vorgehensweise dar. Ist die Gefahr der "Ansatzmethodik" gebannt, so eröffnen sich für den Unterricht die folgenden heuristischen und methodischen Möglichkeiten:

- Elementarisierung, Vereinfachung;
- empirisch/paradigmatische Fundierung;
- operatives parametrisches Lernen;
- geometrische Veranschaulichung;
- konstruktiv/algorithmisches Arbeiten, modulare (strukturierende) Vorgehensweise;
- genetische Vorgehensweise.

Die in Abschnitt [42.1] geschilderte inhaltliche Ausgewogenheit spiegelt sich also auch im heuristisch/methodologischen Rahmen wider. Im folgenden werden die obigen Stichworte näher erläutert.

a) Elementarisierung, Vereinfachung

Durch die diskretisierende Betrachtungsweise wird der begrifflich/technische Rahmen zur Behandlung vieler Probleme erheblich vereinfacht. An Stelle der sonst in vielen Anwendungen herangezogenen infinitesimalen Methoden (Differential- und Integralrechnung; Differentialgleichungen) werden nur noch im wesentlichen finite Methoden benutzt. Bis zur Behandlung von Differenzengleichung zweiter Ordnung (einschließlich) kommt man durchaus mit den klassischen Hilfsmitteln des Mittelstufenunterrichts aus; über weite Strecken benötigt man sogar nur die Grundrechenarten. Die durch Diskretisierung herbeigeführte Vereinfachung ist von der Sache her legitim; häufig werden kontinuierlich beschriebene Vorgänge sowieso - spätestens bei der Übertragung auf einen Digitalrechner - diskretisiert. Etwaige Grenzübergänge sind im Mittelstufenunterricht in propädeutischer Form auf naive Weise durchführbar. Entscheidend ist die Chance zur Vermeidung von trickreichen Ansätzen durch geeignetes methodisches Vorgehen.

b) Empirisch/paradigmatische Fundierung

Ein praktisch zu allen Zeiten unumstrittener Grundsatz des Mathematikunterrichts besagt, daß mathematische Begriffe und Inhalte an sorgfältig ausgesuchten Beispielen vorbereitet, entwickelt und erläutert werden sollten. Diese beispielsgebundene Vorgehensweise stellt methodisch gesehen einen der Hauptunterschiede zwischen dem Erlernen von Mathematik an Schule und Hochschule dar. Es kommt im Unterricht jedoch nicht auf die Anzahl der behandelten Beispiele, sondern auf ihre Typizität, ihren paradigmatischen Charakter an. Ein einziges schlagendes Beispiel ist oft geeignet, den Sinn einer schwer eingängigen abstrakten Definition oder eines mathematischen Sachverhaltes zu erhellen. Der Themenkreis "Differenzengleichungen und ihre Anwendungen" eignet sich sehr gut für ein solches exemplarisches Vorgehen; die auftretenden rekursiven Gleichungen lassen sich im allgemeinen gut anhand konkreter Sachsituationen diskutieren. Wir haben diesen Umstand bewußt dazu benutzt, um die behandelten Differenzengleichungen nicht nach ihrer systematischen Bezeichnung, sondern nach typischen Anwendungsfällen zu benennen (Tilgungsgleichung; Dynamische-Prämien-Gleichung; Fibonacci-Gleichung; Lagerhaltungsgleichung ...). In enger Verbindung mit der exemplarischen Vorgehensweise des Lehrers steht die empirische Methode als universelles heuristisches Prinzip für den Lernenden. Wir verstehen darunter im Kontext des Themas "Differenzengleichungen ..." die schrittweise Annäherung an die Lösung eines rekursiv beschriebenen Problems im folgenden Sinne:

1. Phase der Fundierung: Erwerb einer empirischen Basis durch konkrete, numerische "Hochrechnung" der Lösung einer rekursiven Gleichung, ausgehend von festen Anfangswerten (natürlich können so nur Anfangsstücke von Lösungsfolgen gewonnen werden, die aber beliebig weit fortsetzbar sind);

2. Phase der Hypothesenbildung; qualitativer Überblick:

   a) durch geeignete Gruppierung der hochgerechneten Daten in Wertetafeln und ihre graphische Darstellung in geeigneten Schaubildern (Hilfsmittel: Computer);

   b) durch Nachvollzug der numerischen Hochrechnung in Form einer Hochrechnung mit Variablen ($y_0, y_1, \ldots, y_n$) als Anfangswerten;

   Entdeckung von Gesetzmäßigkeiten bei der Entwicklung der Koeffizienten im Prozeß der Hochrechnung.

Die unter 2 a) und b) genannten Vorgehensweisen liefern globale Eindrücke vom Typ der Lösung und dienen der Hypothesenbildung im Hinblick auf die geschlossene Form der Lösung.

3. Phase der Verifikation: durch deduktive Bestätigung, daß die in 2. gewonnenen Hypothesen tatsächlich zu einer Lösung des Problems führen;

4. Phase der Sicherung, Verallgemeinerung und Reflexion: durch Gewinnung eines Überblicks über die komplette Lösungsgesamtheit.

In diesem abgestuften Verfahren kommt sehr gut die sich in fruchtbarer Weise ergänzende Wechselwirkung zwischen algorithmischer und struktureller Vorgehensweise zum Tragen (erstere vor allem in den Schritten 1 und 2; letztere in den Schritten 3 und besonders 4). Wir kommen auf diesen Aspekt noch unter Punkt e) zurück.

Schließlich wollen wir die Tatsache nicht unerwähnt lassen, daß sich das oben geschilderte stufenweise Verfahren sehr gut für Differenzierungszwecke im Unterricht eignet. Die Teilschritte 1 und 2 dürften im allgemeinen von allen Schülern zu bewältigen sein. Da mit ihnen ein erster Abschluß - nämlich die Lösung des Problems auf empirisch/induktiver Ebene - gegeben ist, sind sie durchaus geeignet, auch dem weniger leistungsstarken Schüler Erfolgserlebnisse zu vermitteln. Die intellektuell anspruchsvolleren deduktiv/strukturellen Vorgehensweisen in 3 und 4 dürften dagegen häufig den leistungsstärkeren Schülern vorbehalten bleiben. Selbst der professionell arbeitende Mathematiker muß sich ja gelegentlich mit einer empirisch/induktiv gefundenen Lösung begnügen. Das oben geschilderte schrittweise Verfahren enthält u. E. die Bausteine eines oft zyklisch ablaufenden heuristischen Prozesses, den wir in Abbildung 42.2 graphisch dargestellt haben.

c) Operatives parametrisches Lernen

Eine der Grundfragen beim operativen Vorgehen lautet: "Was geschieht, wenn ...?" Im Themenkreis "Differenzengleichungen ..." gibt es viele Fragen von diesem Typ; etwa: "Was geschieht, wenn wir die Anfangswerte eines Problems verändern?", "Was geschieht, wenn wir die Koeffizienten (Parameter) einer Gleichung verändern?", "Was geschieht, wenn man den Grad einer Gleichung erhöht oder reduziert, die Inhomogenitätsfunktion variiert?" usw. Besonders im Rahmen der empirischen Lernmethode läßt sich das Variieren der Parameter etwa über flexible Eingabemöglichkeiten am Computer oder über gezielte Parameterdurchlaufschleifen gut einbringen. Eine ideale Ergänzung stellen hierbei analoge Geräte dar, wo man das Variieren der Parameter ganz konkret durch das "Drehen an Einstellknöpfen" realisieren kann. Auch graphische Ausgabemöglichkeiten, mit deren Hilfe die jeweiligen Ergebnisse gleich in bildhaft anschaulicher Form darstellbar sind, können bei diesem "parametrischen Lernen" von großem Nutzen sein.

Notwendig erscheint uns die Feststellung, daß die Variation der

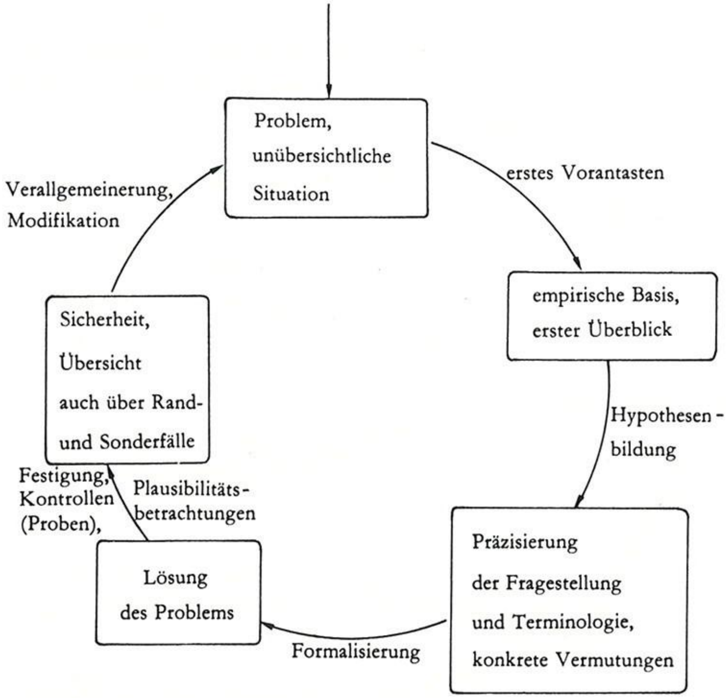


Abb. 42.2 "Heuristischer Zyklus"

Parameter stets in kontrollierter Form vorgenommen werden sollte; durch ein wildes gleichzeitiges Drehen an allen Knöpfen wird selten eine Erkenntnis über die Wirkungsweise der verschiedenen Einflußfaktoren zu gewinnen sein. Dieser Gesichtspunkt ist u. E. übrigens auch bei den sonstigen Unterrichtsthemen zu beherzigen. So wird der Schüler z. B. nur dann einen Einblick in die Linearitätsverhältnisse der Prozentrechnung gewinnen, wenn von den drei Daten Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz stets nur eines in systematischer Weise variiert und diese Variierung in Verbindung mit dem Werteverlauf der anderen Variablen graphisch umgesetzt wird. Aus den üblicherweise angegebenen drei Grundaufgaben der Prozentrechnung werden so bei näherem Hinsehen sechs, je nachdem, welche der drei Größen konstant gehalten wird, welche die unabhängige Variable und welche die abhängige Variable darstellt (siehe Abb. 42.3).

Auch in anderen mathematischen Gebieten führt die der operativen Vorgehensweise entsprechende systematische Variation des jeweiligen Kontextes zu den typischen Grundaufgaben dieses Gebietes; siehe etwa die Grundaufgaben zur arithmetischen Folge in Aufgabe 1.12 bzw. zur geometrischen Folge in Aufgabe 3.11.

d) Geometrische Veranschaulichung

Dazu ist im Zusammenhang mit der empirischen Methode und den Ausführungen zum operativen parametrischen Lernen schon einiges gesagt worden. Es bleibt nur noch darauf hinzuweisen, daß gerade der dynamische Charakter rekursiver Probleme durch die geometrische Veranschaulichung besonders deutlich zum Tragen kommt. Diese Art der

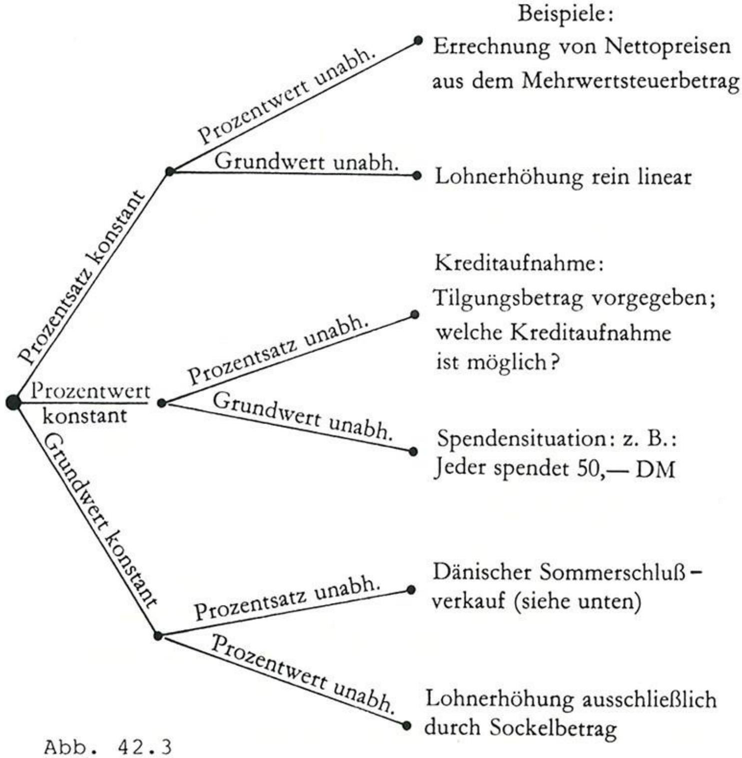


Abb. 42.3
Die Grundaufgaben des Prozentrechnens in operativ-funktionaler Auffassung
Bemerkung zum dänischen Sommerschlußverkauf: Er findet in einer festgelegten Woche von Montag bis Freitag statt. Am Montag werden alle Waren um 10 %, am Dienstag um 20 %, ... , am Freitag um 50 % reduziert.

Veranschaulichung besitzt u. E. eine eigenständige heuristische Qualität. Besonders deutlich wird dies z. B. in § 8, wo letztlich die graphische Darstellung von empirisch gewonnenen Lösungsfolgen der Tilgungsgleichung den Hinweis auf die Rückführbarkeit des Tilgungsprozesses (durch Koordinatentransformation) auf den wohlbekannten Sachverhalt der geometrischen Folge ermöglicht, wodurch das Tilgungsproblem mit einem Schlage völlig geklärt wird.

e) Konstruktiv/algorithmisches Arbeiten

Der rekursive Charakter von Differenzengleichungen oder der ihnen zugrundeliegenden Sachsituationen fordert geradezu den Einsatz von Computern zur Hochrechnung von Lösungen heraus. In diesem Sinne spiegelt sich die Rekursivität der zu behandelnden Gleichungen allerdings nicht in - syntaktisch gesprochen - rekursiven Algorithmen (etwa in Form von sich selbst aufrufenden Prozeduren) wider, sondern die meisten Algorithmen sind durchaus iterativer Natur. Dies kommt besonders der Speicher- und Laufzeitökonomie zugute, obwohl letztere Gesichtspunkte im Rahmen der unterrichtlichen Behandlung u. E. gegenüber den Forderungen nach Klarheit, guter Gliederung und guter Dokumentation der Algorithmen zurückstehen müssen.

Es gibt aber auch durchaus eine Fülle algorithmischer Probleme, wo gerade die Rekursivität des Algorithmus eine zentrale Rolle bei der Lösung des Problems spielt (z. B. rekursive "Wechselwegnahme" beim Euklidischen Algorithmus; rekursive Strategien bei gewissen Sortierverfahren wie z. B. "Quicksort", "Sortieren durch Mischen"; rekursive Strategien in Spielen, wie z. B. "Turm von Benares").

Das algorithmische Element ist also ein zentraler Bestandteil in der heuristischen Vorgehensweise. Die von festen Anfangswerten ausgehende Hochrechnung liefert stets einen Gesamtüberblick über eine Lösungsfolge. Ist man jedoch nur an einer Einzelauswertung, etwa dem zehntausendsten Glied der Lösungsfolge, interessiert, so wird man im allgemeinen auf die explizite Lösung in geschlossener Form zurückgreifen, falls diese überhaupt verfügbar ist. Da man geschlossene Lösungen im allgemeinen nur durch Anwendung algebraischer, struktureller Methoden erhält, ist der Themenkreis "Differenzengleichungen ..." u. E. besonders gut geeignet, die Wechselwirkung zwischen algorithmischen und strukturellen Arbeitsweisen aufzuzeigen und dadurch zu einem ausgewogeneren Bild von der Mathematik beizutragen.

Daß Algorithmen grundsätzlich konstruktiver Natur sind, wurde bereits erwähnt und ist unmittelbar einsichtig. Die syntaktischen Möglichkeiten der neueren Programmiersprachen eröffnen die Chance, die Technik des modularen, gegliederten Problemlösens unmittelbar in die Formulierung des Lösungsalgorithmus umzusetzen. Wesentliche syntaktische Sprachelemente, die eine solche Unterteilung eines Problems in Teilprobleme und die geordnete Zusammenführung der Teillösungen zu einer Gesamtlösung ermöglichen, sind das (insbesondere auch rekursive) Prozedurkonzept, das Paket- und Refinementkonzept sowie Möglichkeiten der Datengliederung und Datenabstraktion.

Die algorithmische Denk- und Arbeitsweise eröffnet u. E. darüber hinaus die Möglichkeit zur Vertiefung des Variablenverständnisses. Beim Arbeiten mit dem Cumputer kommt sowohl der syntaktische als auch der semantische Aspekt des Variablenbegriffes zum Tragen. Der syntaktische Aspekt - die Variable als Leerstelle, als Platzhalter - ist durch die physische Realisierung von Variablen in ganz bestimmten Speicherzellen und mit der Wertzuweisung als Vorgang des Überschreibens gegeben. Der semantische Aspekt - die Variable als Name, Kurzbezeichnung - spielt in der Phase der Algorithmierung und Programmierung (Festlegung von Namen als Identifikatoren) eine Rolle. Ein Problem, das sich aus der Algorithmierung für den normalen Mathematikunterricht ergibt und dem in geeigneter Weise Rechnung getragen werden muß, besteht darin, daß Variablenbezeichnungen, die bei der Konstruktion eines Algorithmus entstehen, häufig zugleich abkürzende, aber auch aussagekräftige Zeichenkonglomerate sind, was beim Prozeß des freien Konkatenierens in der Mathematik bei unvorsichtigem Gebrauch Konflikte hervorrufen kann.

Insgesamt kann man sagen, daß sich der syntaktische Aspekt des Variablenbegriffes beim Rechner auf der hardware- und maschinenorientierten Ebene, der semantische Aspekt dagegen eher auf der Software-Ebene widerspiegelt. Nachdem in der letzten Zeit im Rahmen von Vorschlägen zur größeren begrifflichen Strenge u. E. der syntaktische Aspekt des Variablenbegriffes überbetont wurde, kommt bereits der verstärkten und somit ausgleichenden Betonung der semantischen Komponente beim Vorgang des Algorithmierens eine positive Bedeutung zu.

f) Genetische Vorgehensweise

Die in Abschnitt [42.1] skizzierte spiralförmige Art der Eingliederung von Themen aus dem Gebiet "Differenzengleichungen ..." in den Mathematikunterricht ist u. E. geeignet, zwei methodischen Zielen zu dienen: In der nach vorn gerichteten Perspektive dienen die jeweiligen Themenkreise dem Ziel der Motivation und der Schaffung von Lernvoraussetzung für kommende Fragestellungen; in der Retrospektive dienen sie der Reflexion, Analyse und Anwendung bereits früher behandelter Themen. In beiden Fällen sind der spiralförmige Aufbau und ein dichtes Beziehungsgefüge geeignet, den natürlichen Ablauf des Lernprozesses zu unterstützen und insbesondere der Stabilisierung und Festigung im Lernprozeß zu dienen.

§ 43 Das Arbeiten mit Modellen

Ein vorrangiges Ziel des Mathematikunterrichts auf ziemlich hoher Stufe jeder Lernzielhierarchie ist das der Mathematisierung. Ihr liegt implizit oder explizit praktisch immer ein Denken und Arbeiten im Rahmen von Modellen zugrunde. In den klassischen Anwendungsfeldern des traditionellen Mathematikunterrichts der Mittelstufe, etwa im Sachrechnen oder in der Physik, waren die zugrundeliegenden Modelle meist von kanonischer Natur, so daß dem Prozeß des Modellbildens vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Erst durch die Einbringung nichtklassischer Gebiete in den Unterricht, wie Stochastik, Algorithmik, und verbreiterte Anwendungsorientierung trat der Modellentwurf stärker in den Vordergrund.

Der Begriff des Modells selbst ist letztlich philosophisch/erkenntnistheoretischer Natur. Im weitesten Sinne stellt ein Modell ein analogiebehaftetes Abbild eines gewissen Originals dar, das meist, aber nicht immer ein Bestandteil der "realen Außenwelt", der Realität ist. Im Hinblick auf die Analogie zwischen Modell und Original ist dabei im allgemeinen eher der Aspekt ihrer äußeren, beobachtbaren Verhaltensweisen als der ihrer inneren Funktionsmechanismen von Bedeutung. Die Verhaltensanalogie besagt, grob gesprochen, daß bei analoger Variierung der Eingabedaten in Modell und Original auch die Ausgabedaten in analoger Weise variieren sollten. Über die Transformationsprozesse, die sich innerhalb des Modells abspielen, braucht dabei im einzelnen nichts bekannt zu sein. Man spricht im Extremfall von einem Black-box-Modell, wo nur Eingabe und Ausgabe beobachtbar bzw. bekannt sind.

Ein Beispiel: Die mathematische Grundrechenart "Addieren" stellt ein Modell für die Tätigkeit des Zusammenlegens realer Gegenstände wie Äpfel, Stühle, Stäbe, Flächen dar. Ein Taschenrechner kann als Modell für die Zahlen und ihre Verknüpfungen angesehen werden. Ist die innere Verdrahtung unbekannt, so wird der Taschenrechner als Black box verwendet. Dennoch läßt sich beim Vorliegen verschiedener Taschenrechner allein durch geeignetes Variieren der Eingabedaten erkennen, ob sie nach denselben oder nach unterschiedlichen Rechenregeln, wie z. B. Gültigkeit oder Ungültigkeit der Punkt-vor-Strich-Regel (Hierarchie) arbeiten.

Der Grad der Analogie zwischen Original und Modell kann außerordentlich verschieden sein. Der Taschenrechner stellt ein Modell hohen Analogiegrades für die Grundrechenarten dar, sonst würde man ihn nicht benutzen. Die Analogie ist jedoch nicht hundertprozentig, da etwa der Zahlbereich des Taschenrechners im Gegensatz zum Zahlbereich der rationalen Zahlen endlich ist und dadurch gewisse Pathologien wie die Ungültigkeit des Assoziativ- oder des Distributivgesetzes auftreten können. Eine extrem scharfe Analogieforderung liegt den innermathematischen Modellen zugrunde, wo sich etwa ein axiomatisch definierter Begriff, wie der Begriff der Gruppe, in einer konkret konstruierten und analog strukturierten Menge widerspiegelt (hier z. B. in der Menge der rationalen Zahlen, strukturiert durch ihre Addition und die Zahl Null, oder in der Menge der positiven rationalen Zahlen, strukturiert durch die Multiplikation und die Zahl 1 als Neutralelement).

Die Verwendung von Modellen erfolgt im allgemeinen aus pragmatischen Motiven heraus, etwa, weil das Original zu komplex oder zu abstrakt ist. Modelle dienen also meist der Vereinfachung, Konkretisierung und Veranschaulichung von Originalen. Dies kann im allgemeinen nur dann erreicht werden, wenn das Modell im Vergleich zum Original relativ einfach strukturiert, wenn also der Grad der Analogie nicht allzu groß ist. Dies trifft insbesondere auf die meisten mathematischen Modelle zur Beschreibung von Sachverhalten aus dem Bereich der Wirtschafts-, Sozial- und Sprachwissenschaften zu.

Im Rahmen der Diskussion des Modellbegriffes sind in diesem Zusammenhang die Aspekte

- Modellerstellung: Entwurf, Konstruktion, Interpretation, Korrektur und Verfeinerung von Modellen und

- Klassifikation von Modellen anhand charakteristischer Merkmale

von Bedeutung.

a) Modellerstellung

Bei der Erstellung von Modellen ist es wichtig, die Abbildung vom Original zum Modell so durchzuführen, daß das Modell durchsichtiger und leichter zu handhaben ist als das abzubildende Original. Dies läßt sich auf zwei verschiedene Weisen erreichen: durch Weglassen von "unwichtigen" Merkmalen (Reduktion) und durch Zusammenfassen von verschiedenen Begriffen zu einem Oberbegriff (Aggregation). Modellbildung bedeutet damit praktisch immer Verminderung von Komplexität unter Wahrung der wichtigsten Systemzusammenhänge. Häufig ist nicht unmittelbar klar, was wichtig oder unwichtig ist und was legitimerweise zusammengefaßt werden darf. Entscheidendes Kriterium für die Güte eines Modells ist das Maß an Übereinstimmung der Verhaltensweisen von Modell und Original in den jeweils relevanten Aspekten.

In den meisten Fällen ist der Prozeß der Modellerstellung kein einmalig ablaufender und danach abgeschlossener Vorgang, sondern die Konstruktion läuft ab als potentiell unendlicher Prozeß zyklischen Charakters, bestehend aus den Komponenten Modellentwurf und -beschreibung, Vergleich des Modellverhaltens mit dem Verhalten des Originals und eventuell Korrektur des Modells. Der Prozeß der Modellerstellung ist dadurch als ein Regelkreis im Sinne der Kybernetik beschrieben. In diesem kybernetischen Zusammenhang betrachtet man an Stelle von beliebigen Originalen meist rückgekoppelte Systeme dynamischen Charakters. Der Prozeß der Modellerstellung selbst ist dabei auch ein derartiges dynamisch rückgekoppeltes System zur kontinuierlichen Korrektur und Verfeinerung des jeweiligen Modells. In Abbildung 43.1, wo dieser Regelkreis schematisch dargestellt ist, verwenden wir deshalb auch den Begriff "System" an Stelle von "Original".

Eine Schwierigkeit bei der Erstellung und Korrektur von Modellen liegt darin, daß es oft nicht möglich ist, Eingangsdaten, die zum

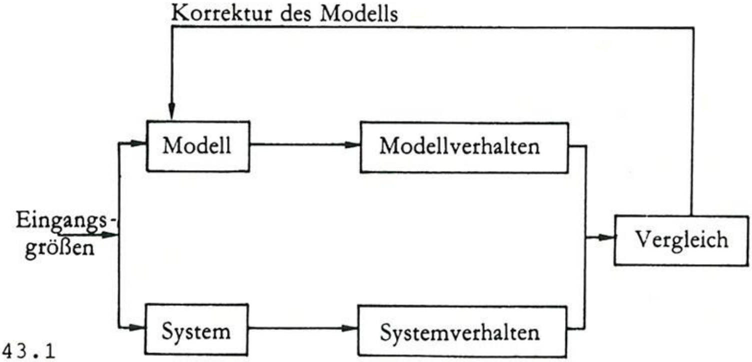


Abb. 43.1

Testen des Modells gebraucht werden, auch auf das reale System zu leiten. So lassen sich z. B. Ergebnisse aus Tierversuchen in der Medizin oft nicht ohne weiteres auf den Menschen übertragen. Oder um in der Volkswirtschaft ein Konjunkturmodell zu testen, kann man nicht eine wirtschaftliche Rezession künstlich herbeiführen.

Ein zentraler Vorgang beim Vergleich von Modell- und Systemverhalten ist die Interpretation von Modellsituationen im System und umgekehrt. Hierbei kann besonders im Unterricht die Erstellung eines Übersetzungslexikons hilfreich sein. Bei der Beschreibung stochastischer Situationen durch graphentheoretische Darstellungsmittel könnte ein solches Lexikon etwa wie folgt beginnen:

Original	$\longleftrightarrow$	Modell
Zustand	$\longleftrightarrow$	Ecke: ○
Übergang	$\longleftrightarrow$	Pfeil, gerichtete Kante $\longrightarrow$
Maß für die Häufigkeit eines Überganges	$\longleftrightarrow$	Übergangswahrscheinlichkeit p $(0 \leq p \leq 1)$
absorbierender Zustand	$\longleftrightarrow$	

Für andere Beispiele siehe etwa U. Beck, Zur Didaktik der Anwendungen innerhalb eines ausgewogenen Mathematikunterrichts, Dissertation, Pädagogische Hochschule Dortmund, 1979.

b) Klassifikation von Modellen

Die Klassifikation von Modellen kann nach verschiedenen Kriterien erfolgen.

Klassifikation nach dem Zweck

Erklärungsmodelle dienen dem besseren Verständnis der Verhaltensweise eines Systems; sie sind allerdings nicht immer so weit verfeinert, daß sie konkrete Vorhersagen im Hinblick auf das Systemverhalten erlauben. So sind z. B. Räuber-Beute-Modelle der Bioökologie geeignet, gewisse Phänomene wie Periodizitäten oder Aussterben intrinsisch zu erklären. Man braucht also z. B. zur Erklärung von Periodizitäten nicht auf eine Theorie der Sonnenflecken zurückzugreifen. Dennoch sind sie jedenfalls in der hier dargestellten Form im allgemeinen viel zu grob, um konkrete Vorhersagen zu erlauben. Letzteres macht sie aber durchaus nicht wertlos, denn die Erklärbarkeit intrinsischer Phänomene ist von durchaus eigenständigem Wert.

Prognosemodelle gehen noch einen Schritt weiter und dienen zur Abschätzung von zukünftigen Entwicklungen eines Systems. Sie sind von Natur aus an einen hohen Grad von Analogie zwischen Modell und System gebunden und setzen deshalb oft eine außerordentlich hohe Anzahl von Modellvariablen und -daten voraus, z. B. in der Wettervorhersage. Die Behandlung von Prognosemodellen im Unterricht ist zwar äußerst motivierend - z. B. Wahlhochrechnungen -, scheitert aber oft an dem sachlich bedingten hohen Komplexitätsgrad des Modells.

Entscheidungsmodelle dienen schließlich dem Auffinden von "optimalen" Verhaltungsweisen und werden gelegentlich im Bereich der Wirtschaft, insbesondere bei der Führung von Unternehmen, eingesetzt.

Klassifikation nach dem Mittel

Materiale Modelle sind meist verkleinerte Nachbildungen eines Originals, z. B. Globus als Modell der Erdkugel, Wasserkreislauf als Modell eines Stromkreises. Sie dienen meist als Erklärungsmodelle.

Abstrakte Modelle sind Beschreibungen realer Systeme durch natürliche oder formale Sprachen. Insbesondere liegt mathematischen Modellen, wie wir sie auch in den vorangegangenen Kapiteln in vielfältiger Form kennengelernt haben, die (Formel-)Sprache der Mathematik zugrunde. Auch Programmiersprachen gehören zu den formalen Sprachen.

Klassifikation nach dem Zeitverlauf

Statische Modelle beschreiben den Zustand eines Systems zu einem festen Zeitpunkt. Sie sind also zur Beschreibung von sich ändernden Systemen ungeeignet.

Im Gegensatz dazu wird in dynamischen Modellen der zeitliche Verlauf der Systemgrößen dargestellt.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung betrachten wir schließlich noch die charakteristischen

c) Eigenschaften mathematischer Modelle

Deterministische und stochastische Modelle

Sind alle in einer Modellierung auftretenden Parameter feste Werte, so bezeichnet man das Modell als deterministisch. Bei stochastischen Modellen dagegen liegt die Information über bestimmte Parameter nur in Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Maßzahlen wie Mittelwert und Streuung vor. In stochastischen Modellen kann man demgemäß als Ergebnisse ebenfalls nur stochastische Größen, z. B. Erwartungswerte, erhalten.

Bei unserer Diskussion von Modellen in den vorangegangenen Kapiteln standen zweifellos deterministische Modelle im Vordergrund. Eine sinnvolle Ergänzung und Weiterführung dieses Projekts kann durch wesentlich stärkere Einbringung stochastischer Modelle erfolgen. Gerade bei derartigen Modellen erweist sich der Computereinsatz zum Zwecke der Simulation als äußerst nützlich.

Lineare und nichtlineare Modelle

Lineare Systeme treten in Reinform in der Realität selten auf, in angenäherter Form dagegen häufiger. Wegen ihrer außerordentlich guten mathematischen Handhabbarkeit nehmen lineare Modelle in der Mathematik dennoch einen breiten Raum ein; siehe z. B. "Angebot-

Nachfrage-Zyklen" in § 9. Von besonderer Bedeutung im Mathematikunterricht, wo lineare Modelle insbesondere im Themenkreis "Proportionalität" eine ausschlaggebende Rolle spielen, ist das Bewußtmachen der Grenzen für den Gültigkeitsbereich des jeweiligen Modells, z. B. häufiges Abgehen von der Linearität im kaufmännischen Bereich durch das Gewähren von Rabatten.

Die Linearität als wichtige Modelleigenschaft schlägt natürlich auch bei den von uns behandelten und durch Differenzengleichungen mathematisierten rekursiven dynamischen Prozessen voll durch. Die linearen Differenzengleichungen spielen eine besondere Rolle. Durch die größere Verfügbarkeit von Computern sind allerdings jetzt auch nicht lineare Modelle besser handhabbar, allerdings im wesentlichen durch die Methode des rekursiven Hochrechnens und nicht in Form geschlossener Lösungen.

Diskrete und kontinuierliche Modelle

Einer der grundlegenden Parameter bei den meisten Modellbeschreibungen ist die Zeit. Will man den in der Realität üblicherweise als kontinuierlich angesehenen Zeitablauf im Modell wiedergeben, so benötigt man die Theorie der stetigen reellen Funktionen und insbesondere ihrer Differentialgleichungen, also Hilfsmittel, die dem Mathematikunterricht selbst in der Oberstufe im allgemeinen nicht zugänglich sind.

Ein entscheidendes Mittel der Vereinfachung und Elementarisierung liegt in der Diskretisierung des Problems, also im Hinblick auf den Zeitparameter in der "Quantelung" der Zeit in Intervalle von fester Länge. Durch Verkleinerung der Intervallängen kann der kontinuierliche Verlauf beliebig genau angenähert werden.

An mathematischen Hilfsmitteln werden statt stetiger reeller Funktionen dann nur noch Folgen reeller Zahlen und statt Differentialgleichungen nur noch meist elementar handhabbare Differenzengleichungen benötigt. Wir vertreten die Auffassung, daß die Methode der diskreten Beschreibung von Modellen im Vergleich zur kontinuierlichen Beschreibung nicht als "notwendiges Übel" anzusehen, sondern von völlig eigenständigem Wert ist, weil

- viele Anwendungssituationen bereits von ihrer Problemstruktur bzw. von der Datenermittlung her diskreter Natur sind (dies besonders in den Wirtschaftswissenschaften und im Bereich der Markoffschen Ketten);
- auch kontinuierlich beschriebene Modelle bei ihrer Übertragung auf digital arbeitende Computer sowieso "im nachhinein" diskretisiert und ihre Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen approximiert werden müssen. Das den Differentialgleichungen optimal angepaßte Hilfsmittel ist eigentlich der analog arbeitende Computer, der allerdings weit weniger verbreitet ist als der Digitalrechner.

Wir haben uns deshalb konsequent bemüht, den Weg der Diskretisierung von Anfang an, also bereits vom Stadium der Begriffsbildung aus, zu beschreiten. Andererseits sind wir jedoch der Auffassung, daß die Behandlung von Differenzengleichungen im Unterricht auch ihre Grenzen hat. Mit dieser Darstellung wollten wir aufzeigen, wie weit man durch die konsequente Anwendung elementarer Techniken aus dem Bereich der Differenzengleichungen in interessante Fragestellungen vorstoßen kann. Eine Dogmatisierung dieser Vorgehensweise liegt uns jedoch fern. Dem in seinem Unterrichtsfach souveränen Lehrer dürfte klar sein, daß ein fließender Übergang zu kontinuierlichen Techniken (Integral- und Differentialrechnung, Differentialgleichungen) fast an jeder Stelle möglich ist. Dies betrifft insbesondere die Erarbeitung expliziter Lösungen von komplizierteren Gleichungen.

LITERATURVERZEICHNIS

Auf Zeitschriftenartikel wurde weitestgehend verzichtet.

Bayrhuber, H., Schaefer, G.: Kybernetische Biologie, Aulis Deubner-Verlag, Köln 1978

Beck, U. : Zur Didaktik der Anwendungen innerhalb eines ausgewogenen Mathematikunterrichts, Dissertation, Pädagogische Hochschule Ruhr in Dortmund 1979

Böhme, G. (Hrsg.): Anwendungsorientierte Mathematik, Band 4: Aktuelle Anwendungen der Mathematik, J. Springer Verlag, Berlin 1977

Bork, A. M. : Notions about Motion, Freeman and Company, San Francisco

Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1964

Dorn, F., Bader, F.: Physik Oberstufe M, Schroedel-Verlag, Hannover 1975

Dürr, R. : Methoden zur mathematischen Behandlung großer Systeme, Zulassungsarbeit, Fachbereich Physik, Universität Tübingen 1976

Engel, A. : Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1977

Engel, A. : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1 und 2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973 und 1976

Engel, A. : Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle; Der Mathematikunterricht, Heft 17, 1971, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Engel, A. : Computerorientierte Mathematik; Der Mathematikunterricht, Heft 2, 1975, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Engel, A. (Hrsg.): Algorithmen; Der Mathematikunterricht, Heft 6, 1979, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Fillbrandt, W. : Algorithmische Beschreibung physikalischer Vorgänge in der Dynamik, Zulassungsarbeit, Pädagogische Hochschule Esslingen 1978

Fletcher, T. J.: Linear Algebra through its Applications, van Nostrand, London 1972

Gardner, M. : Beweise algebraischer Formeln durch Betrachtung graphischer Darstellungen; Didaktik der Mathematik, Heft 4, 1974, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München

Gerthsen, Chr., Kneser, H. O. : Physik, J. Springer Verlag, Berlin 1971

Goldberg, S.: Introduction to Difference Equations, John Wiley & Sons, New York 1958

Jensen, K., Wirth, N. : Pascal-User Manual and Report, J. Springer Verlag, New York 1975

Kirsch, A.: Elementare Zahlen- und Größenbereiche, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970

Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht; Didaktik der Mathematik, 1976, 257 - 284, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München

Knopp, K.: Elemente der Funktionentheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1971

Konradt, W., Haas, W. : Finanz- und Wirtschaftsmathematik, Winklers Verlag - Gebrüder Grimm, Darmstadt

Krüger, K. : Finanzmathematik, Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1977

Lietzmann, W.: Anschauliche Arithmetik und Algebra, Physica Verlag, Würzburg 1956

Lighthill, J. (Hrsg.): Newer Uses of Mathematics, Penguin Books 1978

Markuschewitsch, A. I.: Rekursive Folgen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977

Mayer-Kuckuk, T.: Physik der Atomkerne, Teubner Verlag, Stuttgart 1974

Meadows, D. : Die Grenzen des Wachstums, Rowohlt Verlag

Meschkowski, H.: Differenzengleichungen, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1959

Müller, F.: Preisschwankungen in der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung, Habilitationsschrift, Universität Tübingen 1982 (korrig. Ex.)

Nöbauer, W., Timischl, W.: Mathematische Modelle in der Biologie, Friedr. Vieweg Verlag, Braunschweig 1979

Oberschelp, A. : Aufbau des Zahlensystems, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1968

Ott, A. E.: Einführung in die dynamische Wirtschaftstheorie, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970

Rommelfanger, H.: Differenzen- und Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut, Zürich 1977

Rorres, Ch., Anton, H.: Applications of Linear Algebra, John Wiley & Sons New York 1977

Schaefer, G., Trommer, G., Wenk, K. (Hrsg.): Wachsende Systeme, Georg Westermann Verlag, Braunschweig 1976

Smith, J. M. : Mathematical Ideas in Biology, Cambridge University Press, Cambridge 1968

Spiegel, M. R. : Finite Differences and Difference Equations, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, New York 1971

Stobbe, A.: Volkswirtschaftliches Rechnungswesen, J. Springer Verlag, Berlin 1969

Stobbe, A.: Wirtschaftskreislauf und Sozialprodukt, in: Kompendium der Volkswirtschaftslehre, Band 1 (Hrsg.: *W. Ehrlicher* et al.), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1972

Stowasser, R. (Hrsg.): Materialien zum problemorientierten Unterricht I, II, III, IV; Der Mathematikunterricht, Heft 3 (1976), Heft 1 (1977), Heft 6 (1978), Heft 2 (1979), Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Stowasser, R., Mohry, B.: Rekursive Verfahren, Hermann Schroedel Verlag, Hannover 1978

v. d. Waerden, B., L.: Algebra, Erster und zweiter Teil, Springer Verlag, Berlin 1966 und 1967

Wilson, E. O., Bossert, W. H.: Einführung in die Populationsbiologie, Springer Verlag, Berlin 1973

Winkelmann, B. (Hrsg.): Mathematische Modelle in der Biologie, Band I, Institut für Didaktik der Mathematik, Bielefeld 1979

Woll, A.: Allgemeine Volkswirtschaftslehre, Verlag Vahlen, München 1978

Worobjow, N. N.: Die Fibonaccischen Zahlen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971

Wynands, A., *Wynands, U.*: Elektronische Taschenrechner in der Schule, Friedr. Vieweg Verlag, Braunschweig 1978

SACHWORTVERZEICHNIS

Das Kürzel def weist auf Definitionen hin.

abelsche Gruppe 69
Abgeschlossenheit 68
acceleration 267
Aggregation 305
Aktivität radioaktiver Substanzen 289
algebraisches Komplement 128 def
Algorithmus 18, 294
allgemeine Lösung 80, 99 def, 145
alpha-Zerfall 288
Altersbestimmung (C-14-Methode) 24
Amplitude 244, 279
Angebot-Nachfrage-Zyklen 61
Anlageinvestition 249
aperiodischer Fall 281
archimedische Eigenschaft 13 def
Argument 106 def
arithmetische Folge 11, 14 def, 18, 43
arithmetisches Mittel 184
Assoziativität 68
asymmetrische Irrfahrt 175
Ausgabesymbol 18
autonome Investitionen 252

Bakterienkultur 225
Barwert einer Rente 50
BASIC 19
Basis 93 def, 140
Bausparen 50, 232
Bausparvertrag, Zuteilung 232
Bernoullische Ungleichung 29
Beschleunigung 267, 271
Beschleunigung, mittlere 267 def
beta-Zerfall 288
Betrag 106 def
Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit 266
Bewegung, gleichförmig beschleunigte 268
Bewegung, gleichförmige 267
Black-box-Modell 304
Bruttosozialprodukt 249

charakteristische Gleichung 89 def, 130
charakteristisches Polynom 89 def, 130, 143
chemische Reaktion 226
C-14-Methode (Altersbestimmung) 24
cobweb diagram 64

Darlehen 46
Darstellung, explizite, 41
Darstellung, rekursive 41
Definition, rekursive 29
Determinante 97, 126 def
Determinantenkriterium 97, 126
deterministische Modelle 307
Dienstleistungen 247
Differenzenfolge 31
Differenzengleichung 40 def
Differenzengleichung, lineare 43 def, 114
Differenzen, höhere 33
Differenzenschema 34
Dimension 94 def
diskrete Modelle 308
Diskriminante 110 def
divergente Folge 56 def
Dreieckszahlen 158
Durchschnitt, g-gliedriger gleitender 184 def
Durchschnitt, gleitender 184 def
Durchschnittsgeschwindigkeit 267 def
dynamische Modelle 307
Dynamische-Prämien-Gleichung 73
dynamische Prämiensteigerung 73

Eigenfrequenz 282
eindimensionaler Vektorraum 71
Eingabesymbol 18
Einheitsvektor 94
Einkommenskonto 248, 250
Einkommensteuer 36
empirische Methode 75
Endwert einer Rente 50
Entscheidungsmodelle 307
Entwicklung einer Determinante 128
Erklärungsmodelle 306
Ersparnis 250
erste Mittelwertsregel 171
Ertrag 203
Erzeugendensystem 93 def
erzwungene Schwingung 281
explizite Darstellung 41
explosives Wachstum 205
exponentielles Wachstum 199
ex-post-Gleichheit 253

faires Glücksspiel 180
Fakultät 29 def
Fallbewegungen 272
Fall, freier 272

Fall im lufterfüllten Raum 273
Federkonstante 276
Federrichtgröße 276
Fibonacci-Gleichung 87
Fibonacci-Gleichung, verallgemeinerte 87 def, 98, 111
Fibonacci-Zahlen 87 def, 99, 161
figurierte Zahlen 158
Flächeninhalte 165
Fluchtgeschwindigkeit 284, 287
Flußdiagramm 18
Folge 13 def
Folge, arithmetische 11, 14 def, 43
Folge, divergente 56 def
Folge, geometrische 20 def, 39 43
Folge, konvergente 56 def
Folge, monoton fallende 55 def
Folge, monoton wachsende 55 def
Folge, oszillierende 57 def
Folge, polynomiale 39
Folgereaktion 227
Folge, streng monoton fallende 55 def
Folge, streng monoton wachsende 55 def
force 271
Formel von Moivre 108
freier Fall 272
freie Schwingung 276
freies Marktpotential 210
freies Wachstum 199
freie Variable 120
Fünfeckszahlen 160
Fundamentalsatz der Algebra 108
Fundamentalsystem 98

gamma-Zerfall 288
Gaußscher Algorithmus 116
Geburten 194 def
Geburtenfunktion 194 def
Geburtenrate 194 def
gedämpfte Schwingung 276, 280
Gehälter 249
Geld 247
geometrische Folge 20 def, 39, 43
geometrisches Wachstum 19, 199
gerade Permutation 127
Geschwindigkeit 266 def
Geschwindigkeit, konstante 266
Geschwindigkeit, mittlere 267 def
Geschwindigkeit, nichtkonstante 267
Gewinne 249
g-gliedriger gleitender Durchschnitt 184 def
gleichförmig beschleunigte Bewegung 268
gleichförmige Bewegung 267
Gleichgewicht 153, 203, 205
Gleichgewicht, labiles 205
Gleichgewicht, radioaktives 293
Gleichgewicht, stabiles 205
Gleichgewicht, stationäres 219
Gleichgewichtswert 155 def
Gleichgewichtswert, stabiler 155 def
Gleichgewichtszustände in Räuber-Beute-Systemen 219
Gleichgewicht, temporäres 219
Gleichungssystem, lineares 115
gleitender Durchschnitt 184 def
Glücksspiel 180
Glücksspiel, faires 180
Grad eines Polynoms 36
Graph 171
Gravitationsgesetz 283
Gravitationskraft 283
Grenzwert einer Folge 56 def
Grundaufgaben der Prozentrechnung 302
Grundgleichung der Mechanik 272
Gruppe 69
Gruppe, abelsche 69
Gruppe, kommutative 69
Güter 247

Halbwertszeit 24, 289 def
Hanau, Schweinezyklus 61
harmonische Schwingung 275
Harrod, Modell von 258
Haushalte, private 247
Heron, Verfahren von 190
Hexagonalzahlen 160
Hicks, Modell von 258, 261
Himmelsmechanik 283
höhere Differenzen 33
homogene lineare Differenzengleichung 44 def, 82
homogenes lineares Gleichungssystem 116
homogenisierte Gleichung 83
Homogenisierung 82, 143
Hookesches Gesetz 276
hyperexponentielles Wachstum 205

imaginäre Einheit 104 def
imaginäre Zahl 105
Imaginärteil 105 def
Induktion, unvollständige 75
Induktion, vollständige 26 def, 75
induzierte Investitionen 252, 258
inhomogenes lineares Gleichungssystem 116
Inhomogenität 44, 82
Inhomogenität, konstante 44, 47, 82, 143
Inhomogenität, lineare 83
Inhomogenität, polynomiale 84, 144
interagierende Populationen 216

inverses Element 68
Investitionen 250
Investitionen, autonome 252
Investitionen, induzierte 252, 258
Investitionsgüter 249
Irrfahrt 171
Irrfahrt, asymmetrische 175
Irrfahrt, symmetrische 171, 174
iterativer Prozeß 41

Kapazität (beim logistischen Wachstum) 203
Kapitalversicherung 72
Kaskadenmodelle 230
Kettenbrief 24
Keynes-Identität 250
Koeffizienten eines Polynoms 36
Koeffizientenmatrix 117
kommutative Gruppe 69
Kommutativität 68
komplexe Wurzel 139
komplexe Zahl 104 def
konjugiert komplex 110 def
Konkurrenz 216, 223
konstante Geschwindigkeit 266
konstante Inhomogenität 44, 47, 82, 143
Konstantenspeicher 15
Kontensystem 248
kontinuierliche Modelle 308
konvergente Folge 56 def
Konvergenz 153
Kraft 271
Kreisgeschwindigkeit 287

labiles Gleichgewicht 205
Lagerhaltungs-Gleichung 113 def, 146
Lagerhaltungsmodell 237
Lagerinvestition 249
Lebensversicherung 72
linear abhängig 95 def
lineare Differenzengleichung 43 def 114
lineare Inhomogenität 83
lineare Modelle 307
lineare Unabhängigkeit 114
lineares Gleichungssystem 115
Linearisierung 215
Linearkombination 93 def
linear unabhängig 93 def, 129
Löhne 249
logistisches Wachstum 201, 203 def
logistisches Wachstum mit Schwellenwert 212
Luftwiderstand 273

Makroökonomie 232
Märkte 247
Marktpotential 210
Marktpotential, freies 210
Masse 271
Massenmittelpunkt 187 def
Matrix 97, 117
Methode der unbestimmten Koeffizienten 80
Mikroökonomie 232
Mittel, arithmetisches 184
Mittelpunkt 186
Mittelwertsregel, erste 171
Mittelwertsregel, zweite 173
mittlere Beschleunigung 267 def
mittlere Dauer 176
mittlere Geschwindigkeit 267 def
mittlere Spieldauer 173
Modellbildung 304
Modell, deterministisches 307
Modell, diskretes 308
Modell, dynamisches 307
Modellerstellung 305
Modell, kontinuierliches 308
Modell, lineares 307
Modell, nichtlineares 307
Modell, statisches 307
Modell, stochastisches 307
Modell von Harrod 258
Modell von Hicks 258, 261
Modell von Samuelson 258, 259
modulares Problemlösen 42, 303
Moivre, Formel von 108
Momentangeschwindigkeit 267 def
monoton fallende Folge 55 def
monoton wachsende Folge 55 def
Mortalität 201

Nachbarzustand 172
nachschüssige Rente 50
n-dimensionaler Vektorraum 94 def
Nettosozialprodukt 249
neutrales Element 68
Newton 272
nichtkonstante Geschwindigkeit 267
nichtlineare Modelle 307
n-Tupel 94
Nullfolge 56 def
Nullvektor 69

Ordnung einer Differenzengleichung 40 def, 44
oszillierende Folge 57 def

Partialsumme 30 def, 162, 163
partikuläre Lösung 79
PASCAL 126
Pentagonalzahlen 160
Periodendauer 279
Permanenzprinzip 105
Permutation 127
Permutation, gerade 127

Permutation, ungerade 127
Phasenbild 204
Phasenkurve 203
Phasenpunkt 205
Phasenverschiebung 244
Pivot-Element 126
Planetenbahnen 284
Polarkoordinaten 106 def
Polygon 161
Polygonalzahlen 161 def
Polynom 36
Polynom, Grad 36
polynomiale Folge 39
polynomiale Inhomogenität 84, 144
Population 193
Populationen, interagierende 216
Potenz 29 def
Prämiensteigerung, dynamische 72
private Haushalte 247
Produktion radioaktiver Substanzen 290
Produktionskonto 248
Prognosemodelle 307
Programm 18
Pro-Kopf-Zuwachsgeschwindigkeit 195
Prozedurkonzept 303
prozentuales Wachstum 20
Prozeß, iterativer 41
Pyramidalzahlen 162 def

Quadratzahlen 158

radioaktives Gleichgewicht 293
Radioaktivität 288
Räuber-Beute-Systeme 217
Reaktionskinetik 226
Realteil 105 def
Reduktion 305
rekursive Darstellung 41
rekursive Definition 29
Rente 50
Rente, nachschüssige 50
Renten-Endwertfaktor 50
Rente, vorschüssige 50
Resonanz 281, 282
Resonanzkatastrophe 282
Riemannscher Umordnungssatz 181
Roulette 178

Saldensumme 232
Saldensummenkriterium 232
Samuelson, Modell von 258, 259
Satellitenbahnen 284
Sättigungswachstum 210
Sättigungswachstum mit Schwellenwert 211, 212 def
Schlankheitskur 199
Schweinezyklus (Hanau) 61
Schwellenwert 212
Schwerpunkt 187 def
Schwingung 275
Schwingung, erzwungene 281
Schwingung, freie 276
Schwingung, gedämpfte 276, 280
Schwingung, harmonische 275
Schwingung, ungedämpfte 275
senkrechter Wurf 273
Skalar 69
Skalarmultiplikation 69
Skylab 284
Sparkassenkonvention 48
spezielle Lösung 79
Spieldauer, mittlere 173
Spinnwebendiagramm 64
stabiler Gleichgewichtswert 155 def
stabiles Gleichgewicht 205
Stabilität 153
stationäres Gleichgewicht 219
statische Modelle 307
Staubfigurenverfahren 265
Sterbefälle 194 def
Sterbefunktion 194 def
Sterberate 194 def
stochastische Modelle 307
Stoffmengenänderungen 226
streng monoton fallende Folge 55 def
streng monoton wachsende Folge 55 def
Stroboskop 264
Summation 30 def
Summierung 163
Superpositionssatz 152
Symbiose 217
symmetrische Irrfahrt 171, 174

Tacomabrücke 282
Tausch 247
Teilsumme 30 def, 162, 163
Temperaturverteilung 174
temporäres Gleichgewicht 219
Tilgungsgleichung 47 def, 52, 60
Tilgung von Darlehen 46
Trapezzahlen 160
Türme von Hanoi 51

Übergang 171
Übergangswahrscheinlichkeit 171
ungedämpfte Schwingung 275
ungerade Permutation 127
Ungleichung, Bernoullische 29
unterjährige Ratenzahlung 49
Unternehmen 247
Unterraum 71
unvollständige Induktion 75

Vandermondesche Determinante 131 def
Vektor 69
Vektorraum 68 def, 92
Vektorraum der n-Tupel 94
Vektorraum, eindimensionaler 71

velocity 266
verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung 87 def, 98, 111
Verfahren von Heron 190
Vermögensänderungskonto 248, 250
Versuchslösung 151
Vielfachheit einer Wurzel 108
Vieta, Wurzelsätze von 89, 146
Volkseinkommen 247, 249
vollständige Induktion 26 def, 75
vorschüssige Rente 50

Wachstum bei Selbstvergiftung 206
Wachstum einer Bakterienkultur 225
Wachstum, explosives 205
Wachstum, exponentielles 199
Wachstum, freies 199
Wachstum, geometrisches 19, 199
Wachstum, hyperexponentielles 205
Wachstum, logistisches 201, 203 def
Wachstum, logistisches mit Schwellenwert 212
Wachstum, prozentuales 20
Wachstumsfaktor 20
Wachstumsprozesse 193
Wachstumsrate 195 def
Waren 247
Wertschöpfung 249
Wertzuweisung 18
Wirtschaftskreislauf 248
Wirtschaftsprozeß 247
Wurf, senkrechter 273
Wurzelsätze von Vieta 89, 146

Zeilenführer 118, 120
Zeilenumformungen, zulässige 116
Zerfallsprozesse 288
Zerfallsreihen 291
Zinseszins 21
zugehörige homogene Gleichung 83
zulässige Zeilenumformungen 116
Zustand 171
Zuteilung von Bausparverträgen 232
Zuwachs 194 def
Zuwachsgeschwindigkeit 195 def
Zuwachsrate 194 def, 195
Zuwachs-Sparen 64
zweite Mittelwertsregel 173

Schöningh-Schulbuch 37 562 8

ISBN 3 506 37562 8